

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

CAP RODRIGO BRANDOLT SODRÉ DE MACEDO

IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS USANDO CONJUNTOS GERADORES  
OTIMIZADOS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Roberto Ades - Dr. PUC-Rio

Rio de Janeiro  
2001



**INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA**

**CAP RODRIGO BRANDOLT SODRÉ DE MACEDO**

**IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS USANDO CONJUNTOS GERADORES  
OTIMIZADOS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Roberto Ades - Dr. PUC-Rio Aprovada em 22 de janeiro de 2002 pela seguinte Banca Examinadora:

---

Prof. Roberto Ades - Dr. PUC-Rio do IME - Presidente

---

Prof. Marcos Azevedo da Silveira - Dr. D'Etat da PUC-Rio

---

Prof. Paulo César Pellanda - Dr. ENSAE do IME

---

Prof. Armando Morado Ferreira - P.h.D. do IME

Rio de Janeiro

2001

A Marli, Valmir, Kátia e Márcia.

## AGRADECIMENTOS

Ao Exército Brasileiro, em especial ao Departamento de Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, pela oportunidade de crescimento pessoal e profissional durante o curso de Mestrado.

Ao orientador do trabalho, Roberto Ades, e a Geraldo Magella Pinheiro Gomes, ambos professores de mestrado em Controle do IME. Agiram sempre com franqueza, amizade, entusiasmo e paciência. Aprendi muito com suas cobranças, modo de agir e, claro, conhecimentos técnicos.

Ao professor Ney Bruno, professor de Graduação, pelo exemplo de dedicação e seriedade no trabalho acadêmico que me influenciaram desde a graduação a optar pela área de Controle.

Aos professores Decílio de Medeiros Salles, Luís Antônio, Luíz Caloba, Mário Massa e Paulo Rosa, pelos conhecimentos apresentados durante as aulas e ao professor José Vicente Medlig pelas sugestões ao longo da dissertação.

Aos colegas de turma Ademir Rodrigues, Fábio Sagaz e Thiago Lacerda de Lavega, pelo companheirismo. A Antônio Eduardo Carrilho da Cunha que me auxiliou no uso do editor Latex.

À minha esposa Márcia pelo amor e compreensão com que me suportou durante esse período de dedicação à dissertação, aos meus pais Marli e Valmir e a minha irmã Kátia, pelas palavras de incentivo, pelo exemplo e apoio incondicional. Enfim, aos meus familiares.

## SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	9
LISTA DE TABELAS	13
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS	15
LISTA DE SIGLAS	16
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>19</b>
1.1 Posicionamento da dissertação	21
1.2 Objetivos	22
1.3 Descrição geral	23
<b>2 TÓPICOS DE IDENTIFICAÇÃO, DE NORMAS E DE OTIMIZAÇÃO</b>	<b>25</b>
2.1 Introdução à identificação	25
2.1.1 Método de Erro de Predição	33
2.1.2 Método de Correlação	34
2.1.3 Método de Subespaço	34
2.1.4 Método recursivo	35
2.2 Tópicos de espaços, normas e modelos	36
2.2.1 Modelos ARX	37
2.2.2 Modelos FIR	38
2.2.3 Modelos de Laguerre	39
2.2.4 Modelos de Kautz	40
2.3 Tópicos de otimização	40
2.3.1 Busca unidimensional por meio do método de Wolfe	42
2.3.2 O método de Newton e os métodos Quase-Newton	43
2.3.3 Os Métodos Quase-Newton (MQN)	43
2.3.4 Função objetivo	45
2.3.5 Funções penalidade	45
2.3.6 Convexidade	47
<b>3 A METODOLOGIA DE IDENTIFICAÇÃO</b>	<b>50</b>
3.1 Formulação teórica	53

3.2	Cálculo do gradiente da função objetivo $J_2$ e do subgradiente $J_\infty$ para CGO .	57
3.2.1	Resposta ao degrau de uma parcela genérica . . . . .	58
3.2.2	Gradiente da função objetivo $J_2$ devido à parcela ímpar . . . . .	63
3.3	Subgradiente da função objetivo $J_\infty(\Theta)$ para entrada tipo degrau . . . . .	64
3.3.1	Subgradiente da função objetivo $J_\infty$ devido à parcela ímpar . . . . .	66
3.4	Cálculo do gradiente da função objetivo $J_2$ e do subgradiente $J_\infty$ para base de Laguerre . . . . .	67
3.4.1	Gradiente da função objetivo, usando a base de Laguerre . . . . .	67
3.4.2	Subgradiente da função objetivo $J_\infty$ , usando a base de Laguerre . . . . .	68
3.5	Algoritmo da metodologia de identificação usando CGO e usando base de Laguerre . . . . .	69
<b>4</b>	<b>EXEMPLOS DE APLICAÇÃO</b> . . . . .	<b>72</b>
4.1	Sistema defletor a laser para imageamento . . . . .	72
4.1.1	Identificação . . . . .	74
4.2	O sistema radiômetro . . . . .	94
4.2.1	Princípio de funcionamento . . . . .	94
4.2.2	A coleta de dados . . . . .	96
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b> . . . . .	<b>108</b>
5.1	Conclusões . . . . .	108
5.2	Perspectivas . . . . .	108
<b>6</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .	<b>110</b>
<b>7</b>	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	<b>113</b>
7.1	Apêndice 1: Vetores de variáveis de projeto obtidos nos exemplos . . . . .	114
7.1.1	Vetores de variáveis de projeto obtidos no sistema defletor a laser para imageamento . . . . .	115
7.1.2	Vetores de variáveis de projeto obtidos no sistema radiômetro . . . . .	119
7.2	Apêndice 2: Meios de aquisição de dados . . . . .	120
7.2.1	A placa PCL-812PG . . . . .	120
7.2.2	Arquivo de coleta de dados do sistema radiômetro . . . . .	123
7.2.3	Rotina MATLAB usada no sistema radiômetro . . . . .	124
7.2.4	Dados tratados do sistema radiômetro . . . . .	127
7.3	Apêndice 3: Funções de Laguerre no tempo e suas integrais . . . . .	130

7.4	Apêndice 4: Escolha do pólo otimizado para a base de Laguerre . . . . .	133
7.5	Apêndice 5: Cálculo da resposta ao degrau de uma parcela genérica e de suas derivadas . . . . .	134



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG.1.1	Posicionamento da identificação na engenharia de controle. . . . .	20
FIG.2.1	Exemplo de sistema não linear. . . . .	29
FIG.2.2	Resposta ao impulso: exemplo de representação não paramétrica. . . . .	29
FIG.2.3	Modelo de Laguerre. . . . .	39
FIG.2.4	Estrutura de um sistema de otimização. . . . .	41
FIG.2.5	Ilustração da busca unidimensional Wolfe. . . . .	42
FIG.2.6	Exemplo de modelagem. (a) Segundo a norma $J_\infty$ .(b) Segundo a norma $J_2$ . . . . .	46
FIG.3.1	Visão geral da metodologia de identificação proposta. . . . .	52
FIG.3.2	Exemplo de sistema bipróprio. . . . .	54
FIG.3.3	Comparação entre funções objetivo convexa e não convexa. . . . .	55
FIG.3.4	Algoritmo da metodologia de identificação para CGO. . . . .	70
FIG.3.5	Algoritmo da metodologia de identificação para base de Laguerre. . . . .	71
FIG.4.1	O sistema defletor para imageamento a laser. . . . .	73
FIG.4.2	O diagrama do sistema defletor para imageamento a laser. . . . .	73
FIG.4.3	Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento medido no osciloscópio. . . . .	75
FIG.4.4	Resposta ao degrau filtrada do sistema defletor a laser para imageamento. . . . .	75
FIG.4.5	Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 1ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_\infty$ , usando Laguerre. . . . .	76
FIG.4.6	Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 1ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_\infty$ , usando CGO. . . . .	76
FIG.4.7	Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 2ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_\infty$ , usando Laguerre. . . . .	77
FIG.4.8	Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 2ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_\infty$ , usando CGO. . . . .	77
FIG.4.9	Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 3ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_\infty$ , usando	

Laguerre. . . . .	78
FIG.4.10 Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 3ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_\infty$ , usando CGO. . . . .	78
FIG.4.11 Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 4ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_\infty$ , usando Laguerre. . . . .	79
FIG.4.12 Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 4ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_\infty$ , usando CGO. . . . .	79
FIG.4.13 Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 7ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_\infty$ , usando Laguerre. . . . .	80
FIG.4.14 Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 7ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_\infty$ , usando CGO. . . . .	80
FIG.4.15 Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 8ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_\infty$ , usando Laguerre. . . . .	81
FIG.4.16 Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 8ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_\infty$ , usando CGO. . . . .	81
FIG.4.17 Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 1ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_2$ , usando Laguerre. . . . .	82
FIG.4.18 Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 1ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_2$ , usando CGO. . . . .	82
FIG.4.19 Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 2ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_2$ , usando Laguerre. . . . .	83
FIG.4.20 Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 2ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_2$ , usando CGO. . . . .	83
FIG.4.21 Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu	

modelo de 3ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_2$ , usando Laguerre. . . . .	84
FIG.4.22 Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 3ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_2$ , usando CGO. . . . .	84
FIG.4.23 Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 4ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_2$ , usando Laguerre. . . . .	85
FIG.4.24 Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 4ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_2$ , usando CGO. . . . .	85
FIG.4.25 Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 7ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_2$ , usando Laguerre. . . . .	86
FIG.4.26 Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 7ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_2$ , usando CGO. . . . .	86
FIG.4.27 Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 8ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_2$ , usando Laguerre. . . . .	87
FIG.4.28 Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 8ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_2$ , usando CGO. . . . .	87
FIG.4.29 Sinal de entrada para validação dos modelos obtidos minimizando-se as funções objetivos $J_2$ e $J_\infty$ , usando CGO. . . . .	92
FIG.4.30 Validação do modelo de 2ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_2$ . . . . .	92
FIG.4.31 Validação do modelo de 2ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_\infty$ . . . . .	93
FIG.4.32 Comparação entre os modelos de 1ª e 8ª ordem minimizando-se a função objetivo $J_\infty$ . . . . .	93
FIG.4.33 O sistema radiômetro. . . . .	95
FIG.4.34 Radiômetro de Crookes. . . . .	95
FIG.4.35 Circuito de detecção da rotação das palhetas do radiômetro. . . . .	98
FIG.4.36 Resposta ao degrau de 4V para 8V no sistema radiômetro:tensão de saída. . . . .	98
FIG.4.37 Resposta ao degrau de 4V para 8V não filtrada do sistema radiômetro. . . . .	99
FIG.4.38 Resposta ao degrau de 4V para 8V filtrada do sistema radiômetro. . . . .	99

FIG.4.39	Resposta ao degrau do sistema radiômetro e de seu modelo de 1ª ordem minimizando-se a função objetivo $J_2$ , usando Laguerre. . . . .	100
FIG.4.40	Resposta ao degrau do sistema radiômetro e de seu modelo de 1ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_2$ , usando CGO. . . . .	100
FIG.4.41	Resposta ao degrau do sistema radiômetro e de seu modelo de 2ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_2$ , usando Laguerre. . . . .	101
FIG.4.42	Resposta ao degrau do sistema radiômetro e de seu modelo de 2ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_2$ , usando CGO. . . . .	101
FIG.4.43	Resposta ao degrau do sistema radiômetro e de seu modelo de 4ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_2$ , usando Laguerre. . . . .	102
FIG.4.44	Resposta ao degrau do sistema radiômetro e de seu modelo de 4ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_2$ , usando CGO. . . . .	102
FIG.4.45	Resposta ao degrau do sistema radiômetro e de seu modelo de 1ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_\infty$ , usando Laguerre. . . . .	103
FIG.4.46	Resposta ao degrau do sistema radiômetro e de seu modelo de 1ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_\infty$ , usando CGO. . . . .	103
FIG.4.47	Resposta ao degrau do sistema radiômetro e de seu modelo de 2ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_\infty$ , usando Laguerre. . . . .	104
FIG.4.48	Resposta ao degrau do sistema radiômetro e de seu modelo de 2ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_\infty$ , usando CGO. . . . .	104
FIG.4.49	Resposta ao degrau do sistema radiômetro e de seu modelo de 4ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_\infty$ , usando Laguerre. . . . .	105
FIG.4.50	Resposta ao degrau do sistema radiômetro e de seu modelo de 4ª ordem, minimizando-se a função objetivo $J_\infty$ , usando CGO. . . . .	105

## LISTA DE TABELAS

TAB.4.1	Resultados usando a expansão pelas funções de Laguerre e minimização da função objetivo $J_\infty$ no sistema defletor a laser para imageamento.	88
TAB.4.2	Resultados usando conjunto gerador e função objetivo $J_\infty$ no sistema defletor a laser para imageamento. . . . .	88
TAB.4.3	Resultados usando o conjunto de gerador e a função objetivo $J_2$ no sistema defletor a laser para imageamento. . . . .	89
TAB.4.4	Resultados usando a expansão pelas funções de Laguerre e minimização da função objetivo $J_2$ no sistema defletor a laser para imageamento.	89
TAB.4.5	Pólos e zeros usando conjunto gerador e função objetivo $J_2$ no sistema defletor a laser para imageamento. . . . .	90
TAB.4.6	Pólos e zeros usando conjunto gerador e função objetivo $J_\infty$ no sistema defletor a laser para imageamento. . . . .	91
TAB.4.7	Pólos e zeros do sistema radiômetro usando conjunto gerador otimizado e minimizando-se a função objetivo $J_2$ . . . . .	106
TAB.4.8	Pólos e zeros do sistema radiômetro usando conjunto gerador otimizado e minimizando-se a função objetivo $J_\infty$ . . . . .	106
TAB.4.9	Características dos modelos do sistema radiômetro usando conjunto gerador e minimizando-se a função objetivo $J_2$ . . . . .	107
TAB.4.10	Características dos modelos do sistema radiômetro usando a base de Laguerre e minimizando-se a função objetivo $J_2$ . . . . .	107
TAB.4.11	Características dos modelos do sistema radiômetro usando conjunto gerador e minimizando-se a função objetivo $J_\infty$ . . . . .	107
TAB.4.12	Características dos modelos do sistema radiômetro usando a base de Laguerre e minimizando-se a função objetivo $J_\infty$ . . . . .	107
TAB.7.1	Vetores de variáveis de projeto para o sistema defletor a laser para imageamento usando Laguerre. . . . .	115
TAB.7.2	Vetores $\delta$ obtidos usando CGO para o sistema defletor a laser para imageamento. . . . .	116
TAB.7.3	Vetores de variáveis de projeto para o sistema defletor a laser para imageamento usando CGO. . . . .	117
TAB.7.4	Vetores de variáveis de projeto para o sistema defletor a laser para imageamento usando CGO. . . . .	118

TAB.7.5 Vetores de variáveis de projeto para o sistema radiômetro usando Laguerre.  
119

TAB.7.6 Vetores de variáveis de projeto para o sistema radiômetro usando CGO. 119

## LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

### SÍMBOLOS

$\  \cdot \ _2$	Norma 2
$\  \cdot \ _\infty$	Norma infinito
$J_2$	Função objetivo erro médio quadrático
$J_\infty$	Função objetivo máximo erro absoluto
$J_{2P}$	Função objetivo dos mínimos quadrados ponderados
$\nabla J_2$	Gradiente da função objetivo $J_2$
$\mathcal{L}$	Transformada de Laplace
$\mathcal{F}$	Transformada de Fourier
$H(jw)$	Resposta em frequência
$\hat{H}(jw)$	Resposta estimada em frequência
$\mathcal{RH}_2^+$	Espaço das funções racionais em $s$ , estritamente próprias, estáveis e quadraticamente integráveis sobre o eixo imaginário
$\xi$	Subgradiente da função objetivo $J_\infty$
$\square$	Fim de prova
$\diamond$	Fim de exemplo
$\approx$	Aproximadamente

## LISTA DE SIGLAS

ARX	<i>AutoRegressive structure with eXogenous input</i> ; Estrutura autoregressiva com entrada externa
BFGS	<i>Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno</i>
CGO	Conjunto Gerador Otimizado
DFP	Davidson-Fletcher-Powell
FO	Função Objetivo
LIT	<i>Linear Time-Invariant</i> ; Linear e invariante no tempo
FIR	<i>Finite Impulse Response</i> ; Resposta a um impulso finito
IME	Instituto Militar de Engenharia
IMPA	Instituto de Matemática Pura e Aplicada
LNCC	Laboratório Nacional de Computação Científica
MQN	Métodos Quase-Newton
MIMO	<i>Multiple Input Multiple Output</i> ; Sistema com múltiplas entradas e saídas
PA	Passa alta
PB	Passa baixa
PEM	<i>Predicton Error Methods</i> ; Métodos de Predição de Erros
PUC	Pontifícia Universidade Católica
s.a	sujeito a
SISO	<i>Single Input Single Output</i> ; Sistema com uma entrada e uma saída
TDF	Transformada Discreta de Fourier
TF	Transformada de Fourier
UFRJ	Universidade Federal do Rio de Janeiro



## RESUMO

Esta dissertação apresenta um método de identificação de sistemas estáveis. O método de identificação proposto prescinde do conhecimento prévio do comportamento dinâmico do sistema e se mostra ainda mais vantajoso quando a modelagem física do sistema é trabalhosa ou impossível. O fato de utilizar apenas um único par de dados entrada e saída no tempo para obtenção de um modelo linear na ordem desejada para o sistema é outra vantagem considerável do método proposto.

A identificação do sistema parte de um conjunto de dados entrada e saída amostrados à uma taxa  $f_s$  que, a seguir, são filtrados. Utiliza-se um conjunto gerador otimizado, conforme (ADES, 1999), para a determinação do modelo.

O processo de identificação, ao utilizar conjuntos geradores otimizados para representar a característica dinâmica do sistema, recai em um problema de otimização, cujas variáveis de projeto estão relacionadas aos pólos e zeros da função de transferência do sistema. Esse problema é resolvido por meio do método de otimização de "Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno" (BFGS) e do método de busca unidimensional de Wolfe. A função objetivo adotada pondera o erro quadrático e o maior erro absoluto entre as respostas ao degrau fornecidas pelo sistema e pelo modelo. Nesse caso, a função objetivo torna-se não convexa em relação às variáveis escolhidas. A base de Laguerre, utilizada por diversos autores (FU & DUMONT, 1993, DEN HOF, 1995, OLIVEIRA & AMARAL, 1999, BODIN ET ALII, 2000), para identificação de sistemas, leva a um modelo cujo valor da função objetivo serve de parâmetro de comparação para a solução obtida com o método proposto.

Uma redução da ordem de modelo via realização balanceada pode ser feita no final do processo de identificação de maneira a encontrar um modelo alternativo com ordem menor. Como resultado do método de identificação são fornecidos um modelo e sua medida de incerteza segundo a norma infinito.

O método foi aplicado em um sistema defletor a laser para imageamento e no radiômetro de Crookes. Esses sistemas estão implementados no laboratório de Controle do IME e seus modelos foram identificados, validando o método proposto.

## ABSTRACT

This work presents a system identification approach for stable systems. The proposed identification approach works without previous system knowledge and it seems to be more advantageous when physical modelling is difficult or impossible. The fact of using only one input/output set to find a desired model for the system is another considerable advantage for the proposed method.

The identification system begins with the input/output set, sampling at  $f_s$  tax. It uses optimized generated sets (ADES, 1999) producing the model. The objective function ponders the quadratic error sum and the maximum absolute error produced by degree input response by the system and by the model. The identification approach using optimized generated sets in fact is a non linear optimization of poles and zeros where the objective function is not convex.

The problem optimization is solved by "Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno" Method, (BFGS), and Wolfe line search method.

Using Laguerre basis, utilized by several authors (FU & DUMONT, 1993, DEN HOF, 1995, OLIVEIRA & AMARAL, 1999, BODIN ET ALII, 2000), in system identification, a model is constructed and its objective function value serves as a comparison for the solution of the proposed method.

A model order reduction by balanced realization can be done in the final identification approach finding a smaller alternative model. As a result of the identification method, one model and its bound uncertainty in the infinity and two norms are provided.

The method is applied to a system that creates images deflecting a laser beam and to the Crooke's radiometer system. These system are implemented at IME Control Laboratory (IME-CL), and its models were identified, validating the identification method.

## 1 INTRODUÇÃO

O homem tem experimentado a teoria expressando fenômenos através de modelos matemáticos. A experiência adquirida gera o conhecimento. Descrevem-se sistemas através de modelos matemáticos desde a antiguidade. Kepler, em seus estudos sobre órbitas planetárias ("Mistérios do Universo", 1597), Gauss, em suas observações do movimento dos corpos celestes (1795), ou Einstein, na teoria da relatividade geral (1916), todos buscavam leis ou modelos que fossem análogos matemáticos aos sistemas observados. Fica claro que representar sistemas através de modelos matemáticos há muito tempo fascina o homem. De uma forma geral, o modelo é uma maneira útil e compacta de expressar o comportamento dinâmico de um processo.

Acentuou-se por volta dos anos 1960, a importância de modelos matemáticos na teoria de controle. É a Teoria de Controle Moderno, que surge em função de problemas com múltiplas entradas e saídas. O aumento da capacidade de coleta de dados, a partir de 1980, permitiu que sistemas de diversas áreas do conhecimento, além da engenharia, como a economia, a biologia, a meteorologia ou a hidrologia, utilizassem técnicas de identificação.

Entende-se por identificação a aplicação de um conjunto de técnicas de estimação de modelos. Essa estimação é realizada a partir da observação dos sinais de entrada e saída de um sistema. A identificação é também uma alternativa à modelagem analítica para a obtenção de modelos de um sistema. Por vezes, a aplicação das leis da mecânica, química, termodinâmica ou do eletromagnetismo em sistemas complexos para fins de modelagem é bastante trabalhosa, ou até mesmo impossível, devido aos fenômenos envolvidos.

O conceito de incerteza é importante em projetos de controle. Pode ser preferível, por exemplo, usar um modelo de ordem baixa com a quantificação de incerteza de modelagem ao invés de utilizar um modelo mais preciso com ordem elevada e com menos incerteza. Isto ocorre porque um controlador de ordem elevada exige uma demanda de tempo excessiva durante o projeto. O modelo deve ser simples, porém capaz de descrever o sistema com a precisão suficiente para ser válido numa região em torno do ponto de operação. Há, dessa forma, um compromisso entre a complexidade matemática e a qualidade do modelo.

A escolha de modelos lineares para identificação de sistemas dinâmicos e o cálculo da incerteza do modelo, segundo a norma infinito, visam o emprego do modelo para controle usando a teoria de controle linear.

A FIG. 1.1 ilustra o posicionamento da identificação de sistemas na engenharia de controle. A identificação é um elo entre a realidade física e a teoria, fornecendo um

modelo necessário para o emprego dessas teorias. Pode-se afirmar que para desenvolver um modelo deve-se pensar na sua aplicação.

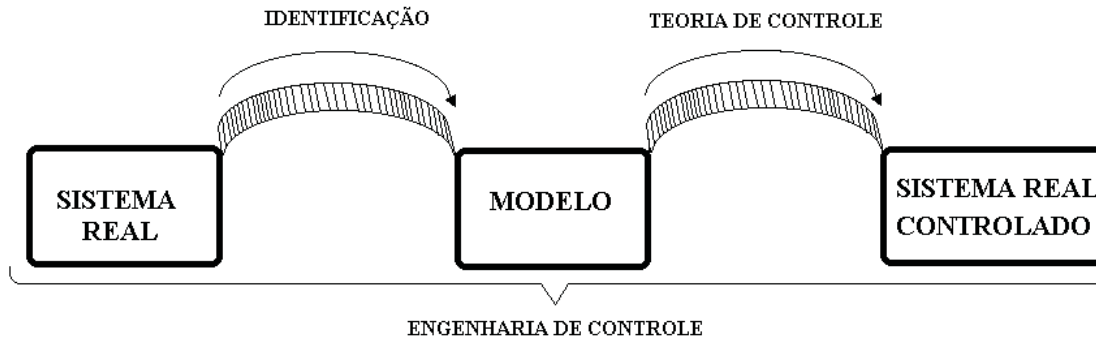


FIG. 1.1: Posicionamento da identificação na engenharia de controle.

Na prática, a construção de um modelo possui as seguintes fases que se interrelacionam:

- Coleta do conjunto de dados

O conjunto de dados deve ser informativo, no sentido de representar bem o comportamento do sistema em sua operação normal. Nessa fase ainda, o erro randômico (ruído) que possivelmente existe nos dados coletados deve ser atenuado por processos de filtragem.

- Classes de modelos

Usualmente há duas classes de modelos: caixa preta (*black box*) e caixa branca (*white box*). Na primeira, não há qualquer significado físico nos parâmetros do modelo. Os parâmetros são ajustados de maneira que o objetivo estabelecido pelo projetista seja atingido. Um exemplo de objetivo é a saída do modelo apresentar um erro assintótico próximo de zero. Já na segunda família, o modelo é obtido das leis físicas, como, por exemplo, a partir das leis mecânicas de Newton. Uma combinação de ambas dá origem à identificação cinza, onde a modelagem também é baseada nas leis da física, porém alguns parâmetros do modelo são desconhecidos, devendo ser determinados em experimentos de laboratório ou em procedimentos computacionais.

- Escolha do melhor modelo

A escolha do melhor modelo na família de modelos adotada é orientada pelo conjunto

de dados de medidas de entrada e saída, baseada em algum critério que quantifica o ajustamento do modelo aos dados medidos. Essa escolha é a essência da metodologia de identificação. Três metodologias paramétricas são mais conhecidas entre as várias existentes: metodologia de Erro de Predição, metodologia de Correlação e a metodologia de Subespaço. Detalhes a respeito dessas três metodologias podem ser lidos no capítulo 2 e, adicionalmente, em (LJUNG, 1988). Nessas metodologias, assim como na metodologia de identificação proposta nesse trabalho, o melhor modelo é aquele obtido pela minimização de uma determinada função objetivo.

- Validação do modelo

Por último, é preciso conhecer a qualidade desse modelo, isso é, o quanto ele é válido na vizinhança do ponto de operação analisado. Isso é extremamente importante em aplicações de controle robusto, já que essa informação é necessária para determinar a classe de perturbações a que o modelo deverá ser submetido. O modelo será válido se apresentar um comportamento similar ao do sistema durante a aplicação a que esteja destinado.

A validação do modelo é realizada submetendo-o a entradas diferentes daquelas utilizadas na identificação. As saídas desse modelo são então comparadas com as respectivas saídas do sistema real submetido às mesmas entradas. Caso os erros sejam aceitáveis, o modelo é dito válido.

## 1.1 POSICIONAMENTO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação situa-se na área de identificação de sistemas. Apresenta-se uma metodologia de identificação de sistemas paramétrica, estocástica, de natureza temporal e que utiliza conjuntos geradores otimizados, conforme (ADES, 1999), para obtenção de modelos lineares do sistema físico em estudo. Devido ao procedimento de filtragem utilizado durante a coleta dos dados, pode-se dizer que esta metodologia é estocástica. Esse procedimento reduz sensivelmente os efeitos dos ruídos.

É sabido que o problema de minimização das funções objetivo nas metodologias paramétricas mais conhecidas não pode ser resolvido analiticamente de maneira geral. Com os métodos de otimização usados, por sua vez, resolve-se numericamente esse problema. Assim é a abordagem da dissertação: propor uma metodologia de identificação que use algoritmos de otimização de ordem 1 para fornecer um modelo linear. A metodologia proposta recai num problema de otimização, cujas variáveis de projeto estão relacionadas aos pólos e, indiretamente, aos zeros do modelo.

A função objetivo adotada na metodologia proposta pondera o erro quadrático e o maior erro absoluto entre as respostas ao degrau fornecidas pelo sistema e pelo modelo.

A escolha de modelos lineares para identificação, bem como o cálculo da incerteza do modelo segundo a norma infinito, visam o emprego de métodos lineares de controle robusto.

O termo robusto expressa a importância de desenvolverem-se metodologias que mantêm a estabilidade e o desempenho em malha fechada, não apenas para o modelo nominal, mas também para uma família de modelos, considerando a imperfeição da modelagem e a presença de distúrbios e ruídos. A identificação de um modelo nominal e de seu erro segundo a norma infinito está posicionada na área de interesse das técnicas de Controle Robusto.

Deve ficar claro que a metodologia ora abordada visa uma identificação de sistemas SISO. Para sistemas MIMO é possível uma extensão do método, mas é preciso escolher as entradas e saídas e desacoplá-las através de algum processo estatístico (MONTGOMERY, 1994).

São várias as aplicações da metodologia proposta, podendo-se citar, na área militar, a identificação de modelos de mísseis, de usinas nucleares ou de produtos químicos sintetizados.

De posse do modelo identificado e empregando uma estratégia de controle, é possível alterar o comportamento dinâmico do sistema modelado, tornando-o, por exemplo, mais rápido ou menos oscilante.

## 1.2 OBJETIVOS

Os objetivos desta dissertação são:

1. Realizar um estudo na área de identificação, abordando seus conceitos básicos e procedimentos, bem como, estudar alguns tópicos de otimização a fim de empregá-los .
2. Desenvolver uma metodologia de identificação para sistemas estáveis sem o conhecimento prévio da dinâmica do sistema. A metodologia de identificação de sistema proposta utiliza conjunto geradores otimizados, conforme (ADES, 1999), para obtenção do modelo do sistema real de interesse. Além do modelo, é fornecida uma medida de incerteza, segundo a norma infinito, como resultado da metodologia de identificação.

3. Comparar os resultados da metodologia de identificação proposta, calculando-se as soluções a partir de conjuntos geradores otimizados, com aqueles obtidos por meio da base de Laguerre, utilizada por diversos autores ( FU & DUMONT, 1993, DEN HOF, 1995, OLIVEIRA & AMARAL, 1999, BODIN ET ALII, 2000) para identificação de sistemas.
4. Empregar a técnica proposta em sistemas físicos reais existentes no Laboratório de Controle do IME. Foram utilizados dois sistemas, o sistema radiômetro e o sistema defletor para imageamento a laser. Isso permitiu experimentar todas as fases de um processo de identificação real, desde a coleta de dados, a filtragem e a escolha da classe de modelo e da função objetivo, até a identificação e a validação de resultados.

### 1.3 DESCRIÇÃO GERAL

A dissertação encontra-se dividida em 5 capítulos. Este 1º capítulo é uma introdução, onde se posiciona a dissertação em relação ao meio científico e se expõe os seus objetivos.

O embasamento matemático para a dissertação é estudado no 2º capítulo. Primeiramente são vistos algumas metodologias de identificação. Descreve-se também a identificação de sistemas com modelos gerados a partir das bases de Laguerre e de Kautz, conforme (CLAUSEN, 1996). Ainda no 2º capítulo, comentam-se as normas dois e infinito empregadas e, em seguida, discutem-se o método de otimização BFGS, além do método de busca unidimensional de Wolfe, conforme (ADES, 1994, ADES,1999).

O 3º capítulo consiste na descrição do metodologia de identificação proposta. As fases e o fluxograma do metodologia são explicados, além dos cálculos dos gradientes necessários para o desenvolvimento da metodologia.

No 4º capítulo aplica-se o método de identificação proposto em dois sistemas de laboratório, a saber: um sistema defletor para imageamento a laser e um sistema radiômetro.

O sistema defletor compõe-se de um motor com a posição angular de seu eixo controlada por um circuito. Acoplado ao eixo, um espelho deflete um feixe laser, de modo que dois conjuntos de motores seriam capazes de varrer pontos num plano. A entrada do sistema defletor é a tensão de referência da posição angular do espelho e a saída é uma tensão proporcional à mesma posição.

O sistema radiômetro, consiste em uma ampola de vidro com gás em baixa pressão e um rotor com quatro palhetas horizontais iguais montadas em um pivô central. O rotor gira no plano horizontal quando atingido por raios infravermelho. A entrada do sistema radiômetro é a tensão que alimenta a fonte de raios infravermelho e a saída é a

freqüência de rotação do pivô central. Ainda no 4º capítulo, são apresentados resultados que comprovam a eficiência da metodologia de identificação proposta, além da comparação com os resultados obtidos utilizando a base de Laguerre.

A parte final do trabalho é o 5º capítulo, onde se expõem as conclusões e se traçam perspectivas para futuros trabalhos.



## 2 TÓPICOS DE IDENTIFICAÇÃO, DE NORMAS E DE OTIMIZAÇÃO

Foram reunidos neste capítulo três tópicos, ou seja, identificação, normas e otimização. Eles são usados como ferramentas na metodologia de identificação proposta no 3º capítulo. Na seção 2.1, apresenta-se uma visão geral sobre o problema de identificação e discutem-se outras metodologias encontradas na literatura da área. Na seção 2.2, trata-se de normas e modelos, inclusive do modelo usando a base de Laguerre. Por fim, na seção 2.3, trata-se dos métodos de otimização.

### 2.1 INTRODUÇÃO À IDENTIFICAÇÃO

As metodologias de identificação podem ser classificadas de acordo com várias características. Por exemplo: de natureza freqüencial ou temporal, se fornecem tratamento aos ruídos nos dados ou se os modelos empregados são lineares ou não. As principais características estão comentadas a seguir.

- natureza temporal  $\times$  natureza freqüencial

Quanto à natureza, a identificação pode ser freqüencial, temporal ou até mesmo ambas.

Em geral, representam-se as entradas e saídas de um sistema em função do tempo. Daí, porque o enfoque temporal é mais comum. Um exemplo desse enfoque é a identificação de sistema através da resposta ao degrau, conforme (CARVALHO, 2000a).

O emprego no domínio freqüencial advém da propriedade da superposição em sistemas lineares. Pode ser mostrado que, em regime estacionário, um sistema linear estável responde na mesma freqüência  $f$  daquela da entrada. Usando essa propriedade, sua amplitude será igual à da entrada multiplicada pelo módulo da resposta em freqüência do sistema na freqüência  $f$  e sua fase alterada do sinal de entrada pelo valor da fase da resposta na mesma freqüência  $f$ . Dessa maneira, é possível obter a fase e a amplitude da resposta de um sistema, aplicando uma entrada senoidal, e, assim, representá-lo em estado estacionário através do diagrama de Bode ou de Nyquist. A necessidade de se variar a freqüência do sinal senoidal e aplicá-lo por diversas vezes é

bastante demorada na prática, sem contar que ressonâncias ou rejeições importantes podem não ser detectadas.

Uma solução, quando possível, para se evitar esse problema, consiste em aplicar a Transformada de Fourier (TF) da entrada e da saída. A TF  $Y(jw) \triangleq \mathcal{F}(y(t))$  de um sinal  $y(t)$  é definida nas EQ 2.1 e EQ 2.2:

$$Y(jw) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-jwt} dt \quad (2.1)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(jw)e^{jwt} dw. \quad (2.2)$$

Nesse ponto, algumas definições de sistema linear são necessárias para a aplicação da TF. Sabe-se que um sistema linear invariante no tempo (LTI), pode ser descrito por:

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)u(t - \tau)d\tau, \quad (2.3)$$

onde  $h(t)$  é a resposta ao impulso e  $u(t)$  uma entrada.

A representação discreta equivalente da EQ 2.3 é:

$$y(k) = \sum_{j=0}^k h(j)u(k - j), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

Assim, aplicando-se a TF na EQ 2.3 pode-se estimar a resposta em frequência  $H(jw)$  por  $\hat{H}(jw)$  da seguinte maneira:

$$\hat{H}(jw) = \frac{Y(jw)}{U(jw)}, \quad (2.5)$$

onde  $Y(jw) = \mathcal{F}(y(t))$  e  $U(jw) = \mathcal{F}(u(t))$  são as transformadas de Fourier de  $y(t)$  e de  $u(t)$  e  $\hat{H}(jw)$  uma estimativa da resposta em frequência.

Observando as EQ 2.1 e EQ 2.2, pode-se perceber que, para a TF ser definida, é preciso que suas integrais sejam finitas. Para contornar esse problema, costuma-se usar a derivada da sua resposta, conforme a EQ 2.6:

$$\hat{H}(jw) = \frac{\mathcal{F}(\dot{y}(t))}{\mathcal{F}(\dot{u}(t))} = \frac{jwY(jw)}{jwU(jw)}. \quad (2.6)$$

Porém, de maneira geral,  $y(t)$  possui ruído  $e(t)$ . Supondo que esse ruído seja aditivo, a EQ 2.6 torna-se:

$$\hat{H}(jw) = \frac{Y(jw)}{U(jw)} + \frac{E(jw)}{U(jw)}, \quad (2.7)$$

onde  $E(w) = \mathcal{F}(e(t))$ .

O análogo à Transformada de Fourier para o caso discreto, a Transformada Discreta de Fourier (TDF), para um sinal  $y(n)$  com  $M$  amostras é:

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{M-1} y(n)e^{-j(2\pi/N)nk}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, M-1. \quad (2.8)$$

- caixa branca  $\times$  caixa preta

Na identificação caixa branca (*white box*) ou modelagem física são usadas as leis físicas que representam o sistema. Caso não haja esse conhecimento, ajustam-se os parâmetros de maneira que a função objetivo estabelecida pelo projetista seja atingida. Neste caso, tem-se uma identificação caixa preta (*black box*).

- estocástica  $\times$  determinística

As metodologias que levam em consideração os ruídos, por exemplo, filtrando-os ou modelando-os, são ditas estocásticas. Caso contrário, denominam-se determinísticas, que são adequadas quando a relação entre a intensidade do sinal e a do ruído é elevada.

- linear  $\times$  não linear

A linearidade ou não do modelo a ser obtido é outra forma de se caracterizar a metodologia de identificação. Seguem-se a definição de sistema linear e dois exemplos de sistemas, o primeiro, linear e o segundo, não linear.

**Definição 2.1 (Sistema linear)** Se  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são respostas a duas entradas  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , diz-se que o sistema é linear se, para a entrada

$$x(t) = k_1x_1(t) + k_2x_2(t), \quad (2.9)$$

com  $k_1$  e  $k_2 \in \mathbb{R}$ , a resposta do sistema é:

$$y(t) = k_1y_1(t) + k_2y_2(t). \quad (2.10)$$

**Exemplo 2.1 (É linear o sistema caracterizado por  $y(t) = a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2x(t)}{dt^2}$ ?)**

Solução: Sejam  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  duas respostas às entradas  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , onde:

$$y_1(t) = a_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2x_1(t)}{dt^2}, \text{ e } y_2(t) = a_1 \frac{dx_2(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2x_2(t)}{dt^2}.$$

A resposta à entrada  $x(t) = k_1x_1(t) + k_2x_2(t)$  é:

$$y(t) = a_1 \frac{d}{dt} [k_1x_1(t) + k_2x_2(t)] + a_2 \frac{d^2[k_1x_1(t) + k_2x_2(t)]}{dt^2} = k_1a_1 \frac{dx_1(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2x_1(t)}{dt^2} + k_2a_1 \frac{dx_2(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2x_2(t)}{dt^2} = k_1y_1(t) + k_2y_2(t).$$

Assim, a EQ 2.10 é satisfeita, e o sistema é dito linear.

◇

### Exemplo 2.2 (É linear o sistema caracterizado por $y(t) = x^2(t)$ ?)

Solução: Sejam  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  duas respostas às entradas quaisquer  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  onde

$$y_1(t) = x_1^2(t) \text{ e } y_2(t) = x_2^2(t).$$

A resposta à entrada  $x(t) = k_1x_1(t) + k_2x_2(t)$  é:

$$y(t) = (k_1x_1(t) + k_2x_2(t))^2 = k_1^2x_1^2(t) + k_2^2x_2^2(t) + 2k_1k_2x_1(t)x_2(t) \neq k_1x_1^2(t) + k_2x_2^2(t)$$

e o sistema não é linear, pois não satisfaz a EQ 2.10.

◇

Modelos lineares podem ser suficientes em várias aplicações. Porém, há algumas características dinâmicas em que, sem dúvida, os modelos não lineares são mais vantajosos. A FIG. 2.1 ilustra, por exemplo, um sistema que, no trecho T1, apresenta uma constante de tempo dominante com ordem de grandeza muito maior do que a do trecho T2. Certamente, tal característica não seria bem representada por um modelo linear.

- paramétrica  $\times$  não paramétrica

Quando a representação do modelo a ser estimado é estruturada através de um vetor de parâmetros, diz-se que a identificação é paramétrica. No modelo da forma da EQ 2.11, os parâmetros são  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

$$H(s) = \frac{a}{s^2 + bs + c} \quad (2.11)$$

Por outro lado, os métodos que usam gráficos para representar o sistema, e não os parâmetros, são chamados de não paramétricos. O sistema da EQ 2.11 é dito não paramétrico quando caracterizado pela sua resposta ao impulso como na FIG. 2.2.

- modelo multivariável  $\times$  modelo monovariável

Um modelo multivariável é aquele que possui mais de uma entrada ou saída. Já os modelos monovariáveis (*SISO*) representam sistemas através de uma entrada e de

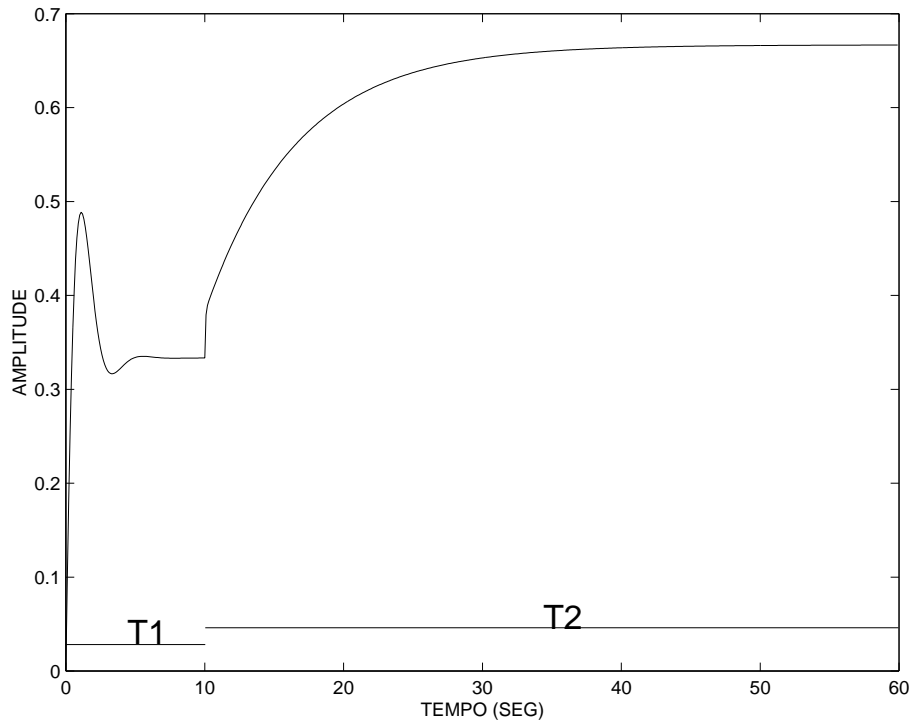


FIG. 2.1: Exemplo de sistema não linear.

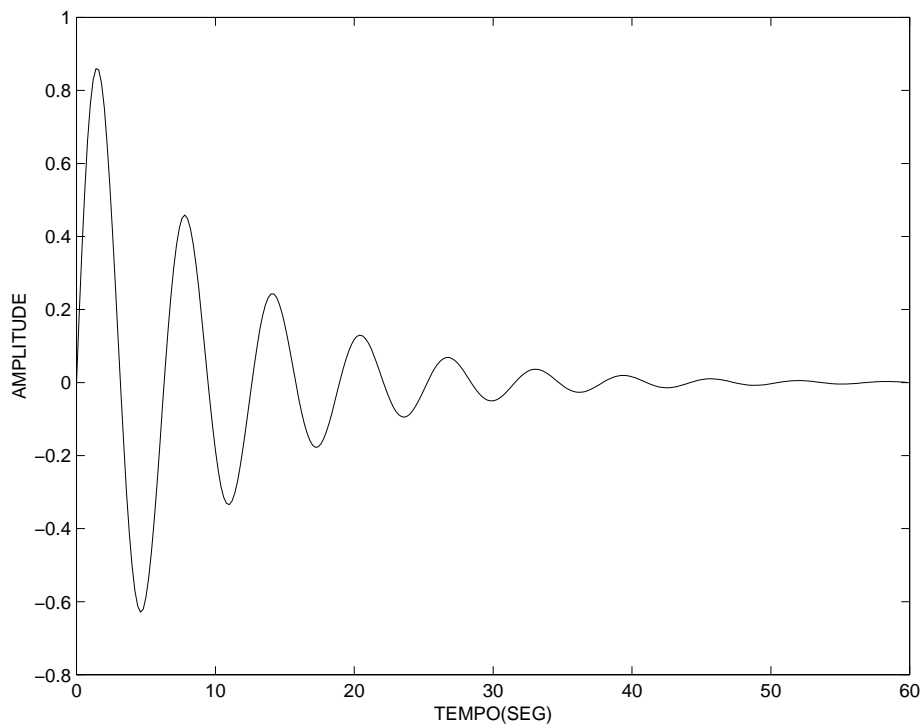


FIG. 2.2: Resposta ao impulso: exemplo de representação não paramétrica.

uma saída, o que não quer dizer que não haja outras entradas ou saídas, mas sim que apenas essas são conhecidas ou estão sendo levadas em consideração.

- modelo autônomo  $\times$  modelo não autônomo

Quando não há dependência direta do tempo ou não se tem sinal de entrada de maneira explícita, os modelos são ditos autônomos.

**Exemplo 2.3 (Modelo autônomo)** O modelo da quantidade  $p$  de pombos em uma praça é dado pela EQ 2.12, onde  $m$  é a quantidade de milho no chão da praça e  $\alpha$  uma constante.

$$p = \alpha m. \quad (2.12)$$

Tal modelo é autônomo. É possível, em alguns casos, converter um modelo autônomo em não autônomo. Nesse exemplo, se estivesse disponível a informação da quantidade de milho no chão ao longo do tempo, o modelo poderia ser representado como não autônomo, conforme a seguir:

$$p = \alpha m(t). \quad (2.13)$$

Um modelo com pelo menos uma entrada é chamado de não autônomo.

◇

- múltiplos testes  $\times$  um teste

A metodologia usada pode exigir múltiplos testes no sistema para identificação do modelo. Por exemplo, quando se excita com sinais senoidais de frequências  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , e se mede a amplitude da saída após atingir o regime estacionário, exigem-se  $n$  testes. Assim como a quantidade de testes é uma possível restrição, a forma da entrada pode vir a ser também uma restrição. Estabelece-se em algumas metodologias uma forma de entrada específica, por exemplo, tipo degrau ou impulso. Em outras, qualquer forma é válida.

- recursiva  $\times$  não recursiva

Por fim, a identificação recursiva de um modelo reduz os problemas numéricos e permite que a mesma seja feita a medida que os dados são coletados. Já na não recursiva, ao contrário, é necessário aguardar que todo o conjunto de dados esteja disponibilizado.

De um modo geral, todas as abordagens de identificação buscam minimizar uma função objetivo. Uma função bastante usada para esse fim é o somatório do quadrado dos erros.

Dessa forma, torna-se interessante enunciar aqui o Método dos Mínimos Quadrados, que minimiza exatamente essa função objetivo.

**Problema 2.1 (Método dos Mínimos Quadrados)** Deseja-se representar um valor observado  $y$ , em função do vetor de  $n$  variáveis independentes  $x$ . Para isto, deve-se determinar um vetor de parâmetros  $\hat{\theta}$ , de modo que:

$$y = x^T \hat{\theta} + \xi, \quad (2.14)$$

onde  $\xi$  é o erro cometido ao se aproximar  $y$  por  $x^T \hat{\theta}$ .

Supondo que existam  $M$  valores observados  $y$  e representando a EQ 2.14 de forma matricial, tem-se:

$$Y = X\hat{\theta} + \underline{\xi} \quad (2.15)$$

sendo  $Y \in \mathbb{R}^{M \times 1}$  o vetor das  $M$  amostras observadas,  $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  o vetor dos  $n$  parâmetros a serem determinados,  $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^{M \times 1}$  o vetor de erros ao se aproximar  $Y$  como  $X\hat{\theta}$  e  $X \in \mathbb{R}^{M \times n}$ .

A resolução de um sistema de  $M$  equações e  $n$  incógnitas é, em princípio, impossível se  $M > n$ . No entanto, ajusta-se  $\hat{\theta}$ , minimizando-se a função  $J_2$ , definida como o somatório do quadrado dos erros:

$$J_2 = \sum_{i=1}^M \underline{\xi}(i)^2 = \underline{\xi}^T \underline{\xi} = \|\underline{\xi}\|_2^2. \quad (2.16)$$

Aplicando a EQ 2.15 na EQ 2.16, tem-se:

$$J_2 = (Y - X\hat{\theta})^T (Y - X\hat{\theta}) = Y^T Y - Y^T X\hat{\theta} - \hat{\theta}^T X^T Y + \hat{\theta}^T X^T X\hat{\theta}. \quad (2.17)$$

Derivando a EQ 2.17 em relação a  $\hat{\theta}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2}{\partial \hat{\theta}} &= -(Y^T X)^T - X^T Y + (X^T X + X^T X)\hat{\theta} \\ &= -X^T Y - X^T Y + 2X^T X\hat{\theta}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Igualando a EQ 2.18 a zero tem-se:

$$\hat{\theta} = [X^T X]^{-1} X^T Y, \quad (2.19)$$

onde  $[X^T X]^{-1} X^T$  é chamada de matriz pseudo-inversa à esquerda.

Para confirmar que o valor de  $\hat{\theta}$  na EQ 2.19 é o mínimo, basta verificar que:

$$\frac{\partial^2 J_2}{\partial \hat{\theta}^2} = 2XX^T > 0. \quad (2.20)$$

Portanto,  $\hat{\theta}$  é o vetor de parâmetros que minimiza o somatório quadrático dos erros.

Vale registrar a existência do estimador de mínimos quadrados ponderados, onde se fornecem pesos diferentes a cada variável de erro. A EQ 2.16 passa a ser escrita como:

$$J_{2P} = \sum_{i=1}^M \underline{\xi}(i) w_i \underline{\xi}(i) = \underline{\xi}^T W \underline{\xi}, \quad (2.21)$$

onde  $W \in \mathbb{R}^{M \times M}$  é uma matriz diagonal cujos elementos são os pesos  $w_i$  e  $J_{2P}$  é a função objetivo dos mínimos quadrados ponderados a ser minimizada.

O estimador  $\hat{\theta}$  passa ser então:

$$\hat{\theta} = [X^T W X]^{-1} X^T W Y, \quad (2.22)$$

onde  $W$  deve ser positiva definida para que a inversa de  $X^T W X$  exista e para que, na EQ 2.21,  $J_{2P}$  seja positivo.

A seguir, quatro métodos de identificação são apresentados, ou seja, de Erro de Predição, de Correlação, de Subespaço e Recursivo.

Nas subseções 2.1.1, 2.1.2 e 2.2.1 desta dissertação, respectivamente método de Erro de Predição, método de Correlação e Modelos ARX,  $y(t)$  e  $u(t)$  são definidos como na bibliografia indicada (LJUNG, 1988), conforme a definição 2.2 a seguir.

**Definição 2.2 (Notação de  $y(t)$  e  $u(t)$ )**  $y(t)$  é amostrado nos instantes  $t = kT$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , onde  $T$  é o tempo de discretização.

O sinal de entrada  $u(t)$  é constante entre amostras, ou seja,

$$u(t) = u_k, \quad kT \leq t < (k+1)T. \quad (2.23)$$

**Definição 2.3 (Família de Modelos  $\mathcal{M}^*$ )** A família de modelos  $\mathcal{M}^*$  é definida como:

$$\mathcal{M}^* = \{\mathcal{M}(\theta) \mid \theta \in D_{\mathcal{M}}\}, \quad (2.24)$$

onde  $\mathcal{M}(\theta)$  são modelos estáveis, parametrizados em  $\theta$ ,  $\theta \in D_{\mathcal{M}} \subset \mathbb{R}^d$ , sendo  $d$  a dimensão de  $\theta$ .

Seja  $Z^N$  o vetor formado pelas  $N$  amostras de entrada e  $N$  amostras de saída disponíveis:

$$Z^N = [y(1), u(1), y(2), u(2), \dots, y(N), u(N)]^T \quad (2.25)$$



Então, o método de identificação paramétrica consiste no problema de se determinar o valor do vetor de parâmetros  $\hat{\theta}_N$  e, dessa forma, o modelo  $\mathcal{M}(\hat{\theta}_N)$ , no conjunto  $\mathcal{M}^*$ , usando a informação contida em  $Z^N$ .

Seja um certo modelo  $\mathcal{M}(\theta_*)$  dado por:

$$\varepsilon(t, \theta_*) = y(t) - \hat{y}(t | \theta_*), \quad (2.26)$$

onde  $\varepsilon(t, \theta_*)$  é a seqüência de predição de erros entre o valor real  $y(t)$  e o valor fornecido pelo modelo  $\hat{y}(t | \theta_*)$ , para um modelo gerado pelo vetor de parâmetros  $\theta_*$ .

Conhecido o conjunto de dados  $Z^N$ , a determinação de  $\hat{\theta}_N$  para minimizar os erros de predição, dá origem a várias abordagens de identificação paramétrica.

**Definição 2.4 (Função de transferência  $G(q)$ )**  $G(q)$  é chamada de função de transferência discreta de um sistema linear.

$$G(q) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)q^{-k}, \quad (2.27)$$

onde  $h(k)$  é a resposta ao impulso e o operador  $q$  é definido como  $qu(t) \triangleq u(t+1)$ .

### 2.1.1 MÉTODO DE ERRO DE PREDIÇÃO

No método de Erro de Predição (LJUNG, 1988), uma certa função, dependente das amostras das entradas e saídas disponíveis e do vetor de parâmetros  $\theta$  do modelo, é minimizada em relação a  $\theta$ . Os passos para estimação são os seguintes:

1º passo: a seqüência de predição de erro  $\varepsilon(t, \theta)$  é filtrada por um filtro estável  $L(q)$ , gerando  $\varepsilon_F(t, \theta)$ :

$$\varepsilon_F(t, \theta) = L(q)\varepsilon(t, \theta) \quad 1 \leq t \leq N \quad (2.28)$$

2º passo: uma norma  $V_N$  a ser minimizada, função de  $\varepsilon(t, \theta)$ , é definida como na EQ 2.29:

$$V_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \ell(\varepsilon(t, \theta)), \quad (2.29)$$

onde  $\ell(\cdot)$  é uma função escalar de  $\varepsilon$ .

3º passo: estimar  $\hat{\theta}_N$  pela minimização da EQ 2.29:

$$\hat{\theta}_N = \hat{\theta}_N(Z^N) = \arg \min_{\theta \in D_{\mathcal{M}}} V_N(\theta, Z^N), \quad (2.30)$$

onde  $\arg$  significa o parâmetro  $\theta$  que minimiza a função  $V_N$ .

### 2.1.2 MÉTODO DE CORRELAÇÃO

Esse método baseia-se na suposição que o erro de predição  $\varepsilon(t, \theta)$  em um modelo dito bom é independente de dados passados (LJUNG, 1988).

O primeiro procedimento desse método consiste em filtrar a seqüência de predição de erro através de um filtro estável  $L(q)$ , da mesma forma como na EQ 2.28. O segundo procedimento é a escolha de uma seqüência de vetores  $\zeta(t, \theta)$  de correlação, conforme a EQ 2.31:

$$\zeta(t, \theta) = \zeta(t, Z^{t-1}, \theta), \quad (2.31)$$

onde  $Z^{t-1}$  é o vetor formado pelas amostras de entrada e de saída disponíveis até o instante  $t - 1$ .

Esses vetores  $\zeta(t, \theta)$  podem ser obtidos, por exemplo, a partir da definição da EQ 2.32:

$$\zeta(t, \theta) \triangleq K_y(q, \theta)y(t) + K_u(q, \theta)u(t), \quad (2.32)$$

onde  $K_y(q, \theta)$  e  $K_u(q, \theta)$  são filtros lineares.

O terceiro procedimento é a determinação de uma função  $\alpha(\xi)$ , normalmente positiva definida. Um exemplo típico é fazer  $\alpha(\xi(t, \theta)) = (\xi(t, \theta))^2$ . Com esses três procedimentos,  $\hat{\theta}_N$  pode ser calculado como na EQ 2.33, usando a EQ 2.34:

$$\{\theta \in D_{\mathcal{M}} \mid f_N(\theta, Z^N) = 0\}, \quad (2.33)$$

onde

$$f_N(\theta, Z^N) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \xi(t, \theta) \alpha(\varepsilon_F(t, \theta)) \quad (2.34)$$

### 2.1.3 MÉTODO DE SUBESPAÇO

Um sistema linear pode ser representado na forma de espaço de estado como:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) + v(k) \end{cases} \quad (2.35)$$

onde  $w$  e  $v$  são ruídos. Sejam

$$Y(k) \triangleq \begin{bmatrix} x(k+1) \\ y(k) \end{bmatrix}, \quad \Theta \triangleq \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

$$\Phi \triangleq \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} e \quad E(k) \triangleq \begin{bmatrix} w(k) \\ v(k) \end{bmatrix}.$$

Substituindo na EQ 2.35:

$$Y(k) = \Theta\Phi(k) + E(k). \quad (2.36)$$

Assim, todos os elementos de  $\Theta$  podem ser estimados pelo método dos mínimos quadrados, embora seja necessário o conhecimento dos estados da planta.

#### 2.1.4 MÉTODO RECURSIVO

Os métodos anteriormente citados levam em conta que os dados de entrada e saída do sistema em estudo foram previamente armazenados para fazer a estimação, enquanto no método recursivo permite-se que os dados sejam processados na seqüência em que aparecem. Como vantagem adicional, o método recursivo reduz os problemas numéricos. Serão apresentados a seguir os cálculos para determinação do estimador de mínimos quadrados recursivo  $\hat{\theta}_k$  (AGUIRRE, 1994), ressaltando-se que o método recursivo não se resume a esse estimador.

Seja  $\psi(k-1)$  o vetor de regressores formado na iteração  $k$  com a informação disponível até a iteração  $k-1$ . A EQ 2.37 é uma extensão da EQ 2.19 para o caso recursivo. Assim, pode-se representar o estimador  $\hat{\theta}_k$ , a partir da EQ 2.37, como:

$$\hat{\theta}_k = \left[ \sum_{i=1}^k \psi(i-1)\psi^T(i-1) \right]^{-1} \left[ \sum_{i=1}^k \psi(i-1)y(i) \right]. \quad (2.37)$$

Sejam  $P_k$  e  $P_k^{-1}$  definidos como nas EQ 2.38 e EQ 2.39:

$$P_k = \left[ \sum_{i=1}^k \psi(i-1)\psi(i-1) \right]^{-1}, \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} P_k^{-1} &= \left[ \sum_{i=1}^{k-1} \psi(i-1)\psi(i-1) \right] + \psi(k-1)\psi^T(k-1) = \\ &= P_{k-1}^{-1} + \psi(k-1)\psi^T(k-1). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Aplicando a EQ 2.38 na EQ 2.37:

$$\hat{\theta}_k = P_k \left[ \sum_{i=1}^k \psi(i-1)y(i) + \psi(k-1)y(k) \right], \quad (2.40)$$

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + K_k \left[ y(k) - \psi^T(k-1)\hat{\theta}_{k-1} \right], \quad (2.41)$$

onde  $K_k = P_k\psi(k-1)$  é chamado de ganho de Kalman.

Usando a propriedade de matrizes na EQ 2.42 e aplicando-se na EQ 2.39, chega-se à EQ 2.43:

$$[A + BCD]^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B[C^{-1} + DA^{-1}B]^{-1}DA^{-1} \quad (2.42)$$

$$P_k = P_{k-1} - \psi(k-1)(\psi^T(k-1)P_{k-1}\psi(k-1))^{-1}\psi(k-1)P_{k-1}. \quad (2.43)$$

Assim, o estimador recursivo de mínimos quadrados é formado pelas EQ 2.44 a EQ 2.46:

$$K_k = \frac{P_{k-1}\psi(k-1)}{\psi^T(k-1)P_{k-1}\psi(k-1) + 1} \quad (2.44)$$

$$\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + K_k [y(k) - \psi^T(k-1)\hat{\theta}_{k-1}] \quad (2.45)$$

$$P_k = P_{k-1} - K_k\psi^T(k-1)P_{k-1}. \quad (2.46)$$

## 2.2 TÓPICOS DE ESPAÇOS, NORMAS E MODELOS

Nesta seção serão vistos alguns tópicos de espaços com normas. Isso porque, o desempenho e a estabilidade, que são os principais objetivos em um sistema de controle, podem ser descritos através de normas convenientemente escolhidas. Pode-se saber, por exemplo, saber a eficiência de um sistema de rastreamento, por meio da norma do erro do sinal a ser rastreado.

Para que uma função seja definida como uma norma  $\|\cdot\|$  deverá atender as seguintes propriedades:

- (i)  $\|f\| \geq 0$ ,
- (ii)  $\|f\| = 0 \iff f = 0$ ,
- (iii)  $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,
- (iv)  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ .

Na teoria de controle, as normas 1, 2 e  $\infty$  são as mais importantes por possuírem significado físico. As EQ 2.47, EQ 2.48 e EQ 2.49 significam, respectivamente, o somatório de recursos, a energia e o limitante superior ou pico do sinal  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad (2.47)$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \quad (2.48)$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|. \quad (2.49)$$

Outra norma muito usada é  $f_{\mathcal{P}}$ , definida na EQ 2.50, conhecida como potência de  $f$  e útil quando a norma 2 não pode ser definida. Isso ocorre quando o sinal, apesar de limitado, não tende a zero. Por não satisfazer o item ii das propriedades de norma,  $f_{\mathcal{P}}$  é na verdade uma seminorma.

$$f_{\mathcal{P}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2T} \int_{-T}^T f^2(t) dt}. \quad (2.50)$$

Pode-se definir as normas 2 e  $\infty$  para funções  $f(s)$  no domínio freqüencial  $s$  como a seguir:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(jw)f(jw)dw}, \quad (2.51)$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{w \in \mathbb{R}} |f(jw)|. \quad (2.52)$$

É interessante observar que o Teorema de Parseval permite o cálculo da norma 2 a partir do domínio temporal ou freqüencial de uma certa função.

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(jw)f(jw)dw} = \|f\|_2. \quad (2.53)$$

O tratamento dos espaços mais importantes em controle, como os espaços de Hardy  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ , por ser extenso e requerer rigor matemático nas definições, foi omitido. Uma boa fonte de consulta é (ZHOU ET ALII, 1996).

### 2.2.1 MODELOS ARX

Os modelos ARX são aqueles com estrutura autoregressiva com entrada externa, conforme a EQ 2.54:

$$\begin{aligned} y(t) &+ a_1y(t-1) + a_2y(t-2) + \dots + a_{n_a}y(t-n_a) = \\ &= b_1u(t-1) + b_2u(t-2) + \dots + b_{n_b}u(t-n_b) + e(t), \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde  $e(t)$  é um ruído branco.

Definem-se  $\theta$ ,  $A(q)$  e  $B(q)$ , respectivamente, como nas EQ 2.55, EQ 2.56 e EQ 2.57:

$$\theta = [a_1 a_2 \cdots a_{n_a} b_1 b_2 \cdots b_{n_b}]^t, \quad (2.55)$$

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a}, \quad (2.56)$$

$$B(q) = 1 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_b}. \quad (2.57)$$

A EQ 2.55 pode ser escrita como:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t) + e(t). \quad (2.58)$$

De outra forma,

$$y(t) = G(q, \theta)u(t) + H(q, \theta)e(t), \quad (2.59)$$

onde  $G(q, \theta) = \frac{B(q)}{A(q)}$  e  $H(q, \theta) = \frac{1}{A(q)}$ .

A equação EQ 2.59 é a estrutura do modelo ARX. Para  $n_a = 0$  chega-se ao modelo com resposta a um impulso finito (FIR) e para  $n_b = 0$  chega-se à estrutura do modelo autoregressivo (AR).

## 2.2.2 MODELOS FIR

Os modelos FIR (LJUNG, 1988) são estruturas com denominador constante, onde  $A(q) = 1$ . A estrutura dos modelos FIR é da forma na EQ 2.60:

$$G(q, \theta) = \sum_{k=1}^n h_k q^{-k}. \quad (2.60)$$

Pode-se mostrar que este tipo de modelo é insensível a ruídos, porém é inadequado para representar sistemas com pólos muito próximos do eixo imaginário, por exigir, na prática, um número elevado de termos.

### 2.2.3 MODELOS DE LAGUERRE

Usando bases de funções mais apropriadas que o operador  $q^{-1}$ , pode-se reduzir bastante o número de parâmetros necessários para obter-se uma estimativa útil do sistema a ser modelado.

$$G(q, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k L_k(q, p) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \frac{\sqrt{1-p^2}}{q-p} \left[ \frac{1-pq}{q-p} \right]^{k-1}, \quad p \in \mathbb{R}, \quad (2.61)$$

onde  $L_k(q, p) = \frac{\sqrt{1-p^2}}{q-p} \left[ \frac{1-pq}{q-p} \right]^{k-1}$ .

Percebe-se na EQ 2.61 uma semelhança com a representação FIR. No entanto, para os modelos de Laguerre, o número necessário de funções  $L_k(q, p)$  que melhor represente um conjunto de amostras, segundo uma determinada função objetivo, é normalmente muito menor que o dos modelos FIR.

A FIG. 2.3 representa o modelo de Laguerre. Em  $s$ , a função de Laguerre  $L_k(s, p)$  é formada por um filtro passa baixa  $\frac{\sqrt{2p}}{s+p}$  em série com  $k-1$  filtros passa alta de 1ª ordem  $\frac{s-p}{s+p}$ , onde  $k = 1, 2, \dots, n$ .

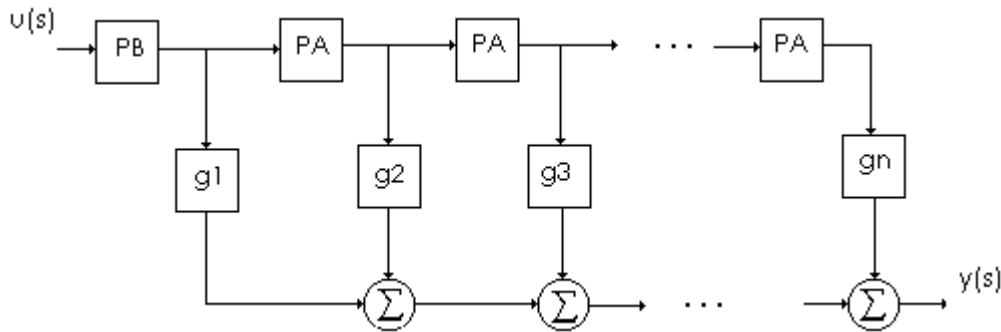


FIG. 2.3: Modelo de Laguerre.

Os modelos obtidos pela expansão das funções de Laguerre contínuas têm a forma da EQ 2.62:

$$G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k L_k(s, p), \quad (2.62)$$

onde  $L_k(s, p) = \frac{\sqrt{2p}(s-p)^{k-1}}{(s+p)^k}$ .

No domínio temporal, as funções  $f_i(t)$  de Laguerre são descritas pela EQ 2.63:

$$f_i(t) = \frac{\sqrt{2p}e^{pt}}{(i-1)!} \frac{\partial^{i-1} (t^{i-1} e^{-2pt})}{\partial t^{i-1}}. \quad (2.63)$$

No apêndice 6.3, estão as oito primeiras funções de Laguerre, desenvolvidas a partir da EQ 2.63, assim como as integrais dessas funções, usadas no método de identificação proposto no capítulo 3.

## 2.2.4 MODELOS DE KAUTZ

Os modelos de Kautz são parecidos com os modelos de Laguerre, no sentido de possuírem pólos múltiplos. São mais adequados para modelar sistemas subamortecidos, pois possuem pólos múltiplos complexos conjugados ao invés de somente pólos múltiplos reais, como no modelo de Laguerre. A dificuldade nessa modelagem, assim como em Laguerre, é justamente determinar qual o melhor pólo, ou seja, qual o valor de pólo que deve ser escolhido para que um menor número de funções seja necessário para aproximar o modelo ao sistema real, segundo uma determinada função objetivo. O aumento do número de funções, e conseqüentemente do número de variáveis do vetor de variáveis de projeto, torna o modelo mais sensível às variações dessas variáveis, o que é indesejável.

As funções de Kautz são definidas por:

$$\Psi_k(s, b, c) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2bs}}{s^2+bs+c} \left[ \frac{s^2-bs+c}{s^2+bs+c} \right]^{\frac{k-1}{2}}, & \text{k ímpar} \\ \frac{\sqrt{2bc}}{s^2+bs+c} \left[ \frac{s^2-bs+c}{s^2+bs+c} \right]^{\frac{k-2}{2}}, & \text{k par,} \end{cases}$$

com  $b>0$ ,  $c>0$ ,  $k=1,2,\dots$ .

De modo análogo à EQ 2.62, o modelo obtido pela expansão das funções de Kautz tem a forma da EQ 2.64:

$$G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \Psi_k(s, b, c). \quad (2.64)$$

As funções de Kautz discretas no tempo são dadas por:

$$\Psi_k(z, b, c) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-c^2}(z-b)}{z^2+b(c-1)z-c} \left[ \frac{-cz^2-b(c-1)z+1}{z^2+b(c-1)z-c} \right]^{\frac{k-1}{2}}, & \text{k ímpar} \\ \frac{\sqrt{(1-c^2)(1-b^2)}(z-b)}{z^2+b(c-1)z-c} \left[ \frac{-cz^2-b(c-1)z+1}{z^2+b(c-1)z-c} \right]^{\frac{k-1}{2}}, & \text{k par} \end{cases},$$

com  $-1<b<1, -1<c<1$  e  $k=1,2,\dots$ .

## 2.3 TÓPICOS DE OTIMIZAÇÃO

Nesta seção, usou-se como referência ( BAZARRA ET ALII,1993, ADES,1999 ). A identificação tratada nesta dissertação consiste, basicamente, na determinação dos melhores parâmetros  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ , segundo a minimização de uma função objetivo, a fim de obter a função de transferência identificada. Essa função a ser identificada é da forma:



$$F(s) = \frac{a_1 s + k_1}{s^2 + b_1^2 s + c_1^2} + \frac{a_2 s + k_2}{s^2 + b_2^2 s + c_2^2} + \dots + \overbrace{\frac{a_n s + k_n}{s^2 + b_n^2 s + c_n^2}}^{\text{parcela genérica}} + \overbrace{\frac{k_{\text{odd}}}{s + c_{\text{odd}}^2}}^{\text{parcela ímpar}} + K, \quad (2.65)$$

onde  $\Theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n] = [k_1, a_1, b_1, c_1, k_2, a_2, b_2, c_2, \dots, k_n, a_n, b_n, c_n, k_{\text{odd}}, c_{\text{odd}}]$  é o vetor de variáveis de projeto.

Para determinação do vetor  $\Theta$ , serão utilizados algoritmos de otimização.

De maneira geral, um sistema de otimização funciona conforme a FIG. 2.4 (ADES, 1994). O programa principal e o simulador são rotinas específicas do problema a ser resolvido, enquanto o método de otimização e a rotina de busca unidimensional compõem as rotinas de otimização. O programa principal fornece o ponto inicial do vetor das variáveis de projeto e a rotina de otimização informa ao simulador a direção em que deve ser efetuada a busca do vetor de parâmetros que minimiza a função objetivo. O método de otimização recebe do simulador as informações dos valores da função objetivo e do gradiente no ponto pesquisado. A partir daí a busca unidimensional determina o mínimo na direção do gradiente.

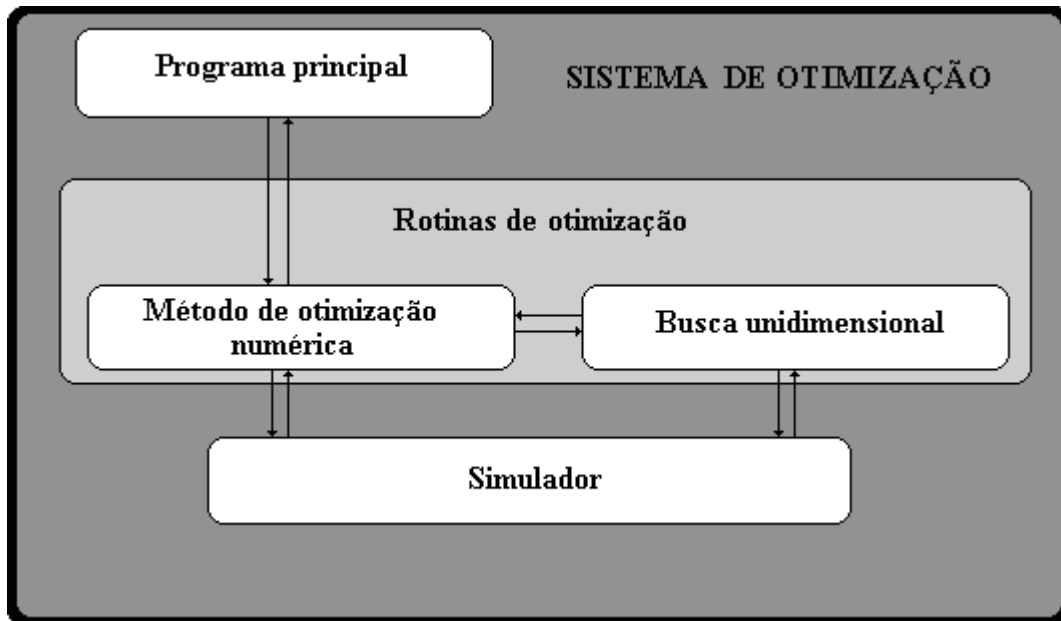


FIG. 2.4: Estrutura de um sistema de otimização.

A seguir, serão descritos os métodos de otimização numérica e de busca unidimensional empregados no método proposto nesse trabalho.

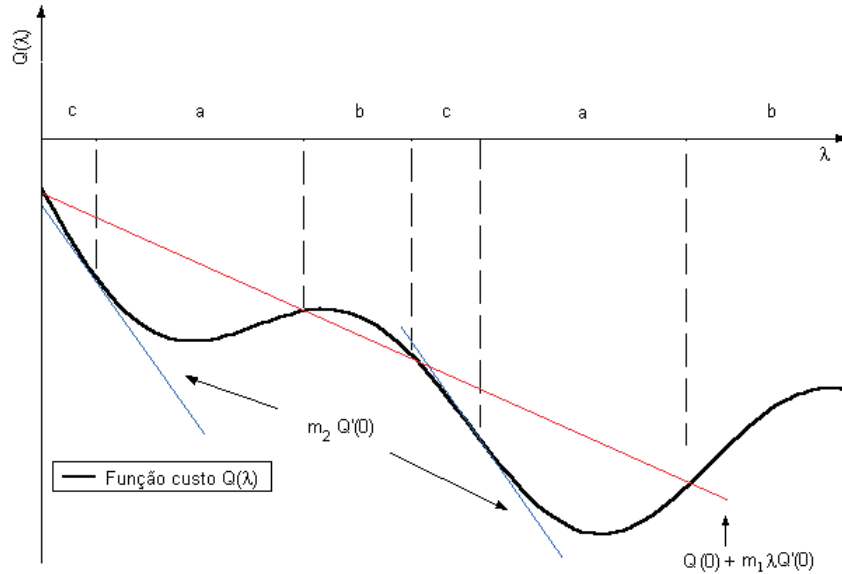


FIG. 2.5: Ilustração da busca unidimensional Wolfe.

### 2.3.1 BUSCA UNIDIMENSIONAL POR MEIO DO MÉTODO DE WOLFE

O projeto de um bom algoritmo de busca unidimensional consiste no compromisso da rápida determinação de um passo aceitável  $\lambda$  *versus* a diminuição sensível do valor da função objetivo  $Q$ . Por definição,  $Q(\lambda) \triangleq F(\underline{X}q + \lambda\underline{d}_q)$ , onde  $\underline{d}_q$  é a direção utilizada na busca com  $Q'(0) < 0$ . Nesse método, escolhem-se  $m_1$  e  $m_2$  tais que  $0 < m_1 < m_2 < 1$ . Verificam-se três casos:

1.  $Q(\lambda) \leq Q(0) + m_1\lambda Q'(0)$  e  $Q(\lambda) \geq m_2 Q'(0) \Rightarrow \lambda$  é um passo aceitável.
2.  $Q(\lambda) > Q(0) + m_1\lambda Q'(0) \Rightarrow \lambda$  não é um passo aceitável, mas um limitante superior do passo aceitável pode ser encontrado,  $\lambda_{sup} \leftarrow \lambda$ .
3.  $Q(\lambda) \leq Q(0) + m_1\lambda Q'(0)$  e  $Q(\lambda) \geq m_2 Q'(0) \Rightarrow \lambda$  não é um passo aceitável, mas um limitante inferior do passo aceitável pode ser encontrado,  $\lambda_{inf} \leftarrow \lambda$ .

A FIG. 2.5 ilustra as regiões em que se situam os três casos mencionados, encontradas durante a resolução do problema de busca unidimensional. Por meio dos três casos citados, determina-se ou um passo aceitável  $\lambda$  (regiões a na FIG. 2.5) ou um limitante superior (regiões b) ou um limitante inferior (regiões c) do mesmo. Agindo-se iterativamente, reduz-se a região de busca de  $\lambda$  até que um passo aceitável seja encontrado.

### 2.3.2 O MÉTODO DE NEWTON E OS MÉTODOS QUASE-NEWTON

É a partir da expansão da função objetivo a ser minimizada em série de Taylor até o termo quadrático que se obtém a equação do método de otimização de Newton:

$$F(\underline{X}) \approx F(\underline{X}_q) + \nabla F_q^t (\underline{X} - \underline{X}_q) + \frac{1}{2} (\underline{X} - \underline{X}_q)^t Q (\underline{X} - \underline{X}_q) \triangleq f_q(\underline{X}), \quad (2.66)$$

onde  $f_q(\underline{X})$  é uma aproximação quadrática de  $F(\underline{X})$  para o cálculo do mínimo,  $Q$  a matriz Hessiana conforme a EQ 2.67 e a notação  $\nabla F_q \triangleq \nabla F(\underline{X})|_{\underline{X}=\underline{X}_q}$ .

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F(\underline{X})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F(\underline{X})}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 F(\underline{X})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F(\underline{X})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F(\underline{X})}{\partial x_2 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 F(\underline{X})}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F(\underline{X})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial F(\underline{X})}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 F(\underline{X})}{\partial^2 x_n} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Uma condição necessária para obtenção do mínimo de  $f_q(\underline{X})$  é que  $\frac{\partial f_q(\underline{X})}{\partial x_i} = 0$ . Portanto,  $\nabla f_q(\underline{X}) = \nabla F_q + Q(\underline{X} - \underline{X}_q) = 0$ , o que poderá ser reescrito como:

$$\begin{aligned} Q\underline{X} &= Q\underline{X}_q - \nabla F_q \\ \underline{X} &= \underline{X}_q - Q^{-1} \nabla F(\underline{X}_q) \\ \underline{X}_{q+1} &= \underline{X}_q - Q^{-1} \nabla F(\underline{X}_q). \end{aligned}$$

Em termos de otimização:

$$\underline{X}_{q+1} = \underline{X}_q - \alpha Q^{-1} \nabla F(\underline{X}_q). \quad (2.68)$$

A EQ 2.68 é a equação do método de Newton, sendo a direção de Newton  $d_q$ ,

$$d_q = -Q^{-1} \nabla F(\underline{X}_q) \quad (2.69)$$

definida e uma direção de descida, isto é,  $d_q^t \nabla F(\underline{X}_q) < 0$ .

Se o problema for quadrático, o método converge para o mínimo com uma iteração. No entanto, o cálculo da matriz Hessiana  $Q$  e a sua inversão tornam o método impraticável para problemas com um número grande de variáveis de projeto. Por isso, buscam-se os chamados métodos Quase-Newton, que serão discutidos a seguir.

### 2.3.3 OS MÉTODOS QUASE-NEWTON (MQN)

As direções pesquisadas são calculadas por equações da forma:

$$\underline{X}_{q+1} = \underline{X}_q + \lambda_q d_q \quad (2.70)$$

$$\underline{d}_q = -D_q \nabla F(\underline{X}_q), \quad (2.71)$$

onde  $D_q$  é uma matriz positiva definida, podendo ser ajustável de uma iteração para a próxima, de maneira que  $\underline{d}_q$  tenda a se aproximar da direção de Newton. Uma das principais idéias dos MQN é que duas iterações sucessivas,  $\underline{X}_q$  e  $\underline{X}_{q+1}$ , acompanhadas de seus respectivos vetores gradientes, permitam obter a informação de curvatura por meio de uma relação aproximada, ou seja:

$$\underline{q}_q \approx \nabla^2 F(\underline{X}_{q+1}) p_q, \quad (2.72)$$

onde  $q_q = \nabla F(\underline{X}_{q+1}) - \nabla F(\underline{X}_q)$  e  $p_q = \underline{X}_{q+1} - \underline{X}_q$ .

Em particular, dados  $n$  incrementos linearmente independentes de iterações  $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$  junto com seus incrementos de gradiente  $q_0, q_1, \dots, q_{n-1}$ , pode-se obter uma aproximação da matriz Hessiana dada por:

$$\nabla^2 F(X_n) \approx [q_0, q_1, \dots, q_{n-1}] [p_0, p_1, \dots, p_{n-1}]^{-1} \quad (2.73)$$

e uma aproximação de sua inversa por:

$$\nabla^2 F(X_n)^{-1} \approx [p_0, p_1, \dots, p_{n-1}] [q_0, q_1, \dots, q_{n-1}]^{-1}. \quad (2.74)$$

Na classe mais popular de MQN, a matriz  $D_{q+1}$  é obtida a partir de  $D_q$  e dos vetores  $p_q$  e  $q_q$  por intermédio da equação:

$$D_{q+1} = D_q + \frac{p_q p_q^t}{p_q^t q_q} - \frac{D_q q_q q_q^t D_q}{q_q^t D_q q_q} + \epsilon_q \tau_q v_q v_q^t. \quad (2.75)$$

onde

$$\tau_q = q_q^t D_q q_q, \quad (2.76)$$

$$v_q = \frac{p_q}{p_q^t q_q} - \frac{D_q q_q}{\tau_q}, \quad (2.77)$$

$$0 \leq \epsilon_q \leq 1 \quad (2.78)$$

e  $D_o$ , por ser a primeira  $D_q$ , é uma matriz arbitrária positiva definida. Geralmente, utiliza-se  $D_o = I$ .

Os escalares  $\epsilon_q$  parametrizam o método, isto é, se  $\epsilon_q = 0, \forall q$ , tem-se o método "Davidon-Fletcher-Powell (DFP)", que historicamente foi o primeiro MQN. Se  $\epsilon_q = 1, \forall q$ , tem-se o método "Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS)", melhor método MQN de uso geral conhecido atualmente (BERTSEKAS, 1995).

Uma dificuldade de se utilizar um método de ordem 1, como o BFGS, está em determinar o gradiente da função objetivo.

O Lema 2.1 (BERTSEKAS, 1995), a seguir, mostra que, sob leves considerações, as matrizes  $D_q$  geradas na EQ 2.75 são positivas definidas, garantindo que  $d_q$  seja direção de descida.

**Lema 2.1:** ( $D_q$  são positivas definidas) Se  $D_q$  é uma matriz positiva definida e  $\lambda_q$  é o passo escolhido de modo que  $\underline{X}_{q+1}$  satisfaça:

$$\nabla F(\underline{X}_q)^t \underline{d}_q < \nabla F(\underline{X}_{q+1})^t \underline{d}_q, \quad (2.79)$$

então  $D_{q+1}$  calculada por EQ 2.75 é uma matriz positiva definida.

Demonstração: Ver em (BERTSEKAS, 1995)

□

### 2.3.4 FUNÇÃO OBJETIVO

Na metodologia proposta, o melhor modelo linear será determinado pela minimização da função objetivo  $J_\pi(\Theta)$ , ponderação da função  $J_2(\Theta)$  baseada na norma 2 e da função  $J_\infty(\Theta)$  baseada na norma infinito. A parcela da função  $J_2(\Theta)$  busca minimizar o erro médio quadrático, enquanto a parcela  $J_\infty(\Theta)$  visa minimizar o maior erro absoluto. Embora num contexto distinto, as funções  $J_2(\Theta)$  e  $J_\infty(\Theta)$  são equivalentes, respectivamente, à norma  $\mathcal{H}_2$  e à norma  $\mathcal{H}_\infty$ , empregadas no Problemas  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ . A FIG. 2.6 ilustra os dois tipos de erro que se procura minimizar. Enquanto no erro tipo  $J_\infty$  o modelo acompanha todos os dados, dentro de uma faixa de proximidade (em pontilhado na figura), no erro tipo  $J_2$  o modelo aproxima-se mais, dos dados em média, do que no erro tipo  $J_\infty$ , desconsiderando, porém, alguns dados que destoam do conjunto.

### 2.3.5 FUNÇÕES PENALIDADE

Essa subseção tem como referência (BAZARRA ET ALII, 1993). A utilização de funções penalidade tem como objetivo principal transformar um problema de otimização com restrições num novo problema de otimização, equivalente, sem restrições ou numa seqüência de problemas sem restrições. Para exemplificar a utilidade das funções penalidade, considere o seguinte problema:

**Problema 2.2 (Problema com restrição)** Minimizar a função  $f(x)$  sujeita à restrição  $g(x) \leq 0$ , isto é:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a} \quad & g(x) \leq 0. \end{aligned}$$

FIG. 2.6: Exemplo de modelagem. (a) Segundo a norma  $J_\infty$ .(b) Segundo a norma  $J_2$ .

Pode-se transformar o problema 2.2 em um novo problema, equivalente e sem restrições, na forma:

$$\min (f(x) + \mu[\max\{0, g(x)\}]^2),$$

onde  $\mu$  é um escalar.

A restrição é incluída na função objetivo de maneira a penalizar qualquer violação da restrição, o que nesse exemplo ocorre quando  $g(x) > 0$ . De maneira geral, uma função penalidade  $\alpha(x)$  é definida por:

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^m \phi[g_i(x)] + \sum_{j=1}^l \psi[h_j(x)], \quad (2.80)$$

onde  $\phi$  e  $\psi$  são funções contínuas satisfazendo:

$$\begin{cases} \phi(y) = 0 & , \text{ se } y \leq 0 \quad e \quad \phi(y) > 0 & , \text{ se } y > 0 \\ \psi(y) = 0 & , \text{ se } y = 0 \quad e \quad \psi(y) > 0 & , \text{ se } y \neq 0 \end{cases} \quad (2.81)$$

e  $g_i(x)$  e  $h_j(x)$  são restrições tais que  $g_i(x) \leq 0$  e  $h_j(x) = 0$ . As formas típicas de  $\phi$  e  $\psi$  são:

$$\begin{aligned} \phi(y) &= [\max\{0, y\}]^p \\ \psi(y) &= |y|^p, \end{aligned}$$

onde  $p$  é um número inteiro positivo. A função penalidade é usualmente da forma:

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^m [\max\{0, g_i(x)\}]^p + \sum_{j=1}^l |h_j(x)|^p \quad (2.82)$$

e  $f(x) + \mu\alpha(x)$  é chamada de função auxiliar.

### 2.3.6 CONVEXIDADE

**Definição 2.6 (Convexidade)** Seja  $M$  um subespaço de  $\mathbb{R}^n$ . Diz-se que  $M$  é convexo se:

$$\forall x_1, x_2 \in M \text{ e } \forall \lambda \in [0,1], \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in M.$$

**Definição 2.7 (Função convexa)** Seja  $M$  o subespaço de  $\mathbb{R}^n$ . Diz-se que  $f : M \mapsto \mathbb{R}$  é convexa se:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2), \forall x_1, x_2 \in M, \forall \lambda \in [0,1].$$

**Proposição 2.1 (Mínimo global)** Se  $M \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto convexo e  $f : M \mapsto \mathbb{R}$  é uma função convexa, então o mínimo local de  $f$  é também um mínimo global.

Demonstração: suponha, por absurdo, que  $x_1$  seja um mínimo de  $f$ , mas não um mínimo global. Então existe algum  $x_2 \neq x_1$  tal que  $f(x_2) < f(x_1)$ . Usando a desigualdade da definição 2.7, conclui-se que  $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < f(x_1)$  para todo  $\lambda \in [0,1)$ . Isso contradiz a hipótese de que  $x_1$  seja um mínimo local. □

**Proposição 2.2 ( $J_2$  é convexa)** A função objetivo  $J_2$ , definida na EQ 2.83 é convexa.

$$J_2(\Theta) \triangleq \| \underline{y} - \hat{\underline{y}} \|^2, \quad (2.83)$$

onde  $\underline{y}$  é um vetor cujas coordenadas são funções do vetor de variáveis de projeto  $\Theta$ , enquanto  $\hat{\underline{y}}$  é um vetor de coordenadas constantes.

Demonstração: o que se quer demonstrar é que a EQ 2.84 é válida.

$$J_2(\lambda \underline{\Theta}_1 + (1-\lambda)\underline{\Theta}_2) \leq \lambda J_2(\underline{\Theta}_1) + (1-\lambda)J_2(\underline{\Theta}_2), \quad (2.84)$$

onde  $0 \leq \lambda \leq 1$ , e  $\underline{\Theta}_1, \underline{\Theta}_2$  são vetores de variáveis de projeto, com  $\underline{\Theta}_1 \neq \underline{\Theta}_2$  definidos como na EQ 2.85:

$$\underline{\Theta}_1 \triangleq \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \quad \underline{\Theta}_2 \triangleq \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix}. \quad (2.85)$$

Com  $\underline{y} = \mathcal{L}^{-1}[G(s)U(s)]$ , onde  $G(s) = \sum_{k=1}^n \alpha_k L_k(s)$  e definindo  $\hat{\underline{y}} = C$  por facilidade de representação. Desenvolvendo o lado esquerdo da EQ 2.84:

$$\begin{aligned} J_2(\lambda \underline{\Theta}_1 + (1-\lambda)\underline{\Theta}_2) &= \\ &= \left\| \mathcal{L}^{-1} [(\lambda\alpha_{11} + (1-\lambda)\alpha_{12})L_1(s) + (\lambda\alpha_{21} + (1-\lambda)\alpha_{22})L_2(s) + \dots + \right. \\ &+ \left. (\lambda\alpha_{n1} + (1-\lambda)\alpha_{n2})L_n(s) + K] U(s) \right\|_2^2 - \|\hat{\underline{y}}\|_2^2 = \\ &= \left\| \underbrace{\lambda(\alpha_{11}\mathcal{L}^{-1}[L_1(s)U(s)] + \alpha_{21}\mathcal{L}^{-1}[L_2(s)U(s)] + \dots + \alpha_{n1}\mathcal{L}^{-1}[L_n(s)U(s)])}_{A} + \right. \\ &+ \left. (1-\lambda)(\alpha_{12}\mathcal{L}^{-1}[L_1(s)U(s)] + \alpha_{22}\mathcal{L}^{-1}[L_2(s)U(s)] + \dots + \alpha_{n2}\mathcal{L}^{-1}[L_n(s)U(s)])_{B} + \right. \\ &- \left. \lambda C - (1-\lambda)C \right\|_2^2 = \\ &= \left\| \lambda(A - C) + (1-\lambda)(B - C) \right\|_2^2 \end{aligned} \quad (2.86)$$

Desenvolvendo agora o lado direito de EQ 2.84:

$$\begin{aligned} \lambda J_2(\underline{\Theta}_1) + (1-\lambda)J_2(\underline{\Theta}_2) &= \\ \lambda \left\| \underbrace{\alpha_{11}\mathcal{L}^{-1}[L_1(s)U(s)] + \alpha_{21}\mathcal{L}^{-1}[L_2(s)U(s)] + \dots + \alpha_{n1}\mathcal{L}^{-1}[L_n(s)U(s)]}_{A} - C \right\|_2^2 + \\ + (1-\lambda) \left\| \underbrace{\alpha_{12}\mathcal{L}^{-1}[L_1(s)U(s)] + \alpha_{22}\mathcal{L}^{-1}[L_2(s)U(s)] + \dots + \alpha_{n2}\mathcal{L}^{-1}[L_n(s)U(s)]}_{B} - C \right\|_2^2 &= \\ = \lambda \left\| A - C \right\|_2^2 + (1-\lambda) \left\| B - C \right\|_2^2. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Subtraindo a EQ 2.84 da EQ 2.87:

$$\begin{aligned} &\lambda \left\| A - C \right\|_2^2 - \lambda^2 \left\| A - C \right\|_2^2 + (1-\lambda) \left\| B - C \right\|_2^2 - (1-\lambda)^2 \left\| B - C \right\|_2^2 + \\ &- 2\lambda(1-\lambda)(A - C)^T (B - C) = \\ &= \lambda(1-\lambda) \left\| A - C - (A - B) \right\|_2^2 = \lambda(1-\lambda) \left\| A - B \right\|_2^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (2.88)$$

□

**Proposição 2.3** ( $J_\infty$  é convexa) A função objetivo  $J_\infty$ , definida na EQ 2.49, é convexa.



Demonstração: Deseja-se mostrar que a EQ 2.89 é válida.

$$J_\infty(\lambda\underline{\Theta}_1 + (1 - \lambda)\underline{\Theta}_2) \leq \lambda J_\infty(\underline{\Theta}_1) + (1 - \lambda)J_\infty(\underline{\Theta}_2), \quad (2.89)$$

onde  $0 \leq \lambda \leq 1$ , e  $\underline{\Theta}_1$  e  $\underline{\Theta}_2$  são vetores de variáveis de projeto, com  $\underline{\Theta}_1 \neq \underline{\Theta}_2$  definidos na EQ 2.85.

$$\begin{aligned} J_\infty(\lambda\underline{\Theta}_1 + (1 - \lambda)\underline{\Theta}_2) &= \|\lambda\underline{\Theta}_1 + (1 - \lambda)\underline{\Theta}_2\|_\infty \leq \|\lambda\underline{\Theta}_1\|_\infty + \|(1 - \lambda)\underline{\Theta}_2\|_\infty = \\ &= \lambda\|\underline{\Theta}_1\|_\infty + (1 - \lambda)\|\underline{\Theta}_2\|_\infty = \\ &= \lambda J_\infty(\underline{\Theta}_1) + (1 - \lambda)J_\infty(\underline{\Theta}_2). \end{aligned} \quad (2.90)$$

O resultado abrange todas as normas, inclusive a norma infinito, já que para a demonstração não foram utilizadas propriedades específicas da norma infinito. No entanto, usou-se o fato da variável de projeto ser linear. Assim, foi demonstrada a convexidade para as normas com variáveis de projeto com dependência linear.

□

Na metodologia proposta no capítulo 3, a função objetivo escolhida possui variáveis de projeto no seu denominador, da mesma forma que a função  $\frac{\theta_1 + 2\theta_2}{3\theta_3^2 + 5\theta_4}$  no exemplo da EQ 2.91, a seguir. Pode-se demonstrar que essa função não é convexa em relação a  $\theta_3$  e  $\theta_4$ .

$$J(\Theta) = \left\| \frac{\theta_1 + 2\theta_2}{3\theta_3^2 + 5\theta_4} \right\|, \quad (2.91)$$

onde  $\Theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4]$  é o vetor de variáveis de projeto.

### 3 A METODOLOGIA DE IDENTIFICAÇÃO

A metodologia de identificação apresentada nesse capítulo aplica-se a sistemas estáveis e SISO. Caso o sistema não seja estável, algum artifício de controle deve ser utilizado antes que o mesmo possa ser identificado com sucesso pelo método. Para sistemas MIMO, é possível a extensão do método, mas às custas de um aumento do processamento computacional.

A FIG.3.1 é uma visão geral do método de identificação proposto. Suas quatro fases estão comentadas a seguir:

#### 1. Coleta do conjunto de dados

Para que seja coletada a resposta do sistema, uma entrada conhecida deve ser aplicada. O degrau foi escolhido por ser uma entrada padrão na teoria de controle. Arbitra-se a frequência máxima de interesse no sistema a ser identificado, além do tempo inicial e do tempo final da coleta dos dados. O tempo final deve ser grande o suficiente para que o sistema tenha atingido a estabilidade assintótica. Escolhe-se a frequência de amostragem para obter a resposta do sistema com uma frequência pelo menos duas vezes maior do que a máxima frequência de interesse, de acordo com a taxa de Nyquist. A saída do sistema é então amostrada por meio de placa de aquisição de dados (apêndice 7.2) ou de osciloscópio digital com capacidade de conexão a um computador. Ainda nessa fase, é feita uma filtragem por intermédio de um janelamento de médias móveis com tamanho 9.

Caso exista um atraso puro de tempo na saída, esse é retirado e o conjunto de saída sem o atraso é identificado. Uma função de Padé de ordem adequada aproxima o atraso puro de tempo e, associada ao modelo do sistema sem atraso, representa o sistema. É verdade, porém, que um atraso de tempo puro para ser bem representado necessita de modelos de ordem elevada.

#### 2. Classe de modelos

Nessa fase, determinam-se a maneira como o modelo será gerado e sua ordem. No método proposto, os candidatos a modelos  $F(s)$  são lineares e têm a forma da EQ 3.1:

$$F(s) = \frac{a_1s + k_1}{s^2 + b_1^2s + c_1^2} + \dots + \frac{a_i s + k_i}{s^2 + b_i^2s + c_i^2} + \dots + \frac{a_n s + k_n}{s^2 + b_n^2s + c_n^2} + K, \quad (3.1)$$

onde o vetor de variáveis de projeto considerado é  $\Theta = [k_1, a_1, b_1, c_1, k_2, a_2, b_2, c_2, \dots, k_n, a_n, b_n, c_n]$ .

### 3. Escolha do melhor modelo na classe de modelos

O melhor modelo é aquele que minimiza a função objetivo. Essa, por sua vez, é definida como sendo  $J_2$  na EQ 3.9,  $J_\infty$  na EQ 3.10 ou uma ponderação de ambas. Arbitra-se um ponto inicial do espaço de variáveis de projeto, sabendo que a sua escolha adequada agiliza o processo de construção do modelo.

Aplica-se o método de otimização de ordem 1 BFGS com vetor de variáveis de projeto  $\Theta = [k_1, a_1, b_1, c_1, k_2, a_2, b_2, c_2, \dots, k_n, a_n, b_n, c_n]$ , função objetivo escolhida, um ponto inicial e o gradiente descrito na seção 3.2.

### 4. Validação

Por último, é preciso conhecer a qualidade do modelo calculado, isto é, o quanto ele é válido na vizinhança do ponto de operação analisado. Isso é extremamente importante, quando da utilização do mesmo por técnicas de controle robusto, já que essa informação é necessária para se construir a classe de perturbações a que o modelo deverá ser submetido. O modelo será considerado válido se mantiver as características principais do sistema real para a aplicação que é destinado. Na prática, o modelo para ser considerado válido é submetido a uma entrada diferente da utilizada na identificação. A saída desse modelo é comparada com a saída do sistema real. Caso as saídas sejam próximas, o modelo é considerado válido.

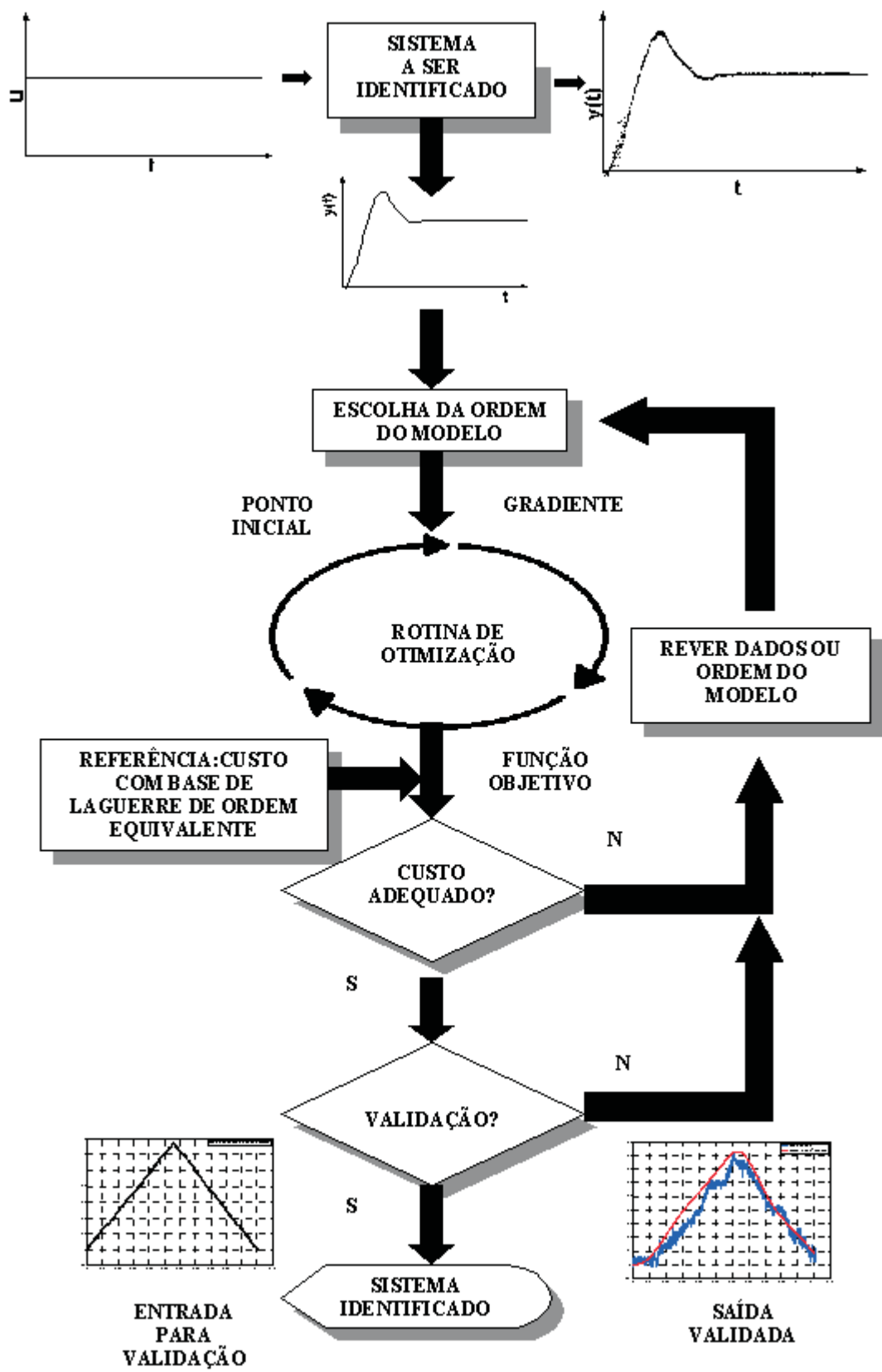


FIG. 3.1: Visão geral da metodologia de identificação proposta.

### 3.1 FORMULAÇÃO TEÓRICA

A metodologia de identificação aqui exposta é paramétrica, estocástica e de natureza temporal. É baseada em um conjunto gerador otimizado (ADES, 1999) para a obtenção de modelos lineares do sistema a ser identificado. Dessa maneira, a identificação recai num problema de otimização, cuja função objetivo a ser minimizada pondera o erro quadrático ( $J_2$ ) e o maior erro absoluto ( $J_\infty$ ) entre as respostas fornecidas por uma entrada tipo degrau para o sistema real e para o modelo.

É sabido que as funções minimizadas em métodos de identificação paramétricos, como o de Predição de Erros ou o de Correlação, não podem ser resolvidas, analiticamente, de maneira geral. A abordagem proposta na dissertação é a de uma metodologia de identificação que utiliza algoritmos de otimização de ordem 1 para obtenção de modelos lineares. A metodologia proposta recai num problema de otimização não convexo onde as variáveis de projeto estão relacionadas aos pólos e zeros do modelo.

Algumas metodologias de identificação necessitam parametrizar uma classe de modelos, o que pode ser feito com:

$$F(s) = \sum_{i=1}^n a_i V_i(s), \quad (3.2)$$

onde  $V_i(s)$  são ditos vetores e  $a_i$  os seus coeficientes escalares a serem ajustados. Em ( MAKILA,1990, FU & DUMONT,1993, ELSHAFEI ET ALII,1994 ), utiliza-se a base de Laguerre, isto é, os  $V_i(s)$  são as funções de Laguerre.

A base de Laguerre é formada por  $\{L_1(s, p), L_2(s, p), \dots\}$ , sendo  $L_j(s, p) = \frac{\sqrt{2p}}{s+p} \left(\frac{s-p}{s+p}\right)^{j-1}$ ,  $j = 1, 2, \dots$  as funções de Laguerre, onde  $p$  é uma constante previamente arbitrada, denominada pólo de Laguerre, e o modelo  $F(s)$  passa a ser gerado de acordo com a EQ 3.3:

$$F(s) = \alpha_1 L_1(s, p) + \alpha_2 L_2(s, p) + \dots + \alpha_n L_n(s, p) + K, \quad (3.3)$$

sendo o vetor de variáveis de projeto  $\Theta = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ . Os coeficientes  $\alpha_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  são chamados também de coeficientes de Laguerre.

Ressalta-se aqui que, a partir deste capítulo, a expressão base de Laguerre é utilizada por abuso de notação. As funções de Laguerre formam uma base para o espaço  $\mathcal{RH}_2^+$ , isto é, o espaço das funções racionais em  $s$ , estritamente próprias, estáveis e quadraticamente integráveis sobre o eixo imaginário. Deseja-se, entretanto, gerar também funções bipróprias. Para isto, torna-se necessário a adição da constante  $K$ , matriz de transmissão

direta  $D$  nas equações de espaço de estados. Assim, essa nova classe de funções deixa de ser estritamente própria, não mais pertencendo ao  $\mathcal{RH}_2^+$ .

Para modelos lineares SISO,  $K$  é constante e igual ao primeiro valor amostrado. A FIG. 3.2 mostra um exemplo de sistema bipróprio em que  $K$  vale 0,2.

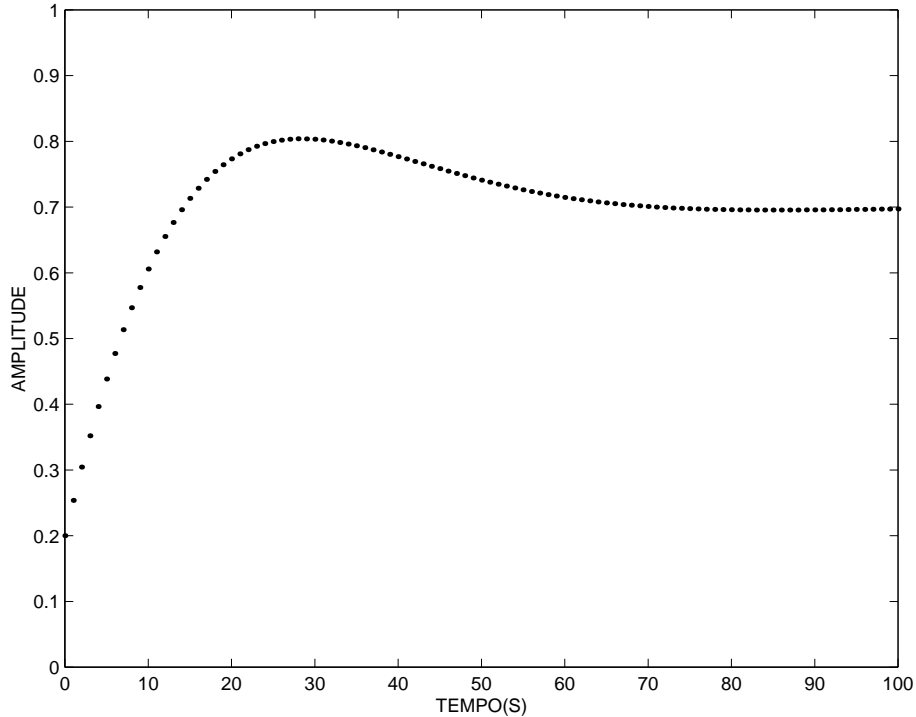


FIG. 3.2: Exemplo de sistema bipróprio.

A base de Laguerre é empregada como parâmetro de comparação no método proposto. O espaço solução obtido pela expansão dos conjuntos geradores otimizados na EQ 3.1 não engloba o obtido com a base de Laguerre na EQ 3.3. Os pólos múltiplos que a base de Laguerre possui não podem ser gerados pela EQ 3.1. Por outro lado, a base de Laguerre, com seu pólo previamente arbitrado, também não gera o conjunto solução da EQ 3.1. Portanto, o modelo com menor valor de função objetivo gerado pela base de Laguerre ou pelo conjunto gerador otimizado é o escolhido para representar o sistema, lembrando que, tanto no CGO quanto na base de Laguerre, o vetor de variáveis de projeto  $\Theta$  tem um número finito de termos.

A vantagem de utilizar a base de Laguerre, ou outras previamente definidas, consiste em tornar o problema de otimização convexo. Ao utilizar-se o conjunto gerador otimizado (CGO), de acordo com a metodologia proposta, o problema torna-se não convexo. Embora haja essa dificuldade adicional, para dimensão finita, a expansão do CGO gera um espaço bem maior que o de Laguerre, sendo o CGO numericamente mais estável que aquele com o modelo de pólos múltiplos de Laguerre. Além disso, com o CGO é

possível obter soluções de ordem menor do que com Laguerre, para um mesmo valor de função objetivo.

Na FIG. 3.3, ilustram-se duas funções objetivo em cima de uma reta no espaço de variáveis de projeto. Essa reta é definida a partir do ponto  $\underline{X}_q \in \mathbb{R}^n$  e da direção  $\underline{S}$ , em função do escalar  $\lambda$ . Apresenta-se uma comparação entre uma função objetivo convexa, que emprega a base de Laguerre, e outra, não convexa, com o conjunto gerador. A primeira possui um mínimo global, representado por um X. Já na segunda, não se determina o mínimo global. A solução obtida é um mínimo local, representado na figura por um O, porém com menor valor da função objetivo que a solução da primeira.

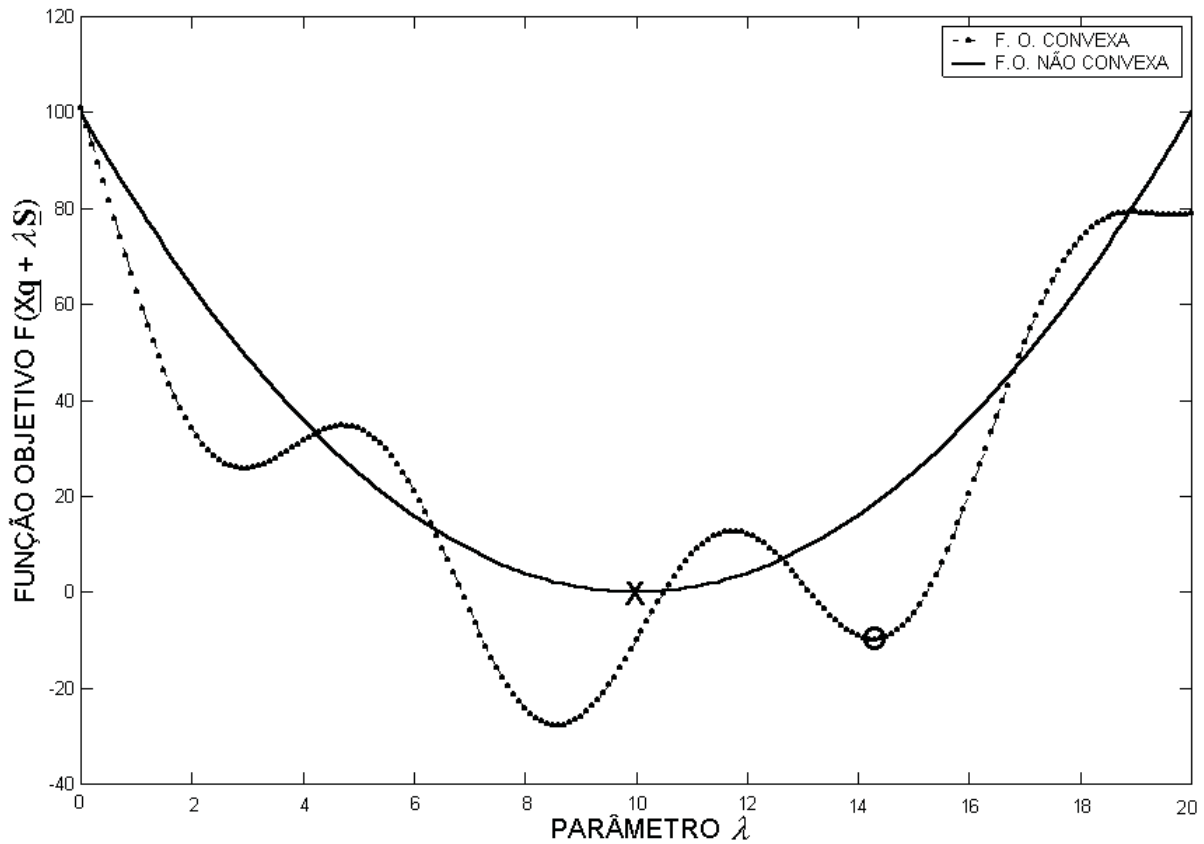


FIG. 3.3: Comparação entre funções objetivo convexas e não convexas.

O problema tratado recai na minimização da função objetivo  $J(\Theta)$  da EQ 3.8 e, dessa maneira, consiste em encontrar o melhor modelo linear  $F(s)$  que aproxime as  $M$  amostras existentes no domínio do tempo, onde  $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$  e  $\mathcal{L}[\cdot]$  é a transformada de Laplace.

Definem-se, para facilidade de notação,  $\underline{y}$  e  $\underline{\hat{y}}$  conforme as EQ 3.4, EQ 3.6, e EQ 3.7.

$$y(k) = y(kT) = y(t)|_{t=kT} = \mathcal{L}^{-1}[F(s)U(s)], \quad (3.4)$$

sendo  $y(k)$  a resposta discreta do modelo a uma determinada entrada em  $t=kT$ ,  $U(s)$  a

transformada de Laplace do sinal da entrada e  $\hat{y}(k)$  as medidas observadas da planta real. O período de discretização  $T$ , é dado por:

$$T \triangleq \frac{t_f - t_o}{M}, \quad (3.5)$$

onde  $t_o$  e  $t_f$  são, respectivamente, o tempo inicial e final da coleta dos dados.

$$\underline{y} \triangleq \begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(M-1) \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$\underline{\hat{y}} \triangleq \begin{pmatrix} \hat{y}(0) \\ \hat{y}(1) \\ \vdots \\ \hat{y}(M-1) \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

A função objetivo  $J(\Theta)$  que se pretende minimizar é composta de duas parcelas, conforme a EQ 3.8:

$$J(\Theta) = \lambda J_2(\Theta) + (1 - \lambda) J_\infty(\Theta), \quad (3.8)$$

onde  $0 \leq \lambda \leq 1$  é um fator escalar de ponderação ajustado de acordo com o sistema em estudo.

A função  $J_2(\Theta)$  é o somatório do erro quadrático entre a resposta fornecida pelo modelo  $F(s)$  e a do sistema real, conforme a EQ 3.9:

$$J_2(\Theta) \triangleq \|\underline{y} - \underline{\hat{y}}\|_2^2 = \sum_{k=0}^{M-1} (y(k) - \hat{y}(k))^2. \quad (3.9)$$

A função  $J_\infty(\Theta)$  foi definida como o maior erro absoluto entre a resposta fornecida pelo modelo  $F(s)$  e a do sistema real, conforme EQ 3.10:

$$J_\infty(\Theta) \triangleq \|\underline{y} - \underline{\hat{y}}\|_\infty = \sup_{0 \leq k \leq M-1} |y(k) - \hat{y}(k)| = |y(\bar{k}) - \hat{y}(\bar{k})|, \quad (3.10)$$

onde  $0 \leq \bar{k} \leq M-1$  e  $\bar{k}$  é o valor em que o módulo da diferença atinge o máximo.

Como o modelo calculado deve ser estável, um estudo das duas raízes de uma parcela genérica da EQ 3.1 se faz necessário. Em equações mônicas de segundo grau em  $s$ , como na EQ 3.11, o termo em  $s$  fornece o valor negativo da soma das raízes, enquanto o termo independente fornece o produto das raízes. Para que as raízes tenham partes reais menores



que zero, torna-se necessário que a soma delas seja negativa e o produto positivo. Assim, para que suas raízes estejam no semiplano  $s$  esquerdo, tem-se que o termo independente e o termo em  $s$  devem ser maiores que zero, sendo esse o motivo para que na EQ 3.1 utilizem-se  $b_i^2$  e  $c_i^2$ .

$$s^2 + bs + c = 0 \quad (3.11)$$

De maneira análoga à EQ 3.2, a metodologia de identificação aqui apresentada usa conjuntos geradores otimizados, conforme (ADES, 1999), para obtenção do modelo  $F(s)$  e pode ser escrito como na EQ 3.12:

$$F(s) = a_1 \frac{s + \check{k}_1}{s^2 + b_1^2 s + c_1^2} + a_2 \frac{s + \check{k}_2}{s^2 + b_2^2 s + c_2^2} + \dots + a_n \frac{s + \check{k}_n}{s^2 + b_n^2 s + c_n^2} + K. \quad (3.12)$$

Ao contrário da base de Laguerre, onde se arbitra o pólo  $p$  e ajustam-se os coeficientes  $a_i$  do vetor de variáveis de projeto  $\Theta = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ , empregam-se conjuntos geradores otimizados e ajustam-se, além dos coeficientes  $a_i$ , os pólos e, indiretamente, os zeros do modelo, através de  $\check{k}_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$ .

O modelo  $F(s)$  na EQ 3.12 é escrito de outra forma na EQ 3.13, a fim de facilitar os cálculos seguintes. Do mesmo modo, como no modelo com a base de Laguerre, há a constante  $K$  no modelo  $F(s)$ . No caso de modelos de ordem ímpar, acrescenta-se a parcela indicada na EQ 3.13:

$$F(s) = \frac{a_1 s + k_1}{s^2 + b_1^2 s + c_1^2} + \frac{a_2 s + k_2}{s^2 + b_2^2 s + c_2^2} + \dots + \overbrace{\frac{a_n s + k_n}{s^2 + b_n^2 s + c_n^2}}^{\text{parcela genérica}} + \overbrace{\frac{k_{\text{odd}}}{s + c_{\text{odd}}^2}}^{\text{parcela ímpar}} + K. \quad (3.13)$$

O vetor de variáveis de projeto a ser otimizado com  $4n$  termos é:  $\Theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n] = [k_1, a_1, b_1, c_1, k_2, a_2, b_2, c_2, \dots, k_n, a_n, b_n, c_n]$ .

### 3.2 CÁLCULO DO GRADIENTE DA FUNÇÃO OBJETIVO $J_2$ E DO SUBGRADIENTE $J_\infty$ PARA CGO

Conforme foi citado na seção anterior e também no capítulo 2, o gradiente é necessário para se usar um método de otimização de ordem 1. Discute-se nessa seção o cálculo do gradiente da função, considerando um modelo  $F(s)$  de ordem par  $2n$ ,  $n$  inteiro positivo,

com que se pretende aproximar as  $M$  amostras existentes no domínio do tempo. Esse modelo é composto de  $n$  parcelas com numerador de 1ª ordem e denominador de 2ª ordem e uma constante  $K$ .

O vetor de variáveis de projeto a ser otimizado com  $4n$  termos é:  $\Theta = [k_1, a_1, b_1, c_1, k_2, a_2, b_2, c_2, \dots, k_n, a_n, b_n, c_n, ]$ .

A função objetivo  $J_2(\Theta)$  é:

$$J_2(\Theta) = \sum_{k=0}^{M-1} (y(k) - \hat{y}(k))^2. \quad (3.14)$$

Escrevendo a EQ 3.14 de outra forma:

$$J_2(\Theta) = (y(0) - \hat{y}(0))^2 + (y(1) - \hat{y}(1))^2 + \dots + (y(M-1) - \hat{y}(M-1))^2 \quad (3.15)$$

e derivando-se:

$$\frac{\partial J_2(\Theta)}{\partial \theta_j} = 2 \sum_{k=1}^M \left( (y(k) - \hat{y}(k)) \frac{\partial y(k)}{\partial \theta_j} \right), \quad (3.16)$$

onde  $\theta_j$  é o  $j$ -ésimo termo do vetor de variáveis de projeto.

De posse da EQ 3.16, obtém-se o gradiente  $\nabla J_2 = \left( \frac{\partial J_2(\Theta)}{\partial \theta_1}, \frac{\partial J_2(\Theta)}{\partial \theta_2}, \dots, \frac{\partial J_2(\Theta)}{\partial \theta_n} \right)$ .

Quando a entrada que gera  $y(k)$  é o degrau, a resposta amostrada passa a ser chamada de  $r(k)$ . Portanto  $r(k)$  é a resposta discreta à entrada tipo degrau do modelo e  $r(t)$  sua representação contínua.

Como o modelo  $F(s)$ , a menos da parcela ímpar, é composto por parcelas estruturalmente iguais, sua resposta  $r(t)$  à entrada tipo degrau é o somatório de  $n$  parcelas genéricas  $r_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , onde  $2n$  é a ordem da aproximação a ser obtida. A resposta  $r_i(t)$  de uma parcela genérica do modelo e a sua derivada  $\frac{\partial r_i(t)}{\partial \theta_j}$ , discretizadas como  $r_i(k)$  e  $\frac{\partial r_i(k)}{\partial \theta_j}$ , completam o cálculo das derivadas da função objetivo  $J_2$  na EQ 3.16.

A resposta  $r_i(t)$  à entrada tipo degrau de uma parcela genérica do modelo a ser identificado e suas derivadas  $\frac{\partial r_i(t)}{\partial \theta_j}$  estão na subseção a seguir.

### 3.2.1 RESPOSTA AO DEGRAU DE UMA PARCELA GENÉRICA

Será calculada a seguir a resposta  $r_i(t)$  ao degrau do modelo de ordem  $2n$  de uma parcela genérica e suas derivadas  $\frac{\partial r_i(t)}{\partial \theta_j}$ . Esse mesmo cálculo foi feito também usando o *software* Maple de cálculo literal e encontra-se no apêndice 7.5. De posse desse cálculo, é possível então obter a resposta do modelo, já que o modelo é formado por  $n$  parcelas genéricas e suas derivadas  $\frac{\partial r_i(t)}{\partial \theta_j}$ .

$$\begin{aligned}
r_i(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{a_i s + k_i}{s(s^2 + b_i^2 s + c_i^2)} \right] = \\
&= \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{a_i}{s^2 + b_i^2 s + c_i^2} \right]}_{r_{i1}(t)} + k_i \underbrace{\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s(s^2 + b_i^2 s + c_i^2)} \right]}_{r_{i2}(t)}. \tag{3.17}
\end{aligned}$$

Para o cálculo de  $r_{i1}(t)$  e  $r_{i2}(t)$  na EQ 3.17, há três casos a serem analisados:

1. Se  $c_i^2 > \frac{b_i^4}{4}$ , define-se  $\beta_i \triangleq \sqrt{c_i^2 - \frac{b_i^4}{4}}$ .

Então, a primeira parcela  $r_{i1}(t)$  da EQ 3.17 será:

$$\begin{aligned}
r_{i1}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{a_i}{s^2 + b_i^2 s + c_i^2} \right] = a_i \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{\left(s + \frac{b_i^2}{2}\right)^2 + c_i^2 - \left(\frac{b_i^2}{2}\right)^2} \right] \\
r_{i1}(t) &= \frac{a_i}{\beta_i} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\beta_i}{\left(s + \frac{b_i^2}{2}\right)^2 + \beta_i^2} \right] = \frac{a_i}{\beta_i} e^{-\frac{b_i^2 t}{2}} \sin(\beta_i t). \tag{3.18}
\end{aligned}$$

E a segunda parcela  $r_{i2}(t)$  será:

$$\begin{aligned}
r_{i2}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{k_i}{s(s^2 + b_i^2 s + c_i^2)} \right] \\
r_{i2}(t) &= \frac{k_i}{c_i} \left[ 1 - \frac{c_i}{\beta_i} e^{-\frac{b_i^2 t}{2}} \sin(\beta_i t + \delta) \right], \tag{3.19}
\end{aligned}$$

onde  $\delta \triangleq \arctan\left(\frac{2\beta_i}{b_i^2}\right)$ .

2. Para  $c_i^2 < \frac{b_i^4}{4}$  define-se  $\gamma_i = \sqrt{\frac{b_i^4}{4} - c_i^2}$ .

Então, a primeira parcela da EQ 3.17 será:

$$\begin{aligned}
r_{i1}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{a_i}{s^2 + b_i^2 s + c_i^2} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{a_i}{\left(s + \frac{b_i^2}{2}\right)^2 + c_i^2 - \left(\frac{b_i^2}{2}\right)^2} \right] = \\
r_{i1}(t) &= \frac{a_i}{\gamma_i} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\gamma_i}{\left(s + \frac{b_i^2}{2}\right)^2 - \gamma_i^2} \right] = \frac{a_i}{\gamma_i} e^{-\frac{b_i^2 t}{2}} \sinh(\gamma_i t) \tag{3.20}
\end{aligned}$$

E a segunda parcela da EQ 3.17 será:

$$r_{i2}(t) = \frac{k_i}{a_i} \int_0^t r_{i1}(t) dt = \frac{k_i}{\gamma_i} e^{-\frac{b_i^2 t}{2}} (\cosh(\gamma_i t) - 1) \tag{3.21}$$

3. A igualdade  $c_i^2 = \frac{b_i^4}{4}$  é o limite dos dois casos analisados anteriormente. A primeira parcela da EQ 3.17 é:

$$r_{i1}(t) = a_i t e^{-\frac{b_i^2 t}{2}}. \quad (3.22)$$

E a segunda parcela da EQ 3.17 será:

$$r_{i2}(t) = k_i \left[ 1 - e^{-\frac{b_i^2 t}{2}} \left( \frac{2t}{b_i^2} + 1 \right) \right]. \quad (3.23)$$

Tem-se então  $r_{i1}(t)$  e  $r_{i2}(t)$  por meio das EQ 3.18 a EQ 3.23, formando  $r_i(t)$ . Agora que se tem  $r_i(t)$ , as derivadas  $\frac{\partial r_i(t)}{\partial a_i}$ ,  $\frac{\partial r_i(t)}{\partial b_i}$ ,  $\frac{\partial r_i(t)}{\partial c_i}$ ,  $\frac{\partial r_i(t)}{\partial k_i}$  são imediatas. Os resultados dessas derivadas para  $c_i^2 > \frac{b_i^4}{4}$  estão a seguir.

1. Para  $c_i^2 > \frac{b_i^4}{4}$ ,

$$\frac{\partial r_{i1}(t)}{\partial k_i} = 0 \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial r_{i1}(t)}{\partial a_i} = \frac{1}{\beta_i} e^{-\frac{b_i^2 t}{2}} \sin(\beta_i t) \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial r_{i1}(t)}{\partial b_i} = \frac{a_i b_i}{\beta_i} e^{-\frac{b_i^2 t}{2}} \left[ \left( \frac{b_i^2}{2\beta_i^2} - t \right) \sin(\beta_i t) - \frac{t b_i^2}{\beta_i^3} \cos(\beta_i t) \right] \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial r_{i1}(t)}{\partial c_i} = \frac{a_i c_i}{\beta_i^2} e^{-\frac{b_i^2 t}{2}} \left[ -\frac{\sin(\beta_i t)}{\beta_i} + t \cos(\beta_i t) \right] \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial r_{i2}(t)}{\partial a_i} = 0 \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial r_{i2}(t)}{\partial k_i} = \frac{1}{c_i^2} \left[ 1 - \frac{c_i}{\beta_i} e^{-\frac{b_i^2 t}{2}} \sin(\beta_i t + \delta) \right] \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{i2}(t)}{\partial b_i} = & -\frac{k_i}{\beta_i} e^{-\frac{b_i^2 t}{2}} \left[ b_i \sin(\beta_i t + \delta) \left( -t + \frac{b_i^2}{2\beta_i^2} \right) \right. \\ & \left. + \cos(\beta_i t + \delta) \left( \frac{-b_i^3 t}{2\beta_i} + \frac{b_i}{\beta_i} \frac{b_i^4 - 4\beta_i^2}{b_i^4 + 4\beta_i^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{i2}(t)}{\partial c_i} = & -\frac{k_i}{c_i^2} + \frac{c_i k_i}{\beta_i^2} e^{-\frac{b_i^2 t}{2}} \left[ \frac{\sin(\beta_i t + \delta)}{2\beta_i} + \right. \\ & \left. -\cos(\beta_i t + \delta) \left( t + \frac{2}{b_i^2 + \left( \frac{2\beta_i}{b_i} \right)^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

2. Para  $c_i^2 < \frac{b_i^4}{4}$ ,

$$\frac{\partial r_{i1}(t)}{\partial a_i} = \frac{1}{\gamma_i} e^{-\frac{b_i^2 t}{2}} \sinh(\gamma_i t) \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial r_{i1}(t)}{\partial k_i} = 0 \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial r_{i1}(t)}{\partial b_i} = a_i e^{-\frac{b_i^2 t}{2}} \frac{b_i^3}{2\gamma_i^3} \left[ -\sinh(\gamma_i t) \left( 1 + \frac{2t\gamma_i^2}{\gamma_i^2} \right) + t\gamma_i \cosh(\gamma_i t) \right] \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial r_{i1}(t)}{\partial c_i} = \frac{a_i c_i}{\gamma_i^3} e^{-\frac{b_i^2 t}{2}} [\sinh(\gamma_i t) - \gamma_i t \cosh(\gamma_i t)] \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial r_{i2}(t)}{\partial a_i} = 0 \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial r_{i2}(t)}{\partial k_i} = \frac{1}{\gamma_i} e^{-\frac{b_i^2 k T}{2}} (\cosh(\gamma_i k T) - 1) \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial r_{i2}(t)}{\partial b_i} = \frac{k_i b_i^3}{\gamma_i^3} e^{-\frac{b_i^2 t}{2}} \left[ (1 - \cosh(\gamma_i t)) \left( 1 + \frac{\gamma_i^2 t}{b_i^2} \right) + \frac{\gamma_i t}{2} \sinh(\gamma_i t) \right] \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial r_{i2}(t)}{\partial c_i} = \frac{k_i c_i e^{-\frac{b_i^2 t}{2}}}{\gamma_i^3} [\cosh(\gamma_i t) - 1 + \gamma_i t \sinh(\gamma_i t)] . \quad (3.39)$$

As formas discretas das EQ 3.24 a EQ 3.31 são EQ 3.44 a EQ 3.49, obtidas com auxílio das EQ 3.40 a EQ 3.43. Essas equações serão úteis na seção a seguir, quando do cálculo do subgradiente de  $J_\infty$ .

1. Para  $c_i^2 > \frac{b_i^4}{4}$ ,

$$r_{i1}(k) = \frac{a_i}{\beta_i} e^{-\frac{b_i^2 k T}{2}} \sin(\beta_i k T) \quad (3.40)$$

$$r_{i2}(k) = \frac{k_i}{c_i} \left[ 1 - \frac{c_i}{\beta_i} e^{-\frac{b_i^2 k T}{2}} \sin(\beta_i k T + \delta) \right] . \quad (3.41)$$

2. Para  $c_i^2 < \frac{b_i^4}{4}$ ,

$$r_{i1}(k) = \frac{a_i}{\gamma_i} e^{-\frac{b_i^2 k T}{2}} \sinh(\gamma_i k T) \quad (3.42)$$

$$r_{i2}(k) = \frac{k_i}{\gamma_i} e^{-\frac{b_i^2 k T}{2}} (\cosh(\gamma_i k T) - 1) \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial r_{i1}(k)}{\partial a_i} = \frac{1}{\beta_i} e^{-\frac{b_i^2 k T}{2}} \sin(\beta_i k T) \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial r_{i1}(k)}{\partial b_i} = \frac{a_i b_i}{\beta_i} e^{-\frac{b_i^2 k T}{2}} \left[ \left( \frac{b_i^2}{2\beta_i^2} - k T \right) \sin(\beta_i k T) - \frac{k T b_i^2}{\beta_i^3} \cos(\beta_i k T) \right] \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial r_{i1}(k)}{\partial c_i} = \frac{a_i c_i}{\beta_i^2} e^{-\frac{b_i^2 k T}{2}} \left[ -\frac{\sin(\beta_i k T)}{\beta_i} + k T \cos(\beta_i k T) \right] \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial r_{i2}(k)}{\partial k_i} = \frac{1}{c_i^2} \left[ 1 - \frac{c_i}{\beta_i} e^{-\frac{b_i^2 k T}{2}} \sin(\beta_i k T + \delta) \right] \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{i2}(k)}{\partial b_i} = & -\frac{k_i}{\beta_i} e^{-\frac{b_i^2 k T}{2}} \left[ b_i \sin(\beta_i k T + \delta) \left( -k T + \frac{b_i^2}{2\beta_i^2} \right) \right. \\ & \left. + \cos(\beta_i k T + \delta) \left( \frac{-b_i^3 k T}{2\beta_i} + \frac{b_i}{\beta_i} \frac{b_i^4 - 4\beta_i^2}{b_i^4 + 4\beta_i^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{i2}(k)}{\partial c_i} = & -\frac{k_i}{c_i^2} + \frac{c_i k_i}{\beta_i^2} e^{-\frac{b_i^2 k T}{2}} \left[ \frac{\sin(\beta_i k T + \delta)}{2\beta_i} + \right. \\ & \left. -\cos(\beta_i k T + \delta) \left( k T + \frac{2}{b_i^2 + \left( \frac{2\beta_i}{b_i} \right)^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Já as equações EQ 3.32 a EQ 3.39 têm como forma discreta as EQ 3.50 a EQ 3.55, respectivamente:

$$\frac{\partial r_{i1}(k)}{\partial a_i} = \frac{1}{\gamma_i} e^{-\frac{b_i^2 k T}{2}} \sinh(\gamma_i k T) \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial r_{i1}(k)}{\partial b_i} = a_i e^{-\frac{b_i^2 k T}{2}} \frac{b_i^3}{2\gamma_i^3} \left[ -\sinh(\gamma_i k T) \left( 1 + \frac{2k T \gamma_i^2}{\gamma_i^2} \right) + k T \gamma_i \cosh(\gamma_i k T) \right] \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial r_{i1}(k)}{\partial c_i} = \frac{a_i c_i}{\gamma_i^3} e^{-\frac{b_i^2 k T}{2}} [\sinh(\gamma_i k T) - \gamma_i k T \cosh(\gamma_i k T)] \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial r_{i2}(k)}{\partial k_i} = \frac{1}{\gamma_i} e^{-\frac{b_i^2 k T}{2}} (\cosh(\gamma_i k T) - 1) \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial r_{i2}(k)}{\partial b_i} = \frac{k_i b_i^3}{\gamma_i^3} e^{-\frac{b_i^2 k T}{2}} \left[ (1 - \cosh(\gamma_i k T)) \left( 1 + \frac{\gamma_i^2 k T}{b_i^2} \right) + \frac{\gamma_i k T}{2} \sinh(\gamma_i k T) \right] \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial r_{i2}(t)}{\partial c_i} = \frac{k_i c_i}{\gamma_i^3} e^{-\frac{b_i^2 t}{2}} [\cosh(\gamma_i t) - 1 + \gamma_i t \sinh(\gamma_i t)] . \quad (3.55)$$

### 3.2.2 GRADIENTE DA FUNÇÃO OBJETIVO $J_2$ DEVIDO À PARCELA ÍMPAR

A raiz proveniente da parcela ímpar(*odd*) é, por construção, estável. Esta parcela é acrescentada ao modelo de ordem par e possui um pólo real em  $s = -c_{odd}^2$ .

O vetor de variáveis de projeto a ser otimizado com  $4n+2$  termos é:

$$\Theta = [k_1, a_1, b_1, c_1, k_2, a_2, b_2, c_2, \dots, k_n, a_n, b_n, c_n, k_{odd}, c_{odd}] .$$

O vetor gradiente para modelos com ordem ímpar será igual ao de ordem par, apenas com o acréscimo de duas componentes, conforme será visto a seguir. Calculando a resposta  $r_{odd}(t)$  ao degrau, considerando apenas a parcela ímpar na EQ 3.56:

$$r_{odd}(t) = k_{odd} \left( \frac{1 - e^{-c_{odd}^2 t}}{c_{odd}^2} \right) . \quad (3.56)$$

As derivadas da EQ 3.56 com relação a  $k_{odd}$  e  $c_{odd}$  são, respectivamente:

$$\frac{\partial r_{odd}(t)}{\partial k_{odd}} = \frac{(1 - e^{-c_{odd}^2 t})}{c_{odd}^2} \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial r_{odd}(t)}{\partial c_{odd}} = \frac{2e^{-c_{odd}^2 t}}{c_{odd}} \left( t + \frac{1}{c_{odd}^2} \right) - \frac{2}{c_{odd}^3} . \quad (3.58)$$

Discretizando as EQ 3.56 a EQ 3.58 têm-se:

$$r_{odd}(k) = k_{odd} \frac{(1 - e^{-c_{odd}^2 k T})}{c_{odd}^2} \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial r_{odd}(k)}{\partial k_{odd}} = \frac{(1 - e^{-c_{odd}^2 k T})}{c_{odd}^2} \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial r_{odd}(k)}{\partial c_{odd}} = \frac{2e^{-c_{odd}^2 k T}}{c_{odd}} \left( kT + \frac{1}{c_{odd}^2} \right) - \frac{2}{c_{odd}^3}. \quad (3.61)$$

### 3.3 SUBGRADIENTE DA FUNÇÃO OBJETIVO $J_\infty(\Theta)$ PARA ENTRADA TIPO DEGRAU

Repete-se aqui a EQ 3.10 por comodidade:

$$\begin{aligned} J_\infty(\Theta) &\triangleq \| \underline{y} - \hat{\underline{y}} \|_\infty = \sup_{0 \leq k \leq M-1} |y(k) - \hat{y}(k)| \\ &= |y(\bar{k}) - \hat{y}(\bar{k})|, \end{aligned} \quad (3.62)$$

onde  $0 \leq k \leq M-1$ ,  $M$  é o número de amostras e  $\bar{k}$  o valor no qual o módulo da diferença atinge o máximo.

A existência de supremo na EQ 3.62, no caso de supremo do módulo de uma diferença, impossibilita a obtenção de  $\frac{\partial J_\infty(\Theta)}{\partial \theta_i}$ . A solução adotada foi buscar um subgradiente em lugar do gradiente. Seguem algumas definições relativas ao subgradiente.

**Definição 3.1: (Subgradiente)** Seja  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função real. O subdiferencial de  $F$  em  $x$ , chamado de  $\partial F(x)$ , é o conjunto de vetores  $\xi \in \mathbb{R}^n$  satisfazendo:

$$F(y) \geq F(x) + \xi^t (y - x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad (3.63)$$

Um vetor  $\xi \in \partial F(x)$  é dito um subgradiente de  $F$  no ponto  $x$ .

□

Seja

$$\begin{aligned} \bar{\xi} &= \left[ \frac{\partial r_1(k)}{\partial k_1}, \frac{\partial r_1(k)}{\partial a_1}, \frac{\partial r_1(k)}{\partial b_1}, \frac{\partial r_1(k)}{\partial c_1}, \frac{\partial r_2(k)}{\partial k_2}, \frac{\partial r_2(k)}{\partial a_2}, \frac{\partial r_2(k)}{\partial b_2}, \frac{\partial r_2(k)}{\partial c_2}, \dots \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial r_n(k)}{\partial a_n}, \frac{\partial r_n(k)}{\partial k_n}, \frac{\partial r_n(k)}{\partial b_n}, \frac{\partial r_n(k)}{\partial c_n} \right] \Bigg|_{k=\bar{k}}^t \end{aligned} \quad (3.64)$$

uma direção do espaço de variáveis de projeto, de acordo com a metodologia proposta. O Teorema 3.1, a seguir, discute a determinação de uma direção que é um subgradiente de  $J_\infty(\Theta)$ .



**Teorema 3.1: (Subgradiente)** Sejam  $r(k)$  a resposta ao degrau fornecida pelo modelo,  $\hat{r}(k)$  a resposta medida da planta real face a aplicação de um degrau e  $\bar{k}$  o instante em que o módulo da diferença atinge o máximo, de acordo com a EQ 3.60. Se  $\hat{r}(\bar{k}) - r(\bar{k}) > 0$ , então a direção  $\bar{\xi}$  na EQ 3.64 é um subgradiente de  $J_\infty(\Theta)$ . Caso contrário, se  $\hat{r}(\bar{k}) - r(\bar{k}) < 0$ , então  $-\bar{\xi}$  é um subgradiente de  $J_\infty(\Theta)$ .

Demonstração: baseada no teorema 4.6 em (ADES, 1999).

□

A seguir, discute-se o cálculo das componentes da direção  $\bar{\xi}$  na EQ 3.64. Dois casos devem ser considerados.

1. Para  $c_i^2 > \frac{b_i^4}{4}$ .

Das EQ 3.24 a EQ 3.31, substituindo  $k$  por  $\bar{k}$ , têm-se as EQ 3.65 a EQ 3.68:

$$\frac{\partial r_i(\bar{k})}{\partial k_i} = \frac{1}{c_i} \left[ 1 - \frac{c_i}{\beta_i} e^{-\frac{b_i^2 \bar{k} T}{2}} \sin(\beta_i \bar{k} T + \delta) \right] \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial r_i(\bar{k})}{\partial a_i} = \frac{1}{\beta_i} e^{-\frac{b_i^2 \bar{k} T}{2}} \sin(\beta_i \bar{k} T) \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_i(\bar{k})}{\partial b_i} = & -\frac{k_i}{\beta_i} e^{-\frac{b_i^2 \bar{k} T}{2}} \left[ b_i \sin(\beta_i \bar{k} T + \delta) \left( -\bar{k} T + \frac{b_i^2}{2\beta_i^2} \right) + \right. \\ & \left. + \cos(\beta_i \bar{k} T + \delta) \left( \frac{-b_i^3 \bar{k} T}{2\beta_i} + \frac{b_i}{\beta_i} \frac{b_i^4 - 4\beta_i^2}{b_i^4 + 4\beta_i^2} \right) \right] + \\ & + \frac{a_i b_i}{\beta_i} e^{-\frac{b_i^2 \bar{k} T}{2}} \left[ \sin(\beta_i \bar{k} T) \left( \frac{b_i^2}{2\beta_i^2} - \bar{k} T \right) - \frac{\bar{k} T b_i^2}{\beta_i^3} \cos(\beta_i \bar{k} T) \right] \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_i(\bar{k})}{\partial c_i} = & -\frac{k_i}{c_i^2} + \frac{c_i k_i}{\beta_i^2} e^{-\frac{b_i^2 \bar{k} T}{2}} \left[ \frac{\sin(\beta_i \bar{k} T + \delta)}{2\beta_i} + \right. \\ & \left. - \cos(\beta_i \bar{k} T + \delta) \left( \bar{k} T + \frac{2}{b_i^2 + \left( \frac{2\beta_i}{b_i} \right)^2} \right) \right] + \\ & + \frac{a_i c_i}{\beta_i^2} e^{-\frac{b_i^2 \bar{k} T}{2}} \left[ -\frac{\sin(\beta_i \bar{k} T)}{\beta_i} + \bar{k} T \cos(\beta_i \bar{k} T) \right] \end{aligned} \quad (3.68)$$

2. Para  $c_i^2 < \frac{b_i^4}{4}$ .

Das de EQ 3.50 a EQ 3.55, substituindo  $k$  por  $\bar{k}$ , têm-se as EQ 3.69 a EQ 3.76:

$$\frac{\partial r_{i1}(k)}{\partial a_i} = \frac{1}{\gamma_i} e^{-\frac{b_i^2 \bar{k} T}{2}} \sinh(\gamma_i \bar{k} T) \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial r_{i1}(k)}{\partial k_i} = 0 \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial r_{i1}(k)}{\partial b_i} = \frac{a_i b_i^3 e^{-\frac{b_i^2 \bar{k} T}{2}}}{2\gamma_i^3} \left[ -\sinh(\gamma_i \bar{k} T) \left( 1 + \frac{2\bar{k} T \gamma_i^2}{b_i^2} \right) + \bar{k} T \gamma_i \cosh(\gamma_i \bar{k} T) \right] \quad (3.71)$$

$$\frac{\partial r_{i1}(k)}{\partial c_i} = \frac{a_i c_i}{\gamma_i^3} e^{-\frac{b_i^2 \bar{k} T}{2}} [\sinh(\gamma_i \bar{k} T) - \gamma_i \bar{k} T \cosh(\gamma_i \bar{k} T)] \quad (3.72)$$

$$\frac{\partial r_{i2}(k)}{\partial a_i} = 0 \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial r_{i2}(k)}{\partial k_i} = \frac{1}{\gamma_i} e^{-\frac{b_i^2 \bar{k} T}{2}} (\cosh(\gamma_i \bar{k} T) - 1) \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial r_{i2}(k)}{\partial b_i} = \frac{k_i b_i^3 e^{-\frac{b_i^2 \bar{k} T}{2}}}{\gamma_i^3} \left[ (1 - \cosh(\gamma_i \bar{k} T)) \left( 1 + \frac{\gamma_i^2 \bar{k} T}{b_i^2} \right) + \frac{\gamma_i \bar{k} T}{2} \sinh(\gamma_i \bar{k} T) \right] \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial r_{i2}(k)}{\partial c_i} = \frac{k_i c_i e^{-\frac{b_i^2 \bar{k} T}{2}}}{\gamma_i^3} [\cosh(\gamma_i \bar{k} T) - 1 + \gamma_i \bar{k} T \sinh(\gamma_i \bar{k} T)] \quad (3.76)$$

### 3.3.1 SUBGRADIENTE DA FUNÇÃO OBJETIVO $J_\infty$ DEVIDO À PARCELA ÍMPAR

Substituindo  $k$  por  $\bar{k}$  nas EQ 3.57 e EQ 3.58, têm-se os termos devidos à parcela ímpar para formar o subgradiente, da mesma forma que na seção 3.2.2:

$$\frac{\partial r_{odd}(k)}{\partial k_{odd}} = \frac{(1 - e^{-c_{odd}^2 \bar{k} T})}{c_{odd}^2} \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial r_{odd}(k)}{\partial c_{odd}} = \frac{2e^{-c_{odd}^2 \bar{k} T}}{c_{odd}} \left( kT + \frac{1}{c_{odd}^2} \right) - \frac{2}{c_{odd}^3} \quad (3.78)$$

O subgradiente passa a ser calculado, neste caso, por:

$$\bar{\xi} = \left[ \frac{\partial r_1(k)}{\partial a_1}, \frac{\partial r_1(k)}{\partial k_1}, \frac{\partial r_1(k)}{\partial b_1}, \frac{\partial r_1(k)}{\partial c_1}, \frac{\partial r_2(k)}{\partial a_2}, \frac{\partial r_2(k)}{\partial k_2}, \frac{\partial r_2(k)}{\partial b_2}, \frac{\partial r_2(k)}{\partial c_2}, \dots, \right. \\ \left. \frac{\partial r_n(k)}{\partial a_n}, \frac{\partial r_n(k)}{\partial k_n}, \frac{\partial r_n(k)}{\partial b_n}, \frac{\partial r_n(k)}{\partial c_n}, \frac{\partial r_{odd}(k)}{\partial k_{odd}}, \frac{\partial r_{odd}(k)}{\partial c_{odd}} \right] \Big|_{k=\bar{k}}^t. \quad (3.79)$$

### 3.4 CÁLCULO DO GRADIENTE DA FUNÇÃO OBJETIVO $J_2$ E DO SUBGRADIENTE $J_\infty$ PARA BASE DE LAGUERRE

Da mesma forma que com os CGO, para a determinação dos coeficientes das funções de Laguerre, será usado o método BFGS. Quando a função objetivo for  $J_2$ , será usado o gradiente, calculado na subseção 3.4.1, e quando a função objetivo for  $J_\infty$ , será usado um subgradiente dessa, calculado na subseção 3.4.2.

#### 3.4.1 GRADIENTE DA FUNÇÃO OBJETIVO, USANDO A BASE DE LAGUERRE

Nesse caso, o modelo  $F(s)$  que identifica o sistema é dado por:

$$F(s) = \alpha_1 L_1(s, p) + \alpha_2 L_2(s, p) + \dots + \alpha_n L_n(s, p) + K, \quad (3.80)$$

sendo o vetor de variáveis de projeto  $\Theta = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ .

Como as amostras existentes são temporais, da mesma forma como foi feito com os CGO, é necessário realizar os cálculos do gradiente nesse domínio. De acordo com (ZERVOS & DUMONT, 1988), o termo geral de Laguerre no domínio temporal é dado por:

$$f_i(t) = \frac{\sqrt{2pe^{pt}}}{(i-1)!} \frac{\partial^{i-1} (t^{i-1} e^{-2pt})}{\partial t^{i-1}}. \quad (3.81)$$

Assim, a resposta ao degrau  $y(t)$ , fornecida pela classe na EQ 3.80, será:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} [F(s)U(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[ F(s) \frac{1}{s} \right] \quad (3.82)$$

$$y(t) = \alpha_1 \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{L_1(s, p)}{s} \right] + \alpha_2 \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{L_2(s, p)}{s} \right] + \dots + \alpha_n \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{L_n(s, p)}{s} \right] + K \quad (3.83)$$

$$y(t) = \alpha_1 I_1(t) + \alpha_2 I_2(t) + \dots + \alpha_n I_n(t) + K, \quad (3.84)$$

onde

$$I_n(t) \triangleq \int_0^t f_n(\lambda) d\lambda. \quad (3.85)$$

No apêndice 7.3 encontram-se as oito primeiras funções de Laguerre  $f_i(t)$  e suas respectivas integrais  $I_i(t)$ , calculadas com auxílio do *software* de computação simbólica Maple.

Escrevendo a EQ 3.14 de outra forma,

$$J_2(\Theta) = (y(0) - \hat{y}(0))^2 + (y(1) - \hat{y}(1))^2 + \dots + (y(M-1) - \hat{y}(M-1))^2 \quad (3.86)$$

e rescrevendo, por comodidade, a EQ 3.16:

$$\frac{\partial J_2(\Theta)}{\partial \theta_j} = 2 \sum_{k=1}^M \left( (y(k) - \hat{y}(k)) \frac{\partial y(k)}{\partial \theta_j} \right), \quad (3.87)$$

onde  $\theta_j$  é o  $j$ -ésimo termo do vetor de variáveis de projeto.

Derivando EQ 3.84 em relação a  $\alpha_j$ :

$$\frac{\partial y(t)}{\partial \alpha_j} = \int_0^t f_j(t) dt. \quad (3.88)$$

De posse da EQ 3.89, que é a forma discreta de EQ 3.88, e de EQ 3.87, obtém-se o gradiente  $\nabla J_2$ :

$$\frac{\partial y(k)}{\partial \alpha_j} = \sum_{k=0}^{M-1} f_j(kT) \quad (3.89)$$

$$\nabla J_2 = \left( \frac{\partial J_2(\Theta)}{\partial \theta_1}, \frac{\partial J_2(\Theta)}{\partial \theta_2}, \dots, \frac{\partial J_2(\Theta)}{\partial \theta_n} \right). \quad (3.90)$$

### 3.4.2 SUBGRADIENTE DA FUNÇÃO OBJETIVO $J_\infty$ , USANDO A BASE DE LAGUERRE

Da mesma forma que na seção 3.3, aqui também vai ser usado o subgradiente. O vetor  $\bar{\xi} = \pm \left[ \frac{\partial f_1(\bar{k})}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial f_2(\bar{k})}{\partial \alpha_2}, \dots, \frac{\partial f_n(\bar{k})}{\partial \alpha_n} \right]$  é o subgradiente utilizado.

De posse desse subgradiente, é possível aplicar o método BFGS para determinar os valores dos coeficientes de Laguerre que minimizam a função objetivo  $J_\infty$ .

Substituindo  $k$  por  $\bar{k}$  na EQ 3.89, obtém-se  $\frac{\partial f_j(\bar{k})}{\partial \alpha_j}$  na EQ 3.91, e variando  $j = 1, 2, \dots, n$  forma-se o vetor subgradiente  $\bar{\xi}$  utilizado na EQ 3.92, ou seja:

$$\frac{\partial y(\bar{k})}{\partial \alpha_j} = \frac{\partial f_j(\bar{k})}{\partial \alpha_j} = \sum_{k=0}^{\bar{k}} f_j(kT) \quad (3.91)$$

$$\bar{\xi} = \pm \left[ \frac{\partial f_1(\bar{k})}{\partial \alpha_1} \frac{\partial f_2(\bar{k})}{\partial \alpha_2} \dots \frac{\partial f_n(\bar{k})}{\partial \alpha_n} \right]. \quad (3.92)$$

### 3.5 ALGORITMO DA METODOLOGIA DE IDENTIFICAÇÃO USANDO CGO E USANDO BASE DE LAGUERRE

As FIG 3.5 e FIG 3.4 mostram, respectivamente, os algoritmos da metodologia de identificação usando CGO e base de Laguerre. Tanto na metodologia usando CGO como usando base de Laguerre no programa principal escolhem-se o parâmetro de ponderação  $\lambda$  entre  $J_2$  e  $J_\infty$ , a ordem do modelo desejada  $n$  e o ponto inicial de otimização  $\Theta_o$ . No programa principal está também a resposta ao degrau do sistema real filtrada e apenas no método usando base de Laguerre, o pólo de Laguerre  $p$  escolhido. O simulador calcula  $J_2(\Theta)$ ,  $J_\infty(\Theta)$ ,  $\nabla J_2(\Theta)$  e o subgradiente  $\xi(\Theta)$ , possibilitando que as rotinas de otimização, o método de otimização BFGS e a busca unidimensional de Wolfe, determinem o melhor vetor de variáveis de projeto, segundo a FO  $J(\Theta)$ . As equações para esses cálculos são específicas de cada método. Como a FO usando a base de Laguerre é convexa, a busca é mais rápida que usando CGO, onde a FO é não convexa.

O algoritmo foi implementado em linguagem Matlab.

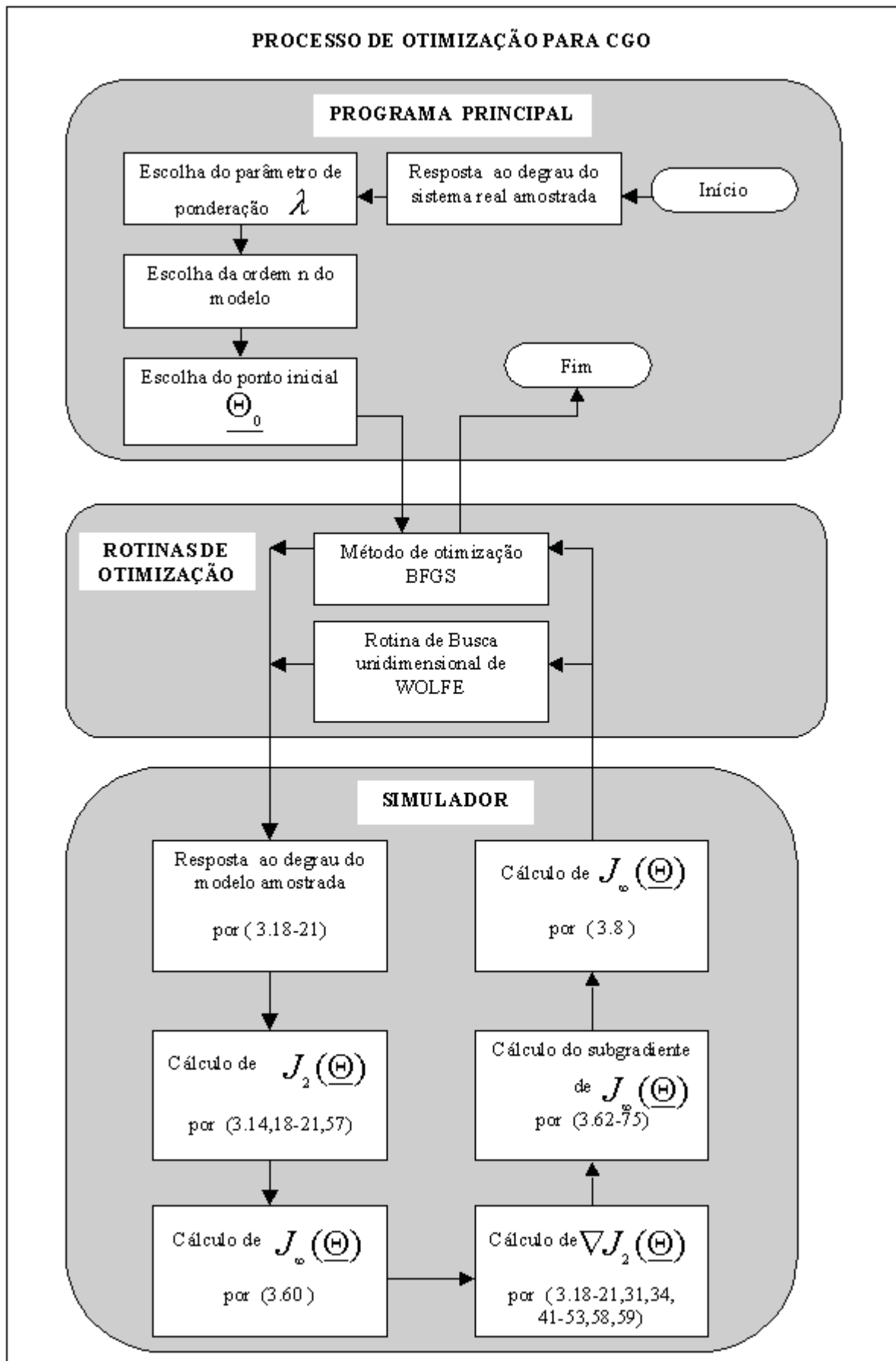


FIG. 3.4: Algoritmo da metodologia de identificação para CGO.

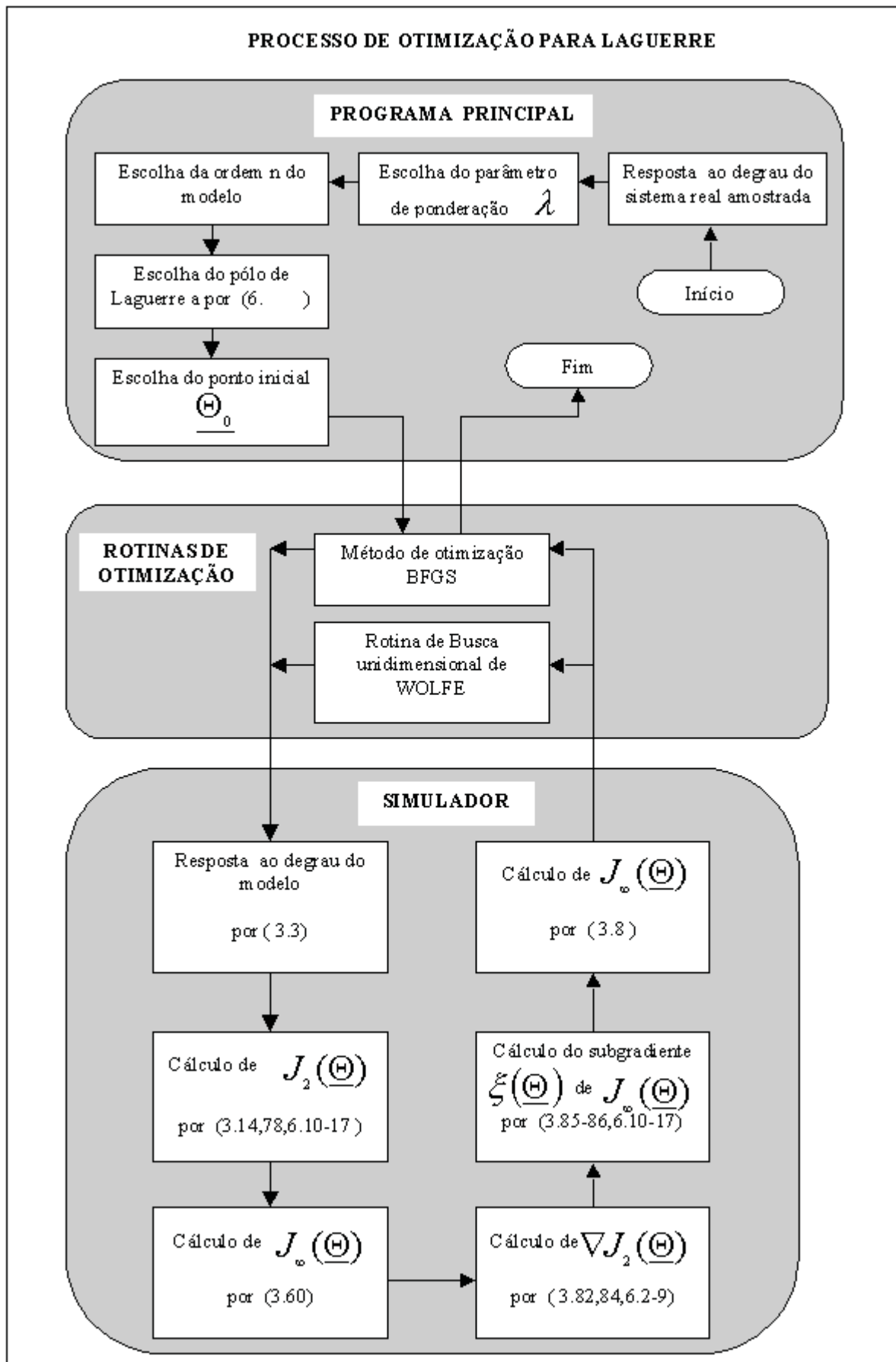


FIG. 3.5: Algoritmo da metodologia de identificação para base de Laguerre.

## 4 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Nesse capítulo, aplica-se a metodologia de identificação proposta no capítulo 3 em dois sistemas existentes no Laboratório de Controle do IME, o sistema defletor a laser para imageamento e o sistema radiômetro de Crookes. Os dois exemplos são detalhados a seguir.

### 4.1 SISTEMA DEFLETOR A LASER PARA IMAGEAMENTO

A metodologia de identificação foi aplicada num sistema defletor a laser para imageamento, representado na FIG. 4.1. Esse sistema foi montado empiricamente e está em fase de aperfeiçoamento (BORZINO & ALVES, 2001), motivando a aplicação do método de identificação proposto pela necessidade de tornar a resposta ao degrau desse sistema mais rápida. De posse do modelo, o sistema pode ser aperfeiçoado através de técnicas clássicas de controle linear como por exemplo a realocação de pólos e zeros. O sistema compõe-se de um motor com a posição angular de seu eixo controlada por um circuito. Acoplado ao eixo do motor, um espelho plano deflete um feixe laser ao longo de uma linha perpendicular ao eixo do motor. De posse de dois conjuntos de motores, torna-se possível varrer pontos num plano.

A entrada do sistema defletor consiste numa tensão de referência da posição angular do espelho, e sua saída uma tensão proporcional à mesma posição, que se encontram assinaladas na FIG. 4.2. Nessa figura, M simboliza o motor do sistema defletor.



FIG. 4.1: O sistema defletor para imageamento a laser.

FIG. 4.2: O diagrama do sistema defletor para imageamento a laser.

### 4.1.1 IDENTIFICAÇÃO

Escolheu-se como entrada para identificação um degrau de tensão de 1,44V de amplitude, tomando-se cuidado de estar dentro da faixa de operação da entrada de controle do motor. Na verdade, para que fosse possível gravar os dados no osciloscópio, foi necessário que a entrada fosse periódica, assim utilizou-se uma onda quadrada. O sistema foi amostrado a uma frequência de 25kHz e o tempo de 0,1s foi suficiente para que o mesmo atingisse a estabilidade assintótica. O sinal de saída foi armazenado na memória de um osciloscópio digital Tektronix TDS 210, gerando 2.500 amostras, e pode ser visualizado na FIG. 4.3. O sinal de saída foi filtrado algumas vezes, utilizando-se uma janela retangular com 9 amostras, resultando no apresentado na FIG. 4.4.

As figuras FIG. 4.5 a FIG. 4.16 representam a resposta ao degrau dos melhores modelos de 1ª a 4ª, 7ª e 8ª ordens, minimizando-se a função objetivo  $J_\infty$ . Enquanto nas FIG. 4.5, FIG. 4.7, FIG. 4.9, FIG. 4.11, FIG. 4.13 e FIG. 4.15, aplicou-se a base de Laguerre, nas FIG. 4.6, FIG. 4.8, FIG. 4.10, FIG. 4.12, FIG. 4.14 e FIG. 4.16, aplicou-se o CGO.

As figuras FIG. 4.17 a FIG. 4.28 representam a resposta ao degrau dos melhores modelos de 1ª a 4ª, 7ª e 8ª ordens, minimizando-se a função objetivo  $J_2$ . Enquanto nas FIG. 4.17, FIG. 4.19, FIG. 4.21, FIG. 4.23, FIG. 4.25 e FIG. 4.27, aplicou-se a base de Laguerre, nas FIG. 4.18, FIG. 4.20, FIG. 4.22, FIG. 4.24, FIG. 4.26 e FIG. 4.28, aplicou-se o CGO.

As EQ 4.1 e EQ 4.2 mostram possíveis modelos  $F(s)$  do mesmo sistema. A EQ 4.1 é o melhor modelo de 7ª ordem, minimizando-se  $J_\infty$ , usando CGO, enquanto a EQ 4.2 é o melhor modelo de 8ª ordem, minimizando-se  $J_2$ , usando CGO. Na TAB. 7.2 do apêndice 6.1, estão os melhores modelos de 1ª a 5ª ordem, usando CGO, utilizando a mesma representação de  $F(s)$  da EQ 4.1 e da EQ 4.2.

$$F(s) = \frac{-10,17s^6 + 1,22.10^{+4}s^5 + 6,2.10^6s^4 + 2,97.10^9s^3 + 8,47.10^{11}s^2 + 1,02.10^{14}s + 4,2.10^{15}}{s^7 + 6,29.10^2s^6 + 2,7.10^5s^5 + 7,67.10^7s^4 + 1,45.10^{10}s^3 + 1,85.10^{12}s^2 + 1,43.10^{14}s + 4,92.10^{15}} + K$$

onde  $K=0,00585750220080$ .

$$F(s) = \frac{-10s^7 + 1.10^4s^6 + 8,7.10^6s^5 + 6,55.10^9s^4 + 3,71.10^{12}s^3 + 7,62.10^{14}s^2 + 2,66.10^{17}s + 7,69.10^{18}}{s^8 + 899s^7 + 6,19.10^5s^6 + 3,10.10^8s^5 + 8,76.10^{10}s^4 + 2,3.10^{13}s^3 + 3,1.10^{15}s^2 + 3,5.10^{17}s + 9,2.10^{18}} + K$$

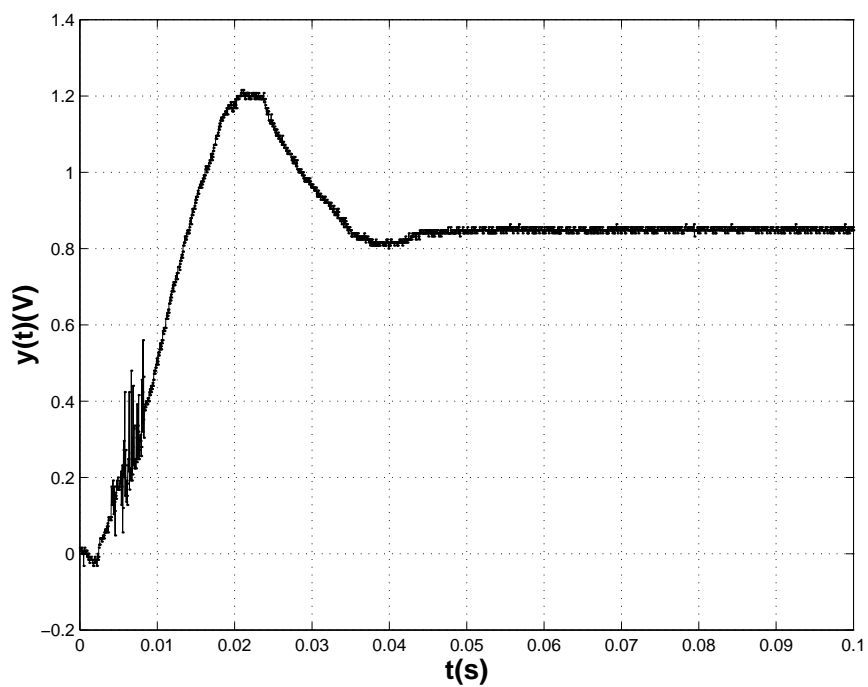


FIG. 4.3: Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento medido no osciloscópio.

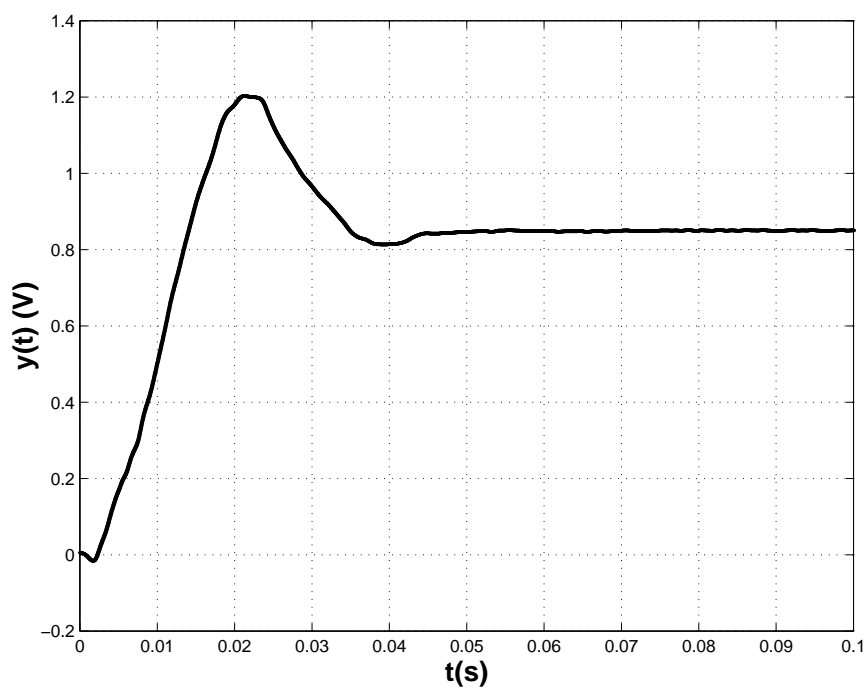


FIG. 4.4: Resposta ao degrau filtrada do sistema defletor a laser para imageamento.

FIG. 4.5: Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 1ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_\infty$ , usando Laguerre.

FIG. 4.6: Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 1ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_\infty$ , usando CGO.

FIG. 4.7: Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 2ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_\infty$ , usando Laguerre.

FIG. 4.8: Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 2ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_\infty$ , usando CGO.

FIG. 4.9: Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 3ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_\infty$ , usando Laguerre.

FIG. 4.10: Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 3ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_\infty$ , usando CGO.

FIG. 4.11: Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 4ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_\infty$ , usando Laguerre.

FIG. 4.12: Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 4ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_\infty$ , usando CGO.

FIG. 4.13: Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 7ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_\infty$ , usando Laguerre.

FIG. 4.14: Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 7ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_\infty$ , usando CGO.



FIG. 4.15: Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 8ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_\infty$ , usando Laguerre.

FIG. 4.16: Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 8ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_\infty$ , usando CGO.

FIG. 4.17: Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 1ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_2$ , usando Laguerre.

FIG. 4.18: Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 1ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_2$ , usando CGO.

FIG. 4.19: Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 2ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_2$ , usando Laguerre.

FIG. 4.20: Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 2ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_2$ , usando CGO.

FIG. 4.21: Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 3ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_2$ , usando Laguerre.

FIG. 4.22: Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 3ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_2$ , usando CGO.

FIG. 4.23: Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 4ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_2$ , usando Laguerre.

FIG. 4.24: Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 4ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_2$ , usando CGO.

FIG. 4.25: Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 7ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_2$ , usando Laguerre.

FIG. 4.26: Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 7ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_2$ , usando CGO.

FIG. 4.27: Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 8ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_2$ , usando Laguerre.

FIG. 4.28: Resposta ao degrau do sistema defletor a laser para imageamento e de seu modelo de 8ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_2$ , usando CGO.

TAB. 4.1: Resultados usando a expansão pelas funções de Laguerre e minimização da função objetivo  $J_\infty$  no sistema defletor a laser para imageamento.

Ordem	Função objetivo $J_\infty$	Custo $J_2$
1ª	0,3934	65,38
2ª	0,2191	74,40
3ª	0,2092	64,16
4ª	0,1099	7,19
5ª	0,0730	8,49
6ª	0,0450	3,00
7ª	0,0307	1,10
8ª	0,0236	0,55

TAB. 4.2: Resultados usando conjunto gerador e função objetivo  $J_\infty$  no sistema defletor a laser para imageamento.

Ordem	Função objetivo $J_\infty$	Custo $J_2$
1ª	0,2991	60,03
2ª	0,1276	19,61
3ª	0,1147	14,93
4ª	0,0368	1,29
5ª	0,0366	1,28
6ª	0,0365	1,28
7ª	0,0303	0,59
8ª	0,0275	0,31

As TAB. 4.2 e TAB. 4.3 apresentam os valores de  $J_\infty$  e  $J_2$  obtidos para o sistema defletor a laser para imageamento, aplicando-se o método proposto com conjunto gerador otimizado, para os modelos de 1ª a 8ª ordem. Minimizou-se a função objetivo  $J_\infty$  na TAB. 4.2 e a função objetivo  $J_2$  na TAB. 4.3. Os custos,  $J_2$  na TAB. 4.2 e  $J_\infty$  na TAB. 4.3, são expostos para permitir a comparação entre as duas tabelas. As TAB. 4.1 e TAB. 4.4 são as análogas as TAB. 4.2 e TAB. 4.3, respectivamente, só que usando a base de Laguerre ao invés do conjunto gerador otimizado. O pólo de Laguerre  $p$  foi fixado em 1,83 de acordo com (FU & DUMONT, 1993) e sua determinação está comentada no apêndice 6.4. De acordo com as TAB. 4.1 a TAB. 4.4, os resultados usando CGO foram melhores que os obtidos com a base de Laguerre, com exceção do modelo de 8ª ordem. Apesar do resultado na 8ª ordem com a base de Laguerre ter sido melhor que o CGO, visualmente eles são próximos, conforme a FIG 4.28 e a FIG 4.28. O ajuste obtido com CGO na 8ª ordem já está próximo dos dados reais e a direção do gradiente da função objetivo usada no método de identificação já não mais ajuda na busca de uma função objetivo menor.



TAB. 4.3: Resultados usando o conjunto de gerador e a função objetivo  $J_2$  no sistema defletor a laser para imageamento.

Ordem	Função objetivo $J_2$	Custo $J_\infty$
1 <sup>a</sup>	48,753	0,405
2 <sup>a</sup>	5,595	0,136
3 <sup>a</sup>	5,433	0,134
4 <sup>a</sup>	1,141	0,049
5 <sup>a</sup>	1,067	0,044
6 <sup>a</sup>	0,606	0,045
7 <sup>a</sup>	0,588	0,030
8 <sup>a</sup>	0,298	0,032

TAB. 4.4: Resultados usando a expansão pelas funções de Laguerre e minimização da função objetivo  $J_2$  no sistema defletor a laser para imageamento.

Ordem	Função objetivo $J_2$	Custo $J_\infty$
1 <sup>a</sup>	60,221	0,433
2 <sup>a</sup>	33,034	0,351
3 <sup>a</sup>	23,237	0,278
4 <sup>a</sup>	4,615	0,116
5 <sup>a</sup>	4,161	0,094
6 <sup>a</sup>	0,781	0,067
7 <sup>a</sup>	0,684	0,047
8 <sup>a</sup>	0,190	0,012

Nas TAB. 4.5 e TAB. 4.6, estão os pólos e zeros dos modelos de 1ª a 8ª ordem, minimizando-se, respectivamente, a função objetivo  $J_2$  e a função objetivo  $J_\infty$ , usando CGO.

TAB. 4.5: Pólos e zeros usando conjunto gerador e função objetivo  $J_2$  no sistema defletor a laser para imageamento.

Ordem	Pólos	Zeros
1ª	-128,87	-
2ª	-65,08 ± 1492,3j	4,37e4
3ª	-64,63 ± 149,04j -1140	-1078 -12829
4ª	-29,24 ± 263,7j -64,94 ± 150,8j	-32,04 ± 291,8j 1156
5ª	-32,44 ± 265,7j -63,37 ± 151,0j -667,70	-37,16 ± 295,5j -615,86 949,49
6ª	-36,05 ± 273,2j -72,57 ± 149,5j -17,24 -1311,5	-16,63 ± 323,1j -15,82 -1407,5 15171,0
7ª	-49,44 ± 284,7j -68,22 ± 144,8j -130,0 ± 18,78j -133,2	-47,44 ± 341,5j -137,0 95,55 -157,7 1680
8ª	-15,36 ± 508,8j -41,27 ± 274,1j -71,18 ± 147,2j -481,3 -35,96	-21,25 ± 486,9j -36,63 ± 330,6j 1806 -502,6 -32,23

TAB. 4.6: Pólos e zeros usando conjunto gerador e função objetivo  $J_\infty$  no sistema defletor a laser para imageamento.

ordem	Pólos	Zeros
1ª	-125,0	-
2ª	-83,15 ± 137,8j	9,533e5
3ª	-73,83 ± 138,2j -430,1	-417,0 1,055e4
4ª	-61,02 ± 152,4j -36,43 ± 259,61j	-41,65 ± 285,1j 1169
5ª	-61,11 ± 152,33j -35,62 ± 259,7j -547,6	40,6 ± 285,4j -546,6 -1162,8
6ª	-46,59 ± 293,5j -67,45 ± 150,6j -90,47 ± 113,2j	-92,20 ± 109,9j -34,06 ± 354,9j 4,603e6
7ª	-49,44 ± 284,7j -68,22 ± 144,9j -130,0 ± 18,78j -133,2	-47,44 ± 341,5j 95,55 -137,0 -157,7 -1681
8ª	-15,05 ± 508,85j -35,91 -41,74 ± 274,0j -481,899214503630 -481,90 ± 35,91j	-19,70 ± 487,7j -32,50 -39,58 ± 328,5j -471,6 -1370

FIG. 4.29: Sinal de entrada para validação dos modelos obtidos minimizando-se as funções objetivos  $J_2$  e  $J_\infty$ , usando CGO.

FIG. 4.30: Validação do modelo de 2ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_2$ .

A FIG. 4.29 é o sinal de entrada utilizado para validar os modelos obtidos. De acordo com a comparação entre a resposta do modelo e do sistema ao sinal de entrada, se valida ou não o modelo. Essa comparação depende da decisão do projetista, se a resposta do modelo ao sinal de validação foi suficientemente próxima da resposta do sistema real. As FIG 4.30 e FIG 4.31 são comparações entre as respostas do sistema real e do modelo de 2ª ordem, minimizando-se respectivamente  $J_2$  e  $J_\infty$ , usando CGO. Na FIG 4.32 estão a resposta do sistema real e dos modelos de 1ª e de 8ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_\infty$ . Nota-se na FIG 4.32 que na resposta do modelo de 1ª ordem, há um erro estacionário ao final da aplicação do sinal de entrada entre a resposta do modelo e a do sistema. Esse erro normalmente é indesejável em aplicações de controle, o que torna esse modelo não representativo, ou seja, não válido.

FIG. 4.31: Validação do modelo de 2ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_\infty$ .

FIG. 4.32: Comparação entre os modelos de 1ª e 8ª ordem minimizando-se a função objetivo  $J_\infty$ .

## 4.2 O SISTEMA RADIÔMETRO

A idéia de se identificar um radiômetro foi estimulada pelo artigo "Angular Velocity Control for Windmill Radiometer", (ARENAS et ALII, 1999). Na primeira parte deste artigo, o autor modela através das equações físicas do Radiômetro (modelagem do tipo caixa branca) e compara a modelagem com os dados reais. A segunda parte do artigo apresenta sugestões de controle do radiômetro através de controle proporcional, derivativo ou integral. Nessa dissertação foi feita uma modelagem tipo caixa preta, deixando como sugestão para futuros trabalhos a utilização da modelagem do radiômetro obtida para o controle do mesmo.

O radiômetro é um instrumento para detecção ou medição de radiação eletromagnética, em particular para medir radiação infravermelha. O termo infravermelho significa abaixo do vermelho, ou seja, abaixo da menor frequência do espectro visível e abrange os comprimentos de onda na faixa de  $75 \cdot 10^{-6} \text{cm}$  até  $1 \cdot 10^{-1} \text{cm}$ . A radiação infravermelha consiste de radiação térmica ou calor e é produzida por objetos cuja temperatura esteja acima dos 10K.

O termo radiômetro é normalmente utilizado para designar um tipo de detector inventado por Sir William Crookes em 1874. Esse instrumento consiste em duas partes: uma ampola de vidro com gás em baixa pressão (vácuo parcial) e um rotor consistindo de quatro palhetas horizontais iguais montadas em um pivô central de modo que o rotor possa girar no plano horizontal. A FIG. 4.33 é uma foto do sistema radiômetro implementado no Laboratório de Controle do IME, enquanto a FIG. 4.34 é uma representação de um radiômetro de Crookes. O radiômetro foi inventado por Sir William Crookes durante seus estudos da massa atômica de um novo elemento, o Tálcio.

### 4.2.1 PRINCÍPIO DE FUNCIONAMENTO

Cada uma das quatro palhetas do radiômetro possui uma face branca e lisa e outra escurecida. Quando a radiação infravermelha atinge a face branca e lisa, a maior parte é refletida mas, quando atinge a face escurecida a maior parte é absorvida, aumentando a temperatura da superfície escurecida. Isso faz com que o ar ao redor da superfície escurecida fique mais quente, se expanda e faça o rotor girar. A velocidade de rotação das palhetas fornece uma indicação da intensidade da radiação incidente sobre o radiômetro.

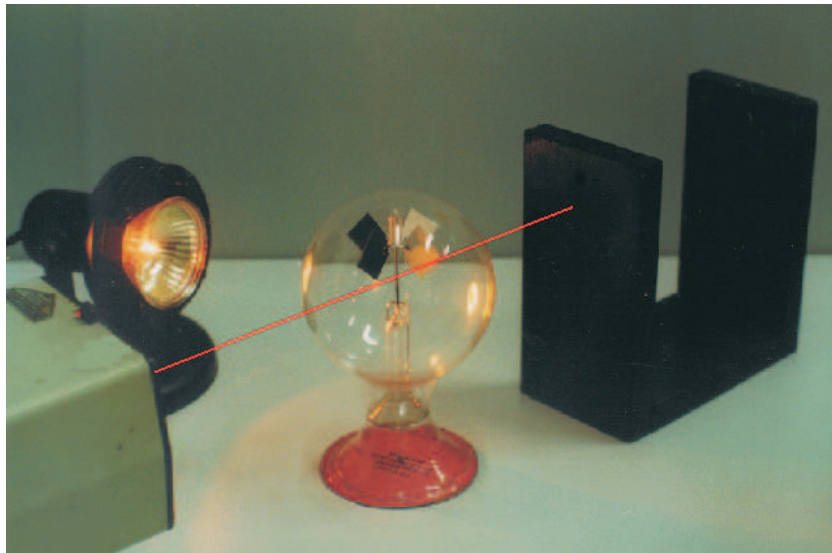


FIG. 4.33: O sistema radiômetro.

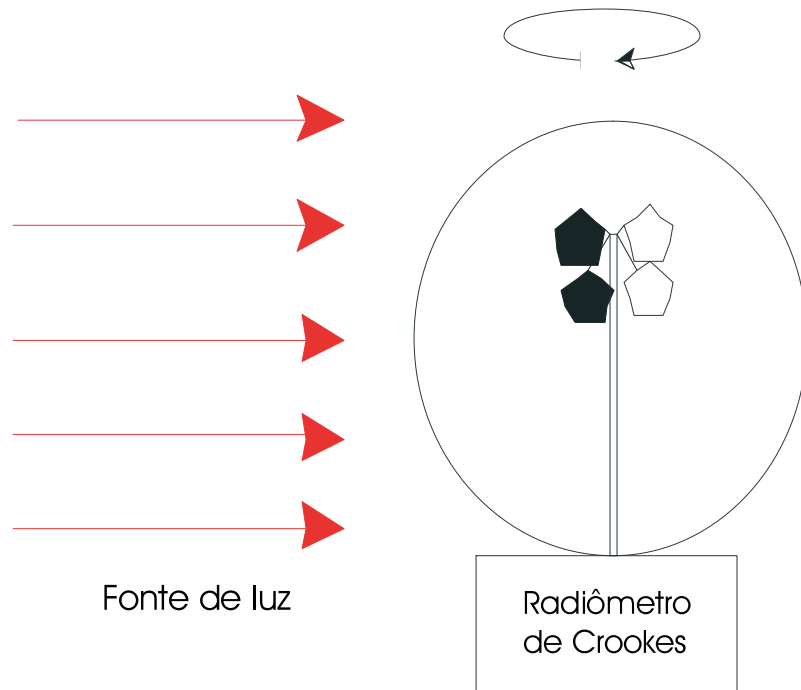


FIG. 4.34: Radiômetro de Crookes.

## 4.2.2 A COLETA DE DADOS

Deseja-se medir a frequência de rotação do radiômetro de Crookes ao longo do tempo, quando ele é submetido a uma fonte luminosa de 75W/12Vdc. Assim, a intensidade luminosa é a entrada do sistema e a frequência de rotação do radiômetro ao longo do tempo a saída do sistema. Implementou-se o circuito esquematicamente representado na FIG. 4.35. Uma fonte laser He-Ne de bancada com potência de saída de 0,5mW, diâmetro do feixe de 0,88mm e comprimento de onda de 632,8nm é direcionada para um fototransistor SFH 350, (SIEMMENS OPTOELETRONICS, 1997-1998). O gráfico da sensibilidade espectral relativa desse fototransistor mostra que nesse comprimento de onda a sensibilidade é de 57%. É possível substituir a fonte laser He-Ne de bancada por um apontador laser portátil que tem normalmente comprimento de onda entre 630 a 680nm. O laser e o fototransistor são posicionados de modo que o feixe laser seja barrado pela extremidade de uma palheta quando está ortogonal à mesma. Caso contrário, o feixe atingirá o fototransistor. A rotação do rotor do radiômetro causará variação na intensidade do feixe que atinge o fototransistor e conseqüentemente da tensão no emissor deste. Essa tensão, amplificada por um circuito formado por um amplificador operacional 741, é amostrada pela placa de aquisição de dados a uma taxa de 100Hz e está plotada de forma contínua na FIG. 4.36 para facilitar a visualização.

Observando a FIG. 4.36, notam-se três picos inferiores seguidos de um pico inferior maior. Esse pico inferior maior é conseqüência de uma particularidade do radiômetro utilizado: uma de suas palhetas é ligeiramente mais curva que as outras três. Essa particularidade observada, permite a marcação do início de uma volta completa, pelo que essa palheta é designada de palheta marcadora. Observe que a taxa de amostragem da frequência de rotação do radiômetro é variável, já que se contam apenas voltas completas e o número de voltas varia com o tempo. Como a metodologia de identificação proposta trabalha com taxa de amostragem constante, foi necessário uma interpolação desses dados para obter um conjunto de dados equivalente. O arquivo PROCESSRADIO.M que fez essa interpolação encontra-se no apêndice 7.2. Ainda nesse arquivo, se fez a determinação da frequência de rotação ao longo do tempo e posteriormente uma filtragem dos dados coletados do sistema radiômetro. As 12.000 amostras ao longo de dois minutos foram medidas com a placa PLC812, sendo equivalentes a tensão de saída do circuito radiômetro. As 3.000 primeiras amostras, ou seja, nos 30 segundos iniciais, foram efetuadas com a fonte luminosa alimentada a uma tensão de 4V, após um período suficiente para que a frequência de rotação se estabilizasse. A frequência de rotação inicial foi determinada



através de média aritmética do valor dessas 3.000 primeiras amostras. As 9.000 amostras restantes, correspondentes a 90 segundos, foram gravadas com a tensão de alimentação da fonte luminosa em 8V, representando então uma entrada tipo degrau.

Para transformar a informação da amostra de tensão em frequência de rotação, duas estratégias foram usadas. Na primeira estratégia, utilizando as 7.000 primeiras amostras das restantes 9.000, observou-se o intervalo de tempo da volta inicial, ou seja, o intervalo de tempo entre dois picos inferiores iniciais. O programa PROCESSRADIO.M procurou o pico inferior seguinte, sabendo que dentro de uma determinada margem de variação, a frequência seguinte era sempre maior. Já na segunda estratégia, usada para as 2.000 amostras restantes, quando a rotação crescia a uma taxa bem mais reduzida, os picos foram identificados por terem seus valores abaixo de um determinado nível.

As 9.000 amostras efetivas de tensão ao longo de 90 segundos deram origem a 271 amostras de frequência a cada 0,3s durante 81,3 segundos e podem ser visualizadas na FIG. 4.37. O intervalo de 0,3s entre as amostras foi arbitrado quando da interpolação. As 130 amostras finais do total de 271, sofreram uma filtragem por médias móveis com uma janela retangular de tamanho 9. As 141 amostras iniciais, de modo diferente das amostras finais, variam bastante. Dessa forma não foram filtradas, para que não se distorcesse quaisquer características do sistema. O resultado dessa filtragem está ilustrado na FIG. 4.38.

Só se pode garantir a aplicabilidade do modelo a ser encontrado através do método proposto, no ponto de operação arbitrado, ou seja, quando da variação de 4V para 8V na tensão que alimenta a fonte luminosa. Para uma variação de 0V para 4V na tensão da fonte luminosa, por exemplo, o comportamento do sistema radiômetro é diferente. O que se obteve foi um modelo linearizado no ponto de operação.

As TAB. 4.9 e TAB. 4.11 apresentam os valores de  $J_\infty$  e  $J_2$  obtidos para o sistema radiômetro, usando conjunto gerador otimizado, para os modelos de 1ª a 4ª ordem. Minimizou-se a FO  $J_\infty$  na TAB. 4.11 e a FO  $J_2$  na TAB. 4.9. Os custos,  $J_2$  na TAB. 4.11 e  $J_\infty$  na TAB. 4.9, são expostos para permitir a comparação entre as duas tabelas. As tabelas equivalentes à TAB. 4.9 e à TAB. 4.11, usando expansão de funções de Laguerre ao invés de CGO, são as TAB. 4.10 e TAB. 4.12. O valor da constante de Laguerre  $p$  foi fixada em 0,1631067, de acordo com (FU & DUMONT, 1993), e sua determinação está comentada no apêndice 6.4.

As figuras FIG. 4.39, FIG. 4.41 e FIG. 4.43, representam a resposta ao degrau dos melhores modelos de 1ª, 2ª e 4ª ordem, aplicando-se o CGO e minimizando-se a FO  $J_2$ , enquanto nas FIG. 4.45, FIG. 4.47 e FIG. 4.49, minimizou-se a FO  $J_\infty$ .

As figuras FIG. 4.40, FIG. 4.42 e FIG. 4.44 representam a resposta ao degrau dos melhores modelos de 1ª, 2ª e 4ª ordem, aplicando-se o CGO e minimizando-se a FO  $J_2$ , enquanto nas FIG. 4.46, FIG. 4.48 e FIG. 4.50 minimizou-se a FO  $J_\infty$ .

FIG. 4.35: Circuito de detecção da rotação das palhetas do radiômetro.

FIG. 4.36: Resposta ao degrau de 4V para 8V no sistema radiômetro:tensão de saída.

FIG. 4.37: Resposta ao degrau de 4V para 8V não filtrada do sistema radiômetro.

FIG. 4.38: Resposta ao degrau de 4V para 8V filtrada do sistema radiômetro.

FIG. 4.39: Resposta ao degrau do sistema radiômetro e de seu modelo de 1ª ordem minimizando-se a função objetivo  $J_2$ , usando Laguerre.

FIG. 4.40: Resposta ao degrau do sistema radiômetro e de seu modelo de 1ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_2$ , usando CGO.

FIG. 4.41: Resposta ao degrau do sistema radiômetro e de seu modelo de 2ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_2$ , usando Laguerre.

FIG. 4.42: Resposta ao degrau do sistema radiômetro e de seu modelo de 2ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_2$ , usando CGO.

FIG. 4.43: Resposta ao degrau do sistema radiômetro e de seu modelo de 4ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_2$ , usando Laguerre.

FIG. 4.44: Resposta ao degrau do sistema radiômetro e de seu modelo de 4ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_2$ , usando CGO.

FIG. 4.45: Resposta ao degrau do sistema radiômetro e de seu modelo de 1ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_\infty$ , usando Laguerre.

FIG. 4.46: Resposta ao degrau do sistema radiômetro e de seu modelo de 1ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_\infty$ , usando CGO.

FIG. 4.47: Resposta ao degrau do sistema radiômetro e de seu modelo de 2ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_\infty$ , usando Laguerre.

FIG. 4.48: Resposta ao degrau do sistema radiômetro e de seu modelo de 2ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_\infty$ , usando CGO.



FIG. 4.49: Resposta ao degrau do sistema radiômetro e de seu modelo de 4ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_\infty$ , usando Laguerre.

FIG. 4.50: Resposta ao degrau do sistema radiômetro e de seu modelo de 4ª ordem, minimizando-se a função objetivo  $J_\infty$ , usando CGO.

TAB. 4.7: Pólos e zeros do sistema radiômetro usando conjunto gerador otimizado e minimizando-se a função objetivo  $J_2$ .

ordem	Pólos	Zeros
1ª	-0,0656	
2ª	-0,0103 -0,0619	-0,00855
3ª	-0,0103 -0,0619 -0,0945	-0,00857 -0,0945
4ª	-0,0823 -0,113 ± 0,135j -0,319	0,110 ± 0,128j -0,926

TAB. 4.8: Pólos e zeros do sistema radiômetro usando conjunto gerador otimizado e minimizando-se a função objetivo  $J_\infty$ .

ordem	Pólos	Zeros
1ª	-0,0656	
2ª	-0,185 -0,144	-1,944
3ª	-0,1190 -0,2239 -657,4	-0,715 ± 1,275j
4ª	-0,0863 -0,135 ± 0,112j -0,315	-0,133 ± 0,107j -0,973

TAB. 4.9: Características dos modelos do sistema radiômetro usando conjunto gerador e minimizando-se a função objetivo  $J_2$ .

Ordem	Função objetivo $J_2$	Custo $J_\infty$
1 <sup>a</sup>	1,580	0,251
2 <sup>a</sup>	1,050	0,256
3 <sup>a</sup>	1,049	0,256
4 <sup>a</sup>	0,291	0,124

TAB. 4.10: Características dos modelos do sistema radiômetro usando a base de Laguerre e minimizando-se a função objetivo  $J_2$ .

Ordem	Função objetivo $J_2$	Custo $J_\infty$
1 <sup>a</sup>	61,765	1,105
2 <sup>a</sup>	3,775	0,254
3 <sup>a</sup>	1,147	0,191
4 <sup>a</sup>	0,298	0,118

TAB. 4.11: Características dos modelos do sistema radiômetro usando conjunto gerador e minimizando-se a função objetivo  $J_\infty$ .

Ordem	Função objetivo $J_\infty$	Custo $J_2$
1 <sup>a</sup>	0,2451	1,98
2 <sup>a</sup>	0,2019	4,67
3 <sup>a</sup>	0,1658	3,00
4 <sup>a</sup>	0,1088	0,51

TAB. 4.12: Características dos modelos do sistema radiômetro usando a base de Laguerre e minimizando-se a função objetivo  $J_\infty$ .

Ordem	Função objetivo $J_\infty$	Custo $J_2$
1 <sup>a</sup>	0,8195	110,75
2 <sup>a</sup>	0,2055	4,93
3 <sup>a</sup>	0,1300	1,83
4 <sup>a</sup>	0,1088	0,88

## 5 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

### 5.1 CONCLUSÕES

É possível, ao término dessa dissertação na área de identificação, enumerar as seguintes conclusões:

- a) A metodologia desenvolvida identificou os modelos de dois sistemas reais desconhecidos: o sistema radiômetro e o sistema defletor a laser para imageamento. Todas as fases foram cobertas, isto é, desde a coleta de dados até a validação de resultados, tendo se mostrado viável em sistemas em que não havia conhecimento anterior de sua dinâmica.
- b) Os resultados apresentados pela metodologia desenvolvida, em sua maioria, superaram os resultados obtidos usando expansão de funções de Laguerre, citada por diversos autores em identificação (ELSHAFEI & ALII,1988, MAKILA,1990, FU & DUMONT,1993 ).
- c) O método oferece flexibilidade no sentido de possibilitar a ponderação entre os custos  $J_2$  e  $J_\infty$  como função objetivo.
- d) O método fornece modelos lineares que permitem a aplicação de técnicas de controle linear.

### 5.2 PERSPECTIVAS

Apresentam-se como futuros desenvolvimentos:

- a) Usar como função objetivo uma ponderação dos erros no tempo das respostas ao impulso unitário e ao degrau unitário.
- b) Estender a metodologia para o caso multivariável, descorrelacionando as variáveis de entrada entre si e das variáveis de saída.
- c) Tornar o sistema radiômetro multivariável, inserindo outra fonte de luz como mais uma entrada, dependente ou não da primeira.

- d) Estender a metodologia para o domínio freqüencial, sendo sua função objetivo a minimização de uma ponderação do erro quadrático e do maior erro absoluto entre os diagramas de Bode do sistema real e de seu modelo. O diagrama de Bode do sistema real, pode ser obtido a partir das respostas estacionárias do mesmo a sinais de entrada senoidais.
- e) Aplicar a metodologia desenvolvida nessa dissertação para o sistema de posicionamento de antena ou para a coluna de destilação, respectivamente sistemas do Laboratório de Controle do departamento de elétrica e departamento de química do IME.
- f) Implementar um controle, PID por exemplo, para o sistema radiômetro, utilizando-se os modelos levantados.
- g) Modificar o objetivo  $J_\infty$ , que é o maior erro absoluto entre o modelo e os dados amostrais disponíveis, para um objetivo que fosse o maior erro relativo entre o modelo e os dados amostrais disponíveis. Calcular o seu gradiente e aplicar a metodologia dessa dissertação.
- h) Acrescentar algum termo não linear aos candidatos a modelos e testar a aplicação do método.
- i) Aumentar a região de validade do modelo identificado, interpolando vários pontos de operação para a identificação.

## 6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADES, R. **Síntese de controle robusto paramétrico-otimização de um critério combinando estabilidade e desempenho**, Tese de Mestrado IME-RJ, 1994.
- ADES, R. **Problema  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  Soluções aproximadas por meio de expansões de base**, Tese de Doutorado PUC-RJ, 1999.
- AGUIRRE,L.A. **Introdução à identificação de sistemas:técnicas lineares e não lineares aplicadas a Sistemas reais**, ISBN 85-7041-220-7, 2000.
- ARENAS,A., Victoria,L., Abellán,F.J.,Ibáñez,J.A. **Angular Velocity Control for Windmill Radiometer**, IEEE Transactions on Education, vol.42,*n*<sup>o</sup> 2, p.147-152, 1999.
- ÅSTRÖM,K.J. **The future of the control: Modeling, identification, and control**, vol.15, *n*<sup>o</sup> 3, p.127-134, 1994.
- BAZARRA,M.S., Sherali,H.D., Shetty,C.M. **Nonlinear programming: theory and algorithms**, John Wiley and Sons, 1993.
- BERTSEKAS,D.P. **Nonlinear programming**, Athena Scientific, 1993.
- BODIN,P.,Villemoes,L.F.,Wahlberg,B. **Selection of best orthonormal rational basis**, SIAM Journal on Control and Optimization, vol.38, *n*<sup>o</sup> 4, p.995-1032, 2000.
- BORZINO,A.M.C.R., ALVES,F.B. **Sensor de Posição Angular para Sistemas de Varredura com Lasers**, IME Projeto final de Curso DE/3, 2001.
- CARVALHO,M.L. **Controle PID de plantas identificadas via parâmetros de Markov**, Tese de Mestrado IME-RJ, 2000.
- CARVALHO,M.L., Ades,R., Gomes,G.M.P. **Processo de Identificação de Sistemas a partir dos parâmetros de Markov**, CBA 2000, p.616- 621, 2000.
- DEN HOF,P.M.J. **System identification with generalized orthonormal basis functions**,Automatica,vol.31,*n*<sup>o</sup> 12,p.1821-1834, 1995.

- ELSHAFEI,A.L., Dumont,G., Elnaggar,A. **Adaptative GPC based on Laguerre filters modelling**, Automatica, vol.30,  $n^{\circ}$  12, p.1913-1920, 1994.
- FRANCIS,B.A. **A course in  $\mathcal{H}_{\infty}$  Control Theory**, Lectures Notes in Control and Information Sciences, Berlin:Springer-Verlag, 1987.
- FU,Y.,DUMONT,G.A. **An optimun time scale for discrete Laguerre network**, IEEE Transactions on Automatic Control, vol.38,  $n^{\circ}$  6, p.934-938, 1993.
- GOMES,G. M. P. **Synthese d'une commande robuste liee a la qualité de l'identification Bayesienne**, Tese de Doutorado ENSAE-França, 1991.
- KMENTA,J. **Elementos de econometria**, Atlas vol 2 ISBN 85-224-0369-4, 1988.
- LJUNG,L., YUAN,Z.D. **Asymptotic Proprieties of Black-Box identification of Transfer Funtions**, IEEE Transactions on Automatic Control, vol.30, $n^{\circ}$  6,p.514-530,1985.
- LJUNG,L. **System identification**,2 ed. ISBN 0-13656695-2,1988.
- MAKILA,P.M. **Approximation of stable systems by Laguerre filters**, Automatica, vol.26,  $n^{\circ}$  2, p.333-345, 1990.
- MASNADI-Shinazi,M.A., AHMED,N. **Optimum Laguerre network for a class of discrete-time systems**, IEEE Transactions on Signal Processing, vol.39,  $n^{\circ}$  9, p.2104-2108, 1991.
- MENDONÇA,A., ZELENOVSKY,R. **PC e periféricos Um guia prático de Programação**, Editora Ciência Moderna, 1996.
- MONTGOMERY,D. **Applied Statistics**, 1994.
- OLIVEIRA,G.H.C., AMARAL,W.C. **Identificação de sistemas dinâmicos utilizando bases de funções ortonormais: aplicação na modelagem do processo FCC**, Relatório projeto RECOPE, 1999.
- CLAUSEN,Steen Toffner. **System identification and robust control**, Springer IBSN 3-540-760-87-3, 1996.
- SILVEIRA,M.A. **Controle de sistemas lineares**, 20<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1995.

- Optoelectronics Data Book, 1997-1998**, p.8A-3, 1997-1998.
- STRECH,V. **State Space Theory of Discrete Linear Control**, ISBN 0-471-275-94-8  
John Wiley and Sons, 1981.
- TEIXEIRA,M.C.M., MACHADO,E.R.M.D. **Identificação rápida de sistemas dinâmicos lineares com entrada e saída da planta**, CBA 2000, p.2282-2287, 2000.
- ZERVOS,C.C., DUMONT,G.A. **Deterministic adaptative control based on Laguerre series representation**, International Journal of Control, vol.48,*n*<sup>o</sup> 6, p.2333-2359, 1988.
- ZHOU,K., Doyle,J.C., Glover,K. **Robust and optimal control**, Prentice Hall ISBN 0-134-565-67-3, 1996.
- WALHBERG,B. **System identification using Laguerre models**, IEEE Transactions on Automatic Control, vol.36, *n*<sup>o</sup> 5, p.551-562, 1991.
- WALHBERG,B., MAKILA,P.M. **On approximation of stable linear dynamical systems using Laguerre and Kautz functions**, Automatica, vol.32, *n*<sup>o</sup> 5, p.693-708, 1996.
- WALHBERG,B. **Laguerre and Kautz models**, Proceedings SYSID 1994 , vol.3, p.1-12, 1994.



## 7 APÊNDICES

## 7.1 APÊNDICE 1: VETORES DE VARIÁVEIS DE PROJETO OBTIDOS NOS EXEMPLOS

Os vetores de variáveis de projeto obtidos do sistema defletor a laser para imageamento usando Laguerre e CGO estão, respectivamente, na TAB 7.1 e nas TAB 7.3 e TAB 7.4. Já os vetores de variáveis de projeto obtidos do sistema radiômetro usando Laguerre e CGO estão, respectivamente, na TAB 7.5 e na TAB 7.6.

Os modelos podem ser colocados na forma de função de transferência  $F(s)$  da seguinte maneira:

- Para os modelos com CGO:

$$F(s) = \frac{a_1 s + k_1}{s^2 + b_1^2 s + c_1^2} + \frac{a_2 s + k_2}{s^2 + b_2^2 s + c_2^2} + \dots + \frac{a_n s + k_n}{s^2 + b_n^2 s + c_n^2} + \frac{k_{odd}}{s + c_{odd}^2} + K \quad (7.1)$$

onde o vetor de variáveis de projeto é  $\Theta = [k_1, a_1, b_1, c_1, k_2, a_2, b_2, c_2, \dots, k_n, a_n, b_n, c_n, k_{odd}, c_{odd}]$ .

A EQ 7.2 é outra maneira de representar  $F(s)$ . Os vetores  $\delta^t$  para os modelos de 1ª a 5ª ordem do sistema defletor a laser para imageamento estão na TAB 7.2:

$$F(s) = \frac{\alpha_1 s^n + \alpha_2 s^{n-1} + \dots + \alpha_n s + \alpha_{n+1}}{s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n} + K \quad (7.2)$$

onde  $\delta^t$  é:

$$\delta^t = [\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n+1} \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n] \quad (7.3)$$

- Para os modelos com Laguerre:

$$F(s) = \theta_1 \frac{\sqrt{2p}}{s+p} + \theta_2 \frac{\sqrt{2p}(s-p)}{(s+p)^2} + \dots + \theta_n \frac{\sqrt{2p}(s-p)^{n-1}}{(s+p)^n} + K, \quad (7.4)$$

onde  $\Theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]$  é o vetor de variáveis de projeto. O pólo de Laguerre  $p$  foi arbitrado de acordo com (MASNADI & AHMED, 1991). O apêndice 6.4 apresenta as equações utilizadas para a determinação do pólo.

7.1.1 VETORES DE VARIÁVEIS DE PROJETO OBTIDOS NO SISTEMA DEFLETOR A LASER PARA IMAGEAMENTO

O valor adotado para  $p$  é 228,7698896388561 e a constante  $K=0,00585750220080$  é a tensão inicial na entrada do sistema defletor a laser para imageamento.

TAB. 7.1: Vetores de variáveis de projeto para o sistema defletor a laser para imageamento usando Laguerre.

FO	Ordem	$\Theta$	FO	Ordem	$\Theta$
$J_2$	1ª	9,17115732884121	$J_\infty$	1ª	8,66449310209506
	2ª	3,93572428329958		2ª	5,27584665485120
		-5,63061149277890			-5,71995691475125
	3ª	2,10488094837895		3ª	4,43337801797098
		-11,12314126500738			-7,44382641740277
		-3,91778547308206			-1,03433658199318
	4ª	3,89453699681911		4ª	3,34619139686094
		-5,75417332168317			-7,47076272344195
5,03049409909093		3,19597482236344			
5,76360106579495		4,71355146726908			
5ª	3,67772430050315	5ª	3,60188861128579		
	-6,40461141384641		-6,79158889552025		
	3,94643036475572		3,61513538679834		
	4,24591178020679		4,06442864191666		
	-0,93758047022595		-1,68082832326519		
6ª	3,19407742863618	6ª	3,37016344595420		
	-7,85555198707393		-7,10301664717474		
	1,52819629294596		2,96393095007253		
	0,86038360933445		2,29240164154569		
	-5,29039465074075		-4,20904576504135		
	2,64224651360320		-1,69021331091656		
7ª	3,26338699265875	7ª	3,37651155240958		
	-7,64763629959611		-7,22410572214886		
	1,87470355878329		2,44552367949073		
	1,34547621784954		1,54007849865616		
	-4,66672198987060		-4,59904201684504		
	-1,88002207641341		-1,56498720795243		
	0,46131908221241		0,83820710011753		
8ª	3,39931849978696	8ª	3,39367782384734		
	-7,23984281199330		-7,24016352135133		
	2,55421722402241		2,57505728248989		
	2,29658260524273		2,19134500045615		
	-3,44416537859649		-3,37312572965484		
	-0,38621560013249		-0,23901289371641		
	2,22594785233337		2,21524270674583		
	1,07855611954179		0,91411828783877		

TAB. 7.2: Vetores  $\delta$  obtidos usando CGO para o sistema defletor a laser para imageamento.

FO	Ordem	$\delta$	FO	Ordem	$\delta$
$J_2$	1ª	0	$J_\infty$	1ª	0
		109,287771168708			121,017419747956
	1	128,871504699713		1	125,023979441830
		0			0
	2ª	-0,5234495814		2ª	-0,0254099494
		22890,4245546327			2.4223,8732561238
		1			1
		130,1597223207			166,2921218665
		26529,2845072938,			25914,2682699343
	3ª	0		3ª	0
		-0,0018754901			-2,21596932389980
		22,0377414637			22464,57967867568
		25952,6041622971			9752681,97179648
		1			1
		1,2693265385			577,7645966
		173,7592688411			88058,4273898
	30087,3627514622,	10558846,6762286			
	4ª	0		4ª	0
		-16,39163			-16,39335
		17899,64090			17805,67327
-199016,54584		235836,49030			
1633934519,50846		1591603247,14484			
1		1			
188,35410		194,88976			
104951,48962		104550,65796			
10718701,62288		10349219,76764			
1.898415489,76730		1851111007,37945			
5ª	0	5ª	0		
	-21,25690691189982		-16,49459351890027		
	5512,158917740482		8824,532991329441		
	11071486,42		9940545,262		
	1552847661,24		1696260235,725		
	1102638893163,57		871226339575,142		
	1		1		
	859,3348236333117		741,05		
	234641,8384563249		210315,82		
	82059806,60		67469162,15		
9146621618,56	7502154375,38				
1282802050140,32	1013770193604,22				

TAB. 7.3: Vetores de variáveis de projeto para o sistema defletor a laser para imageamento usando CGO.

FO	Ordem	$\Theta$	FO	Ordem	$\Theta$
$J_2$	1ª	109,287771168708 11,352158592079	$J_\infty$	1ª	121,017419747956 11,181412229313
	2ª	22890,4245546327 -0,5234495814 11,4087563880 162,8781277744		2ª	24223,8732561238 -0,0254099494 12,8954302707 160,9790926485
	3ª	22795,7858443790 -0,5101032737 11,3694007676 162,4529436197 -1,3653868722 33,7648228886		3ª	22799,9300277218 -0,0288277618 12,1515063771 156,6825925911 -2,1871415621 20,7389847707
	4ª	25637,7351975303 -10,0131354541 11,3964451886 166,2313111320 -6324,1425099178 -6,3784949562 7,6469038048 265,3014809735		4ª	25637,7242671455 -10,0176595406 11,0469926603 164,1193257693 -6324,1638037132 -6,3756858098 8,5354386804 262,1540113788
	5ª	25800,2999420473 -10,0980167485 11,2577548054 163,7423557417 -6856,9216547141 -6,4614696445 8,0554049292 267,6858551917 -4,6974205189 25,8400509249		5ª	25637,7242827776 -10,0176644950 11,0562105697 164,1388619446 -6324,1638747111 -6,3757162755 8,4407146481 262,1454987455 -0,1012127484 23,4000042472
	6ª	28876,7864451749 -0,5809891024 12,0475434535 166,1482607818 -10562,0153521288 -0,2979792227 8,4917522423 275,5371186037 -1824,4501254096 -0,2284487734 36,4523849221 150,3734070732		6ª	25637,7242549282 -10,0176594026 11,0531898567 164,1224258753 -6324,1638132774 -6,3756858578 8,5330992321 262,1531534196 -0,0000045234 -0,0000011864 11,0469000000 165,4119325769

TAB. 7.4: Vetores de variáveis de projeto para o sistema defletor a laser para imageamento usando CGO.

FO	Ordem	$\Theta$	FO	Ordem	$\Theta$				
$J_2$	7 <sup>a</sup>	29233,7667071281	$J_\infty$	7 <sup>a</sup>	29233,7667071281				
		-0,0326195138			-0,0326195138				
		11,6810906344			11,6810906344				
		160,1378121888			160,1378121888				
		-10573,3429334875			-10573,3429334875				
		0,0114749729			0,0114749729				
		9,9440188365			9,9440188365				
		288,9352531834			288,9352531834				
		-1462,2989033436			-1462,2989033436				
		-0,0032318572			-0,0032318572				
		16,1269478245			16,1269478245				
		131,3887732833			131,3887732833				
		-10,1446038766			-10,1446038766				
		11,5391465969			11,5391465969				
		$J_2$			8 <sup>a</sup>	28871,2832432141	$J_\infty$	8 <sup>a</sup>	28871,2834287952
						-4,4998240864			-4,4997606333
11,9315301894	11,8124049976								
163,5291065869	163,5292975002								
-10693,4037125047	-10693,4035540339								
-3,2057241004	-3,3050438074								
9,0846741612	9,1366976724								
277,1840248640	277,1779603929								
1391,7209949573	1419,1380701402								
-0,9110493714	-0,9937862988								
5,5416671058	5,4863481974								
509,0751184319	509,0745087144								
-1913,4726093626	-1875,7733241266								
-1,3987955563	-5,2883367950								
22,7439818112	22,7555095419								
131,5568117735	131,5557995433								

## 7.1.2 VETORES DE VARIÁVEIS DE PROJETO OBTIDOS NO SISTEMA RADIÔMETRO

O valor adotado para  $p$  é 0,16310670034608 e a constante  $K=0,84745762711864$ .  $K$  é o valor da frequência de rotação em Hertz com que o pivô do radiômetro girava, antes da mudança da tensão de alimentação da fonte luminosa de 4V para 8 V.

TAB. 7.5: Vetores de variáveis de projeto para o sistema radiômetro usando Laguerre.

FO	Ordem	$\Theta$	FO	Ordem	$\Theta$
$J_2$	1ª	1,06740531295008	$J_\infty$	1ª	0,93834986079198
	2ª	0,60072539323836		2ª	0,60320883745519
		-0,5350645363275		3ª	0,64883808309529
	3ª	0,65883775490320		4ª	-0,40351608295308
4ª	-0,36072942821972	0,13385103147874	0,08318195328161		
	0,63533496998906	-0,43123890650781	0,63294972119936		
	-0,43123890650781	0,01635147355076	-0,43886041957356		
	0,01635147355076	-0,08360710905306	0,03323521152022		
			-0,04234695775711		

TAB. 7.6: Vetores de variáveis de projeto para o sistema radiômetro usando CGO.

FO	Ordem	$\Theta$	FO	Ordem	$\Theta$
$J_2$	1ª	0,27483565811135	$J_\infty$	1ª	0,27157673726418
		0,25614631210663			0,25614631210663
	2ª	0,00236287828387		2ª	0,10377498811948
		0,27647301778084		0,05338651944905	
		0,26881721459643		0,57332046407913	
		0,02528538167677		0,16304496297898	
	3ª	0,00237012867511		3ª	0,10377498811948
		0,27641001245201		0,05333580225557	
		0,26884456103734		0,58560471354760	
		0,02531367498308		0,16325692143086	
		0,00001462060859		32,30405289757459	
		0,30747772904409		25,64024584187391	
4ª	0,10237015171161	4ª	0,10332557687260		
	0,08326778205744	0,08252655835013			
	0,63364497612108	0,63314083808648			
	0,16207164968449	0,16476307317377			
	0,00605105768217	0,00777559904259			
	0,04267884114180	0,03703950747000			
	0,47453502518895	0,51876618380956			
	0,17553942803058	0,17534790130502			

## 7.2 APÊNDICE 2: MEIOS DE AQUISIÇÃO DE DADOS

Como meios de aquisição de dados nos exemplos 1 e 2 foram utilizados, respectivamente, o osciloscópio Tektroniks TDS210 e a placa PCL-812PG. Vale ressaltar do osciloscópio citado, a sua capacidade de ser conectado a um computador pessoal, permitindo a aquisição de dados através do *software* Starware.

### 7.2.1 A PLACA PCL-812PG

A placa de aquisição de dados usada no exemplo 2 foi a PCL-812 *enhanced multilab card*, instalada em computador pessoal dedicado no Laboratório de Controle do IME. Um conjunto de *drivers* escritos em linguagem de programação C, desenvolvido por (MENDONÇA & ZELENOVSKY, 1996) e reunidos sob nome PCL812.C, permitiu a utilização da placa, sem conhecimento profundo do seu *hardware*. Esse arquivo encontra-se listado a seguir.

ARQUIVO PCL812.C







7.2.2 ARQUIVO DE COLETA DE DADOS DO SISTEMA RADIÔMETRO  
ARQUIVO RADIO2.C

### 7.2.3 ROTINA MATLAB USADA NO SISTEMA RADIÔMETRO

Arquivo de processamento dos dados coletados do sistema radiômetro PROCESSRADIO.M





#### 7.2.4 DADOS TRATADOS DO SISTEMA RADIÔMETRO

Dados do sistema radiômetro: frequência de rotação em Hertz, quando a tensão da fonte luminosa passa de 4V para 8V

dados48freq=

Dados colhidos do sistema defletor a laser para imageamento

tensão=







### 7.3 APÊNDICE 3: FUNÇÕES DE LAGUERRE NO TEMPO E SUAS INTEGRAIS

Com o auxílio do *software* de manipulação literal Maple, foram desenvolvidos os oito primeiros termos da EQ 7.5 e as oito primeiras integrais  $I_n(t)$  das funções de Laguerre. Esses termos foram usados na identificação via base de Laguerre.

$$f_i(t) = \frac{\sqrt{2pe^{pt}}}{(i-1)!} \frac{\partial^{i-1} (t^{i-1} e^{-2pt})}{\partial t^{i-1}} \quad (7.5)$$

$$f_1(t) = \sqrt{2pe^{-pt}} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} f_2(t) &= \sqrt{2pe^{pt}} \frac{\partial (te^{-2pt})}{\partial t} = \\ &= \sqrt{2pe^{-pt}} (1 - 2pt) \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} f_3(t) &= \frac{\sqrt{2pe^{pt}}}{2!} \frac{\partial^2 (t^2 e^{-2pt})}{\partial t^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2pe^{-pt}}}{2} (2 - 8pt + 8p^2 t^2) \end{aligned} \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} f_4(t) &= \frac{\sqrt{2pe^{pt}}}{3!} \frac{\partial^3 (t^3 e^{-2pt})}{\partial t^3} = \\ &= \frac{\sqrt{2pe^{-pt}}}{3!} (6 - 2pt - 36pt + \\ &+ 72p^2 t^2 - 24p^3 t^3) \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} f_5(t) &= \frac{\sqrt{2pe^{pt}}}{4!} \frac{\partial^4 (t^4 e^{-2pt})}{\partial t^4} = \\ &= \frac{\sqrt{2pe^{-pt}}}{4!} (24 - 192pt + 576p^2 t^2 + \\ &- 384p^3 t^3 + 64p^4 t^4) \end{aligned} \quad (7.10)$$

$$\begin{aligned} f_6(t) &= \frac{\sqrt{2pe^{pt}}}{5!} \frac{\partial^5 (t^5 e^{-2pt})}{\partial t^5} = \\ &= \frac{\sqrt{2pe^{-pt}}}{5!} (120 - 1200pt + 4800p^2 t^2 + \\ &- 4800p^3 t^3 + 1600p^4 t^4 - 160p^5 t^5) \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned}
f_7(t) &= \frac{\sqrt{2pe^{pt}}}{6!} \frac{\partial^6 (t^6 e^{-2pt})}{\partial t^6} = \\
&= \frac{\sqrt{2pe^{-pt}}}{6!} (720 - 8640pt + 86400p^2t^2 + \\
&\quad - 57600p^3t^3 + 28800p^4t^4 + \\
&\quad - 5760p^5t^5 + 384p^6t^6)
\end{aligned} \tag{7.12}$$

$$\begin{aligned}
f_8(t) &= \frac{\sqrt{2pe^{pt}}}{7!} \frac{\partial^7 (t^7 e^{-2pt})}{\partial t^7} = \\
&= \frac{\sqrt{2pe^{-pt}}}{7!} (5040 - 70560pt + 423360p^2t^2 + \\
&\quad - 705600p^3t^3 + 470400p^4t^4 + \\
&\quad - 141120p^5t^5 + 18816p^6t^6 - 896p^7t^7)
\end{aligned} \tag{7.13}$$

Integrais da funções de Laguerre  $f_i(t)$

$$\begin{aligned}
I_1(t) &\triangleq \int_0^t f_1(t)dt = \left[ \frac{-\sqrt{2}e^{-pt}}{\sqrt{p}} \right] \Big|_0^t \\
&= \frac{\sqrt{2}(1 - e^{-pt})}{\sqrt{p}}
\end{aligned} \tag{7.14}$$

$$\begin{aligned}
I_2(t) &\triangleq \int_0^t f_2(t)dt = \left[ \frac{-\sqrt{2}(2e^{-pt} + 4e^{-pt}p^2t^2)}{\sqrt{p}} \right] \Big|_0^t \\
&= \frac{-\sqrt{2}(2e^{-pt} + 4e^{-pt}p^2t^2)}{\sqrt{p}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{p}}
\end{aligned} \tag{7.15}$$

$$\begin{aligned}
I_3(t) &\triangleq \int_0^t f_3(t)dt = \left[ \frac{-\sqrt{2} - 6e^{-pt} - 12e^{-pt}pt + 12e^{-pt}p^2t^2 - 8e^{-pt}p^3t^3}{\sqrt{p}} \right] \Big|_0^t \\
&= \frac{-\sqrt{2}(-6e^{-pt} - 12e^{-pt}pt + 12e^{-pt}p^2t^2 - 8e^{-pt}p^3t^3)}{\sqrt{p}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{p}}
\end{aligned} \tag{7.16}$$

$$\begin{aligned}
I_4(t) &\triangleq \int_0^t f_4(t)dt = \left[ \frac{-\sqrt{2}(24e^{-pt} + 96e^{-pt}p^2t^2 - 64e^{-pt}p^3t^3 + 16e^{-pt}p^4t^4)}{\sqrt{p}} \right] \Big|_0^t \\
&= \frac{-\sqrt{2}(24e^{-pt} + 96e^{-pt}p^2t^2 - 64e^{-pt}p^3t^3 + 16e^{-pt}p^4t^4)}{\sqrt{p}} + \frac{24\sqrt{2}}{\sqrt{p}}
\end{aligned} \tag{7.17}$$

$$\begin{aligned}
I_5(t) &\triangleq \int_0^t f_5(t)dt = \left[ \frac{-\sqrt{2}(-120e^{-pt} - 240e^{-pt}pt + 480e^{-pt}p^2t^2 - 640e^{-pt}p^3t^3)}{\sqrt{p}} + \right. \\
&+ \left. -\sqrt{2} \frac{(240e^{-pt}p^4t^4 - 32e^{-pt}p^5t^5)}{\sqrt{p}} \right] \Big|_0^t \\
&= \frac{-\sqrt{2}(-120e^{-pt} - 240e^{-pt}pt + 480e^{-pt}p^2t^2 - 640e^{-pt}p^3t^3)}{\sqrt{p}} + \\
&+ \frac{-\sqrt{2}(240e^{-pt}p^4t^4 - 32e^{-pt}p^5t^5)}{\sqrt{p}} + \frac{120\sqrt{2}}{\sqrt{p}} \tag{7.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_6(t) &\triangleq \int_0^t f_6(t)dt = \left[ \frac{-\sqrt{2}(+720e^{-pt} + 4320e^{-pt}p^2t^2 - 5760e^{-pt}p^3t^3)}{\sqrt{p}} \right. \\
&+ \left. \frac{(3360e^{-pt}p^4t^4 - 768e^{-pt}p^5t^5 + 64e^{-pt}p^6t^6)}{\sqrt{p}} \right] \Big|_0^t \\
&= \frac{-\sqrt{2}(+720e^{-pt} + 4320e^{-pt}p^2t^2 - 5760e^{-pt}p^3t^3)}{\sqrt{p}} + \\
&+ \frac{(3360e^{-pt}p^4t^4 - 768e^{-pt}p^5t^5 + 64e^{-pt}p^6t^6)}{\sqrt{p}} + \frac{720\sqrt{2}}{\sqrt{p}} \tag{7.19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_7(t) &\triangleq \int_0^t f_7(t)dt = \left[ \frac{-\sqrt{2}(-5040e^{-pt} - 10080e^{-pt}pt + 30240e^{-pt}p^2t^2)}{\sqrt{p}} + \right. \\
&- \left. \frac{(60480e^{-pt}p^3t^3 + 43680e^{-pt}p^4t^4 - 14784e^{-pt}p^5t^5 + 2240e^{-pt}p^6t^6 - 128e^{-pt}p^7t^7)}{\sqrt{p}} \right] \Big|_0^t \\
&= \frac{-\sqrt{2}(-5040e^{-pt} - 10080e^{-pt}pt + 30240e^{-pt}p^2t^2 - 60480e^{-pt}p^3t^3)}{\sqrt{p}} + \\
&+ \frac{(43680e^{-pt}p^4t^4 - 14784e^{-pt}p^5t^5 + 2240e^{-pt}p^6t^6 - 128e^{-pt}p^7t^7)}{\sqrt{p}} + \frac{-5040\sqrt{2}}{\sqrt{p}} \tag{7.20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_8(t) &\triangleq \int_0^t f_8(t)dt = \left[ -\frac{\sqrt{2}(40320e^{-pt} + 322560e^{-pt}p^2t^2)}{\sqrt{p}} + \right. \tag{7.21} \\
&+ \frac{\sqrt{2}(-645120e^{-pt}p^3t^3 + 591360e^{-pt}p^4t^4 - 258048e^{-pt}p^5t^5 + 57344e^{-pt}p^6t^6)}{\sqrt{p}} + \\
&- \left. \frac{\sqrt{2}(6144e^{-pt}p^7t^7 + 256e^{-pt}p^8t^8)}{\sqrt{p}} \right] \Big|_0^t \\
&= -\frac{\sqrt{2}(40320e^{-pt} + 322560e^{-pt}p^2t^2 - 645120e^{-pt}p^3t^3 + 591360e^{-pt}p^4t^4)}{\sqrt{p}} + \\
&+ \frac{\sqrt{2}(-258048e^{-pt}p^5t^5 + 57344e^{-pt}p^6t^6 - 6144e^{-pt}p^7t^7 + 256e^{-pt}p^8t^8)}{\sqrt{p}} + \frac{40320\sqrt{2}}{\sqrt{p}}
\end{aligned}$$

## 7.4 APÊNDICE 4: ESCOLHA DO PÓLO OTIMIZADO PARA A BASE DE LAGUERRE

O uso das funções de Laguerre para identificação, parte da hipótese bastante exigente do conhecimento do pólo dominante do sistema.

Abaixo está apresentado um modo para a escolha desse pólo, ótima no sentido de minimizar uma função objetivo  $J$  na EQ 7.22. A justificativa dessa escolha encontra-se em ( MASNADI & AHMED, 1991).

### Problema 7.1 (Escolha do pólo ótimo de Laguerre)

Segundo ( MASNADI & AHMED, 1991), o pólo  $-p$  será escolhido de maneira a minimizar  $J$ :

$$J = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k^2, \quad (7.22)$$

onde  $a_k$  são os coeficientes de Laguerre. A escolha desse critério deve-se ao aumento linear do peso de se adicionar mais um coeficiente de Laguerre.

Seja  $h(k)$  a resposta ao impulso unitário e  $\Delta h(k)$  definido pela EQ 7.23.

$$\Delta h(k) = h(k+1) - h(k) \quad (7.23)$$

Então,  $p$  é dado por:

$$p = \frac{2M_1 - 1 - M_2}{2M_1 - 1 + \sqrt{4M_1M_2 - M_1^2 - 2M_2}}, \quad (7.24)$$

onde  $M_1, M_2$  são definidos, respectivamente, por EQ 7.25 e EQ 7.26.  $\|h\|^2$ , que aparece tanto na EQ 7.25 como na EQ 7.26, é dado pela EQ 7.27.

$$M_1 = \frac{1}{\|h^2\|} \sum_{n=0}^{\infty} n h^2(n) \quad (7.25)$$

$$M_2 = \frac{1}{\|h^2\|} \sum_{n=0}^{\infty} n [\Delta h(n)](n) \quad (7.26)$$

$$\|h\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} h^2(n) \quad (7.27)$$

Como os dados disponíveis eram de resposta ao degrau  $r(k)$  e não resposta ao impulso  $h(k)$ , calculou-se  $h(k)$  pela aproximação:

$$h(k) \approx \frac{(r(k+1) - r(k))}{T}, \quad (7.28)$$

onde  $T$  é o período de discretização.

7.5 APÊNDICE 5: CÁLCULO DA RESPOSTA AO DEGRAU DE UMA PARCELA GENÉRICA E DE SUAS DERIVADAS

Esse apêndice visa apresentar a resposta ao degrau  $r_i(t)$  e de suas derivadas  $\frac{\partial r_i(t)}{\partial \theta_j}$ , dessa vez calculadas através do *software* de manipulação literal Maple, que permite o cálculo de transformadas inversas de Laplace e de derivadas, entre outras facilidades.

$$\begin{aligned}
 r_i(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{a_i s + k_i}{s(s^2 + b_i^2 s + c_i^2)} \right] = \\
 &= \frac{4e^{-\frac{b_i^2 t}{2}} c_i^2 a_i \cos \left( 1/2 \sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)} t \right)}{(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)} + \\
 &+ \frac{e^{-\frac{b_i^2 t}{2}} b_i^4 a_i \cos \left( 1/2 \sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)} t \right)}{(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)} + \\
 &+ \frac{e^{-\frac{b_i^2 t}{2}} a b_i^2 \sqrt{4c_i^2 - b_i^4} \sin \left( 1/2 \sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)} t \right)}{(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)} + \\
 &- \frac{2e^{-\frac{b_i^2 t}{2}} \sqrt{4c_i^2 - b_i^4} k_i \sin \left( 1/2 \sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)} t \right)}{(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)} \tag{7.29}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial r_i(t)}{\partial a_i} = \frac{-2e^{-1/2b_i^2 t} \sqrt{4c_i^2 - b_i^4} \sin \left( 1/2 \sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)} t \right)}{(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)} \tag{7.30}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial r_i(t)}{\partial b_i} &= -\frac{b_i^3 t e^{-1/2b_i^2 t} \sqrt{4c_i^2 - b_i^4} k_i \sin \left( 1/2 \sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)} t \right)}{c_i^2 (b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)} + \\
 &- \frac{2e^{-1/2b_i^2 t} \sqrt{4c_i^2 - b_i^4} b_i^3 k_i \sin \left( 1/2 \sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)} t \right)}{c_i^2 (b_i^2 - 2c_i)^2 (b_i^2 + 2c_i)} + \\
 &- \frac{2e^{-1/2b_i^2 t} \sqrt{4c_i^2 - b_i^4} b_i^3 k_i \sin \left( 1/2 \sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)} t \right)}{c_i^2 (b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)^2} + \\
 &- \frac{2e^{-1/2b_i^2 t} b_i^5 k_i \sin \left( 1/2 \sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)} t \right)}{c_i^2 (b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i) \sqrt{4c_i^2 - b_i^4}} + \\
 &+ \frac{2e^{-1/2b_i^2 t} \sqrt{4c_i^2 - b_i^4} b_i k_i \sin \left( 1/2 \sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)} t \right)}{c_i^2 (b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)} + \\
 &- \frac{e^{-1/2b_i^2 t} \sqrt{4c_i^2 - b_i^4} b_i^2 k_i \cos \left( 1/2 \sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)} t \right) t b_i^3}{2c_i^2 (b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i) \sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2b_i t e^{-1/2b_i^2 t} \sqrt{4c_i^2 - b_i^4} a_i \sin\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right)}{(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)} + \\
& + \frac{4e^{-1/2b_i^2 t} \sqrt{4c_i^2 - b_i^4} a_i \sin\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right) b_i}{(b_i^2 - 2c_i)^2 (b_i^2 + 2c_i)} + \\
& + \frac{4e^{-1/2b_i^2 t} \sqrt{4c_i^2 - b_i^4} a_i \sin\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right) b_i}{(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)^2} + \\
& + \frac{4e^{-1/2b_i^2 t} a_i \sin\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right) b_i^3}{(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i) \sqrt{4c_i^2 - b_i^4}} + \\
& + \frac{e^{-1/2b_i^2 t} \sqrt{4c_i^2 - b_i^4} a_i \cos\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right) t b_i^3}{(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i) \sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}} + \\
& - \frac{4b_i t e^{-1/2b_i^2 t} k_i \cos\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right)}{(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)} + \\
& - \frac{8e^{-1/2b_i^2 t} k_i \cos\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right) b_i}{(b_i^2 - 2c_i)^2 (b_i^2 + 2c_i)} + \\
& - \frac{8e^{-1/2b_i^2 t} k_i \cos\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right) b_i}{(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)^2} + \\
& + 2 \frac{e^{-1/2b_i^2 t} k_i \sin\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right) t b_i^3}{(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i) \sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}} + \\
& + \frac{b_i^5 t e^{-1/2b_i^2 t} k_i \cos\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right)}{c_i^2 (b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)} + \\
& + \frac{2e^{-1/2b_i^2 t} k_i \cos\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right) b_i^5}{c_i^2 (b_i^2 - 2c_i)^2 (b_i^2 + 2c_i)} + \\
& + \frac{2e^{-1/2b_i^2 t} k_i \cos\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right) b_i^5}{c_i^2 (b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)^2} + \\
& - \frac{2e^{-1/2b_i^2 t} k_i \sin\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right) t b_i^3 b_i^4}{4c_i^2 (b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i) \sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}} + \\
& - \frac{4e^{-1/2b_i^2 t} k_i \cos\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right) b_i^3}{c_i^2 (b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}
\end{aligned} \tag{7.31}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_i(t)}{\partial c_i} = & -\frac{2k_i}{c_i^3} - \frac{2e^{-1/2b_i^2t} \sqrt{4c_i^2 - b_i^4} b_i^2 k_i \sin\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right)}{c_i^3 (b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)} + \\
& + \frac{2e^{-1/2b_i^2t} \sqrt{4c_i^2 - b_i^4} b_i^2 k_i \sin\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right)}{c_i^2 (b_i^2 - 2c_i)^2 (b_i^2 + 2c_i)} + \\
& - \frac{2e^{-1/2b_i^2t} \sqrt{4c_i^2 - b_i^4} b_i^2 k_i \sin\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right)}{c_i^2 (b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)^2} + \\
& + \frac{4e^{-1/2b_i^2t} b_i^2 k_i \sin\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right)}{c_i (b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i) \sqrt{(4c_i^2 - b_i^4)}} + \\
& + \frac{2e^{-1/2b_i^2t} \sqrt{4c_i^2 - b_i^4} b_i^2 k_i \cos\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right)}{c_i (b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i) \sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}} + \\
& - \frac{4e^{-1/2b_i^2t} \sqrt{4c_i^2 - b_i^4} a_i \sin\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right)}{(b_i^2 - 2c_i)^2 (b_i^2 + 2c_i)} + \\
& + \frac{4e^{-1/2b_i^2t} \sqrt{4c_i^2 - b_i^4} a_i \sin\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right)}{(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)^2} + \\
& - \frac{8e^{-1/2b_i^2t} a_i \sin\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right) c_i}{(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i) \sqrt{(4c_i^2 - b_i^4)}} + \\
& - \frac{4e^{-1/2b_i^2t} \sqrt{4c_i^2 - b_i^4} a_i \cos\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right) t c_i}{(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i) \sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}} + \\
& + \frac{8e^{-1/2b_i^2t} k_i \cos\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right)}{(b_i^2 - 2c_i)^2 (b_i^2 + 2c_i)} + \\
& - \frac{8e^{-1/2b_i^2t} k_i \cos\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right)}{(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)^2} + \\
& - \frac{8e^{-1/2b_i^2t} k_i \sin\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right) t c_i}{(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i) \sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}} + \\
& + \frac{2e^{-1/2b_i^2t} k_i \cos\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right) b_i^4}{c_i^3 (b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)} + \\
& - \frac{2e^{-1/2b_i^2t} k_i \cos\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right) b_i^4}{c_i^2 (b_i^2 - 2c_i)^2 (b_i^2 + 2c_i)} + \\
& + \frac{2e^{-1/2b_i^2t} k_i \cos\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right) b_i^4}{c_i^2 (b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)^2} + \\
& + \frac{2e^{-1/2b_i^2t} k_i \sin\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right) t b_i^4}{c_i (b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i) \sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}}
\end{aligned} \tag{7.32}$$



$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_i(t)}{\partial k_i} &= \frac{1}{c_i^2} + \frac{e^{-1/2b_i^2 t} \sqrt{4c_i^2 - b_i^4} \sin\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right)}{c_i^2 (b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)} + \\
&+ \frac{4e^{-1/2b_i^2 t} \cos\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right)}{(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)} + \\
&- \frac{e^{-1/2b_i^2 t} \cos\left(1/2\sqrt{-(b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}t\right) b_i^4}{c_i^2 (b_i^2 - 2c_i)(b_i^2 + 2c_i)}
\end{aligned} \tag{7.33}$$

$$\underbrace{r_{\text{odd}}(t)}_{\text{parcela ímpar}} = \frac{K_{\text{odd}} (1 - e^{-C_{\text{odd}}^2 t})}{C_{\text{odd}}^2} \tag{7.34}$$

$$\frac{\partial r_i(t)}{\partial C_{\text{odd}}} = \frac{-2K_{\text{odd}} (1 - e^{-C_{\text{odd}}^2 t})}{d_i^3} + \frac{2K_{\text{odd}} t e^{-C_{\text{odd}}^2 t}}{C_{\text{odd}}} \tag{7.35}$$

$$\frac{\partial r_i(t)}{\partial K_{\text{odd}}} = \frac{(1 - e^{-C_{\text{odd}}^2 t})}{C_{\text{odd}}^2} \tag{7.36}$$