

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

JOSÉ RICARDO CABRAL AVELAR

ESTABILIZAÇÃO SIMULTÂNEA POR CONTROLADORES  
DE ORDEM PRÉ-FIXADA: SOLUÇÃO BASEADA NO  
MÉTODO DAS PROJEÇÕES ALTERNADAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador: Cel Decílio de Medeiros Sales, Dr. PUC-  
Rio  
Co-orientador: TC Paulo César Pellanda, Dr. ENSAE

Rio de Janeiro  
2007

c2007

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA  
Praça General Tibúrcio, 80-Praia Vermelha  
Rio de Janeiro-RJ CEP 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmar ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do(s) autor(es) e do(s) orientador(es).

629.832 Avelar, José Ricardo Cabral  
A948e Estabilização simultânea por controladores de ordem pré-fixada: solução baseada no método das projeções alternadas / José Ricardo Cabral Avelar. - Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2007.  
139 p.: il.

Dissertação (mestrado) - Instituto Militar de Engenharia - Rio de Janeiro, 2007.

1. Sistemas Lineares - Estabilização Simultânea.  
2. Controladores de Ordem pré-fixada. 3. Inequações Matriciais Lineares. 4. Inequações Matriciais Bilineares.  
5. Projeções alternadas. 6. Algoritmo I. Título. II. Instituto Militar de Engenharia.

CDD 629.832

**INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA**

**JOSÉ RICARDO CABRAL AVELAR**

**ESTABILIZAÇÃO SIMULTÂNEA POR CONTROLADORES DE ORDEM  
PRÉ-FIXADA: SOLUÇÃO BASEADA NO MÉTODO DAS PROJEÇÕES  
ALTERNADAS**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador: Cel Decílio de Medeiros Sales, Dr. PUC-Rio

Co-orientador: TC Paulo César Pellanda, Dr. ENSAE

Aprovada em 14 de dezembro de 2007 pela seguinte Banca Examinadora:

---

Cel Decílio de Medeiros Sales, Dr. PUC-Rio do IME - Presidente

---

TC Paulo César Pellanda, Dr. ENSAE do IME

---

Prof. Glauco Nery Taranto - Ph.D. da COPPE/UFRJ

---

Maj Roberto Ades, Dr. PUC-Rio do IME

Rio de Janeiro  
2007

Eu dedico este trabalho primeiramente a *DEUS*, pois *ELE* é a origem e a essência de tudo e de todos. Dedico à minha mãe e meu pai, pelo amor e apoio incondicional, durante toda a minha existência, que me possibilitaram chegar a este ponto. Dedico à Diana pelo amor e força que me impulsionaram durante este árduo trabalho.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço em primeiro lugar a *DEUS*, pela oportunidade de participar deste curso e chegar ao fim realizando o trabalho aqui apresentado.

Agradeço à minha mãe por todo amor, carinho e dedicação durante toda a minha vida, e por ter me fornecido todo o ambiente familiar necessário ao meu desenvolvimento intelectual e profissional. Agradeço ao meu pai pelo amor e carinho, pela orientação sempre correta e constante que permitiu que eu direcionasse os meus caminhos da forma como escolhi. Apesar de você não estar mais presente fisicamente conosco, tenho certeza que está torcendo e rezando por nós junto a Deus.

Agradeço à minha noiva Diana, que esteve sempre presente durante esta jornada, pelo amor, apoio e compreensão constantes, sem os quais o caminho teria sido muito mais árduo e complicado.

Agradeço aos meus orientadores, TC Decílio e TC Pellanda, pela paciência, disponibilidade, conhecimento e compreensão com os meus defeitos e limitações.

Agradeço aos amigos Jonas e Costa, pela amizade e pelo apoio moral e logístico sempre que precisei.

Agradeço a todos os companheiros do grupo de Mestrado em Controle, Jonas, Costa, Oliveira, Mello Silva, Moreira, Fábio Luis, Rodrigo, Fernando e José, que sempre estiveram dispostos a compartilhar o seu tempo e conhecimento durante a nossa caminhada.

Agradeço ao amigo Pinho pelo auxílio a todos os alunos do Grupo de Mestrado em controle durante o ano de 2006.

A todos os professores do curso de mestrado da Seção de Engenharia Elétrica que ministraram as aulas para a turma de Sistemas de Controle no ano de 2006 e professores com quem mantive contato ao longo deste curso.

Agradeço ao Jaçanã e companheiros de caminhada espiritual, sempre a meu lado nos momentos difíceis, sempre dispostos a aconselhar, consolar e ajudar em tudo o que fosse preciso.

E finalmente, mas não menos importante, agradeço a toda a minha família, pela torcida constante e compreensão pelos momentos de ausência decorrentes das necessidades impostas pelo árduo trabalho.

## RESUMO

Este trabalho trata do problema de  $\alpha$ -estabilização simultânea de plantas com múltiplas entradas e saídas, por controladores de ordem pré-fixada, utilizando como base o método das projeções alternadas.

O objetivo é não apenas solucionar problemas específicos, mas desenvolver uma metodologia generalizada, eficiente e confiável para cálculo de um único controlador que estabilize as várias plantas envolvidas no sistema. Um algoritmo computacional foi proposto para implementar a metodologia desenvolvida e proporcionar resultados que permitam avaliar a sua eficiência ao ser empregada em diversos casos da literatura especializada.

O trabalho apresenta, inicialmente, um estudo das ferramentas a serem utilizadas na metodologia, e um estudo de sua aplicação para solução de problemas de uma única planta, para posterior aperfeiçoamento e adaptação ao problema multiplanta. Em seguida, é feita uma apresentação formal do problema a ser resolvido, é apresentada a metodologia existente (para uma única planta) e é proposta a nova metodologia (para várias plantas), ressaltando as mudanças realizadas.

O método proposto é testado em diversos modelos, tanto acadêmicos quanto reais, resultando em sistemas  $\alpha$ -estáveis em malha fechada.

## ABSTRACT

This dissertation deals with the simultaneous  $\alpha$ -stabilization problem of systems with multiple input and multiple output by a fixed-order controller via the Alternating Projections method.

The objective is not only to solve specific problems, but also to develop a generalized methodology, which is efficient and reliable to compute a unique controller that stabilizes a set of system plants. A computational algorithm was developed to implement and evaluate the methodology. Firstly, some useful techniques are presented and studied. Then, the existing solution of the stabilization problem by a fixed-order controller of a unique system is extended to solve the simultaneous stabilization problem.

The proposed method is tested on both academic and realistic system models yielding  $\alpha$ -stability in closed-loop.

## SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES .....	11
LISTA DE TABELAS .....	13
LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS .....	14
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>16</b>
1.1 Motivação e posicionamento do trabalho .....	16
1.2 Objetivos e metodologia.....	17
1.3 Organização do trabalho .....	18
<b>2 DESIGUALDADES MATRICIAIS .....</b>	<b>20</b>
2.1 Motivação.....	20
2.2 LMI.....	21
2.2.1 Introdução .....	21
2.2.2 Definição.....	23
2.2.3 Fórmula do complemento de Schur .....	24
2.2.4 Lema da eliminação .....	25
2.2.5 Lema da inversão de matrizes .....	27
2.2.6 Problemas envolvendo LMI .....	28
2.2.7 Algoritmos para solução de LMI .....	28
2.2.8 Aplicações em controle.....	30
2.3 BMI.....	31
2.3.1 Introdução .....	31
2.3.2 Definição.....	32
2.3.3 Métodos de solução.....	33
<b>3 MÉTODO DAS PROJEÇÕES ALTERNADAS .....</b>	<b>36</b>
3.1 Introdução .....	36
3.2 Método das projeções alternadas aplicado a conjuntos convexos .....	36
3.3 Método das projeções alternadas aplicado a conjuntos definidos por restrições na forma de LMIs .....	38
3.4 Método das projeções alternadas aplicado a conjuntos não-convexos .....	43



<b>4</b>	<b>SÍNTESE DE CONTROLADORES DE ORDEM PRÉ-FIXADA</b>	<b>47</b>
4.1	Introdução	47
4.2	Estabilização por controladores de ordem pré-fixada para sistemas monoplanta	47
4.2.1	Apresentação do problema de controle	47
4.2.2	Estabilização com determinado grau de estabilidade	49
4.2.3	Problema de $\alpha$ -estabilização por controladores de ordem fixa	50
4.2.4	Cálculo de $P$	52
4.2.5	Algoritmo Conceitual	54
4.3	Estabilização simultânea por controladores de ordem pré-fixada	65
4.3.1	Problema de estabilização simultânea	65
4.3.2	Algoritmo conceitual para estabilização simultânea	67
<b>5</b>	<b>APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS</b>	<b>72</b>
5.1	Introdução	72
5.2	Caso 1: Sistema com três plantas de ordem 3	72
5.2.1	Controlador de ordem 2	73
5.2.2	Controlador de ordem 1	73
5.3	Caso 2: Sistema com três plantas de ordem 3	74
5.3.1	Controlador de ordem 2	74
5.3.2	Controlador de ordem 1	75
5.4	Caso 3: Sistema com três plantas de ordem 4	76
5.4.1	Controlador de ordem 3	76
5.4.2	Controlador de ordem 2	77
5.5	Caso 4: Sistema com três plantas de ordem 5	77
5.5.1	Controlador de ordem 4	78
5.5.2	Controlador de ordem 3	79
5.5.3	Controlador de ordem 2	80
5.5.4	Controlador de ordem 1	81
5.6	Caso 5: Sistema com três plantas de ordem 6	81
5.6.1	Controlador de ordem 5	81
5.6.2	Controlador de ordem 4	83
5.6.3	Controlador de ordem 3	84
5.6.4	Controlador de ordem 1	85
5.7	Caso 6: Modelo de um Helicóptero	85
5.7.1	Controlador de ordem 7	87

5.7.2	Controlador de ordem 6	90
5.7.3	Controlador de ordem 5	94
5.7.4	Controlador de ordem 4	97
5.7.5	Controlador de ordem 3	99
5.7.6	Controlador de ordem 2	102
5.7.7	Controlador de ordem 1	103
5.8	Comentários	104
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>107</b>
6.1	Contribuições	110
6.2	Perspectivas de trabalhos futuros	110
<b>7</b>	<b>APÊNDICE A: DESCRIÇÃO DO MODELO SIMPLIFICADO DE UM HELICÓPTERO</b>	<b>112</b>
7.1	Introdução	112
7.2	Os movimentos do Helicóptero	112
7.3	O voo do Helicóptero	113
7.4	O voo vertical (ascendente ou descendente)	115
7.5	O voo de translação (longitudinal e lateral)	116
7.6	A finalidade do rotor traseiro	117
7.7	O movimento de Rumo	118
7.8	Exemplos de movimentos aclopados	118
7.9	O modelo matemático disponível	119
<b>8</b>	<b>APÊNDICE B: VALORES DAS MATRIZES REFERENTES À REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS DAS PLANTAS A SEREM ESTABILIZADAS</b>	<b>122</b>
8.1	Matrizes para o sistema do caso 1	122
8.2	Matrizes para o sistema do caso 2	122
8.3	Matrizes para o sistema do caso 3	123
8.4	Matrizes para o sistema do caso 4	124
8.5	Matrizes para o sistema do caso 5	126
8.6	Caso 6: Matrizes para o modelo simplificado do helicóptero	128
<b>9</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>136</b>

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG.3.1	Método clássico das projeções alternadas .....	39
FIG.3.2	Conjuntos não possuem interseção .....	40
FIG.3.3	Método clássico das projeções alternadas .....	41
FIG.3.4	Método das projeções alternadas direcional .....	42
FIG.4.1	Diagrama em blocos do sistema (4.1) em MF com o controlador (4.2) .....	48
FIG.4.2	Diagrama representativo do algoritmo para o caso de uma única planta .....	57
FIG.4.3	Diagrama representativo do algoritmo para o caso de várias plantas ....	69
FIG.5.1	Resposta ao degrau para o ponto de operação 1: Entrada 1 - Saída 1 ...	88
FIG.5.2	Resposta ao degrau para o ponto de operação 1: Entrada 1 - Saída 2 ...	89
FIG.5.3	Resposta ao impulso para o ponto de operação 1: Entrada 1 - Saída 1 .....	89
FIG.5.4	Resposta ao impulso para o ponto de operação 1: Entrada 2 - Saída 4 .....	90
FIG.5.5	Resposta ao degrau para o ponto de operação 2: Entrada 1 - Saída 1 ...	92
FIG.5.6	Resposta ao degrau para o ponto de operação 2: Entrada 2 - Saída 2 ...	92
FIG.5.7	Resposta ao impulso para o ponto de operação 2: Entrada 2 - Saída 2 .....	93
FIG.5.8	Resposta ao impulso para o ponto de operação 2: Entrada 2 - Saída 4 .....	93
FIG.5.9	Resposta ao degrau para o ponto de operação 3: Entrada 1 - Saída 1 ...	95
FIG.5.10	Resposta ao degrau para o ponto de operação 3: Entrada 2 - Saída 5 ...	95
FIG.5.11	Resposta ao impulso para o ponto de operação 3: Entrada 1 - Saída 1 .....	96
FIG.5.12	Resposta ao impulso para o ponto de operação 3: Entrada 1 - Saída 2 .....	96
FIG.5.13	Resposta ao degrau para o ponto de operação 4: Entrada 1 - Saída 5 ...	98
FIG.5.14	Resposta ao degrau para o ponto de operação 4: Entrada 2 - Saída 1 ...	98
FIG.5.15	Resposta ao impulso para o ponto de operação 4: Entrada 2 - Saída 4 .....	99

FIG.5.16	Resposta ao impulso para o ponto de operação 4: Entrada 2 - Saída	
	8	99
FIG.5.17	Resposta ao degrau para o ponto de operação 5: Entrada 1 - Saída 1	101
FIG.5.18	Resposta ao degrau para o ponto de operação 5: Entrada 2 - Saída 1	101
FIG.5.19	Resposta ao impulso para o ponto de operação 5: Entrada 1 - Saída	
	4	102
FIG.5.20	Resposta ao impulso para o ponto de operação 5: Entrada 1 - Saída	
	8	102
FIG.7.1	Referência utilizada pelo helicóptero	113
FIG.7.2	Forças aplicadas sobre o helicóptero em vôo	114
FIG.7.3	O vôo estacionário	115
FIG.7.4	O vôo ascendente e descendente	116
FIG.7.5	O vôo de translação longitudinal e lateral	117
FIG.7.6	O rotor traseiro	118
FIG.7.7	Representação dos modelos disponíveis linearizados nas velocidades apresentadas	120

## LISTA DE TABELAS

TAB.5.1	Pólos de MA, Caso 1 .....	73
TAB.5.2	Pólos de MF para $n_c = 2$ , Caso 1 .....	73
TAB.5.3	Pólos de MF para controlador estático, Caso 1 .....	74
TAB.5.4	Pólos de MA, Caso 2 .....	74
TAB.5.5	Pólos de MF para $n_c = 2$ , Caso 2 .....	75
TAB.5.6	Pólos de MF para controlador estático, Caso 2 .....	75
TAB.5.7	Pólos de MA, Caso 3 .....	76
TAB.5.8	Pólos de MF para $n_c = 3$ , Caso 3 .....	77
TAB.5.9	Pólos de MF para controlador estático, Caso 3 .....	77
TAB.5.10	Pólos de MA, Caso 4 .....	78
TAB.5.11	Pólos de MF para $n_c = 4$ , Caso 4 .....	79
TAB.5.12	Pólos de MF para $n_c = 3$ , Caso 4 .....	80
TAB.5.13	Pólos de MF para controlador estático, Caso 4 .....	80
TAB.5.14	Pólos de MF para controlador estático, Caso 4 .....	81
TAB.5.15	Pólos de MA, Caso 5 .....	81
TAB.5.16	Pólos de MF para $n_c = 5$ , Caso 5 .....	82
TAB.5.17	Pólos de MF para $n_c = 4$ , Caso 5 .....	84
TAB.5.18	Pólos de MF para $n_c = 3$ , Caso 5 .....	85
TAB.5.19	Pólos de MF para controlador estático, Caso 5 .....	85
TAB.5.20	Pólos de MA, Caso 6 .....	86
TAB.5.21	Pólos de MF para $n_c = 7$ , Caso 6 .....	88
TAB.5.22	Pólos de MF para $n_c = 6$ , Caso 6 .....	91
TAB.5.23	Pólos de MF para $n_c = 5$ , Caso 6 .....	94
TAB.5.24	Pólos de MF para $n_c = 4$ , Caso 6 .....	97
TAB.5.25	Pólos de MF para controlador estático, Caso 6 .....	100
TAB.5.26	Pólos de MF para controlador estático, Caso 6 .....	103
TAB.5.27	Pólos de MF para controlador estático, Caso 6 .....	104
TAB.7.1	Correspondência entre termos .....	112
TAB.7.2	Os Movimentos do helicóptero .....	113
TAB.7.3	Dados referentes aos estados do modelo .....	120
TAB.7.4	Dados referentes às entradas do modelo .....	121

## LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

### ABREVIATURAS

MIMO	-	<i>Multiple Input Multiple Output</i>
SISO	-	<i>Single Input Single Output</i>
SSP	-	<i>Simultaneous Stability Problem</i>
LMI	-	<i>Linear Matrix Inequality</i>
BMI	-	<i>Bilinear Matrix Inequality</i>
LTI	-	<i>Linear Time Invariant</i>
Tr	-	Traço
min	-	Minimizar
dist	-	Distância
SVD	-	<i>Singular Value Decomposition</i>
MF	-	Malha Fechada
MA	-	Malha Aberta

## SÍMBOLOS

$\alpha$	-	Parâmetro de alfaestabilidade
$\Re$	-	Conjunto de números Reais
$H^m$	-	Conjunto de matrizes hermitianas de ordem $m$
$S^m$	-	Conjunto de matrizes simétricas de ordem $m$
$\lambda_{max}$	-	Maior autovalor
$X^\perp$	-	Complemento ortogonal de uma matriz $X$ qualquer
$Tr(X)$	-	Traço da matriz $X$
$\mathbb{Z}_+$	-	Conjunto dos números naturais positivos
$P_x C$	-	Projeção de um ponto $x$ em um conjunto $C$
$P_X C$	-	Projeção de uma matriz $X$ em um conjunto $C$
$\Gamma_c$	-	Conjunto convexo
$I_n$	-	Matriz identidade de ordem $n$
$Z_{nc}$	-	Conjunto não-convexo
$\Lambda$	-	Matriz diagonal de autovalores
$L$	-	Matriz ortogonal de autovetores
$\Lambda_-$	-	Matriz diagonal obtida substituindo os autovalores negativos de $\Lambda$ por zero
$\Sigma_k$	-	Matriz diagonal obtida substituindo os menores $2n - k$ valores singulares por zero
$A_{MF}$	-	Matriz de estado do sistema em malha fechada
$n_c$	-	Ordem do controlador
$n_p$	-	Ordem da planta
$0_{n \times m}$	-	Matriz de zeros com $n$ linhas e $m$ colunas

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 MOTIVAÇÃO E POSICIONAMENTO DO TRABALHO

Esta dissertação trata do problema de estabilizar simultaneamente uma família de sistemas lineares com várias entradas e várias saídas (MIMO) por um controlador de ordem fixa. Este problema fundamental é reconhecido como um assunto de grande dificuldade na teoria de sistemas lineares e surge naturalmente em muitas aplicações tais como controle robusto e controle não-linear (WANG & HUNT, 1999).

Existem três razões principais para a solução do problema de estabilização simultânea (SSP) (WANG & HUNT, 1999). A primeira é que ele aparece naturalmente na síntese de um controlador confiável para sistemas com sensores redundantes e atuadores de forma que falhas em alguns componentes não comprometam o desempenho ou a segurança do sistema como um todo. Tais projetos são particularmente importantes em sistemas que têm como ponto crítico a segurança, como no caso de missões espaciais, aeronaves, reatores químicos ou nucleares, etc. A segunda razão é que pode ser usado para o projeto de controle de um sistema não-linear cuja dinâmica pode ser representada por um número finito de plantas invariantes no tempo. Uma possível aplicação neste sentido é o projeto de um controle de velocidade para um veículo onde a mudança de marcha automática resulta em características de não-linearidades inerentes da planta do veículo, cuja dinâmica para cada marcha possui normalmente de sete a nove modelos lineares (K. J. HUNT & JOHANSEN, 1996; T. A. JOHANSEN & FRITZ, 1998). Outra aplicação é o projeto de estabilização de sistemas de potência, onde um conjunto de plantas representativo de uma família de pontos de operação é controlado por um único controlador descentralizado de baixa ordem. Um controlador de ordem fixa em tais aplicações poderá levar a uma resposta transitória mais suave e a uma diminuição na complexidade do projeto. Finalmente, a terceira razão é que o SSP está relacionado ao problema de estabilização robusta para sistemas com incertezas paramétricas onde se quer garantir que o controlador irá manter a estabilidade em malha fechada na presença de perturbações contínuas correspondentes a incertezas na modelagem do sistema nominal.

Muitos pesquisadores contribuíram para a solução do SSP via realimentação de estados ou realimentação dinâmica (E.SCHMITENDORF & HOLLOT, 1989). Peterson estudou um problema especial de estabilização simultânea quadrático, usando realimen-



tação de estados não-linear, e obteve as condições necessárias e suficientes para a estabilização simultânea quadrática de um conjunto de sistemas com uma entrada e uma saída (SISO) (PETERSEN, 1989). Em (ZHAO & JIANG, 1998) uma aproximação baseada em realimentação de estados é proposta, o que requer que a equação de estados para a planta tenha formas canônicas, além de um modelo de incertezas de características polinomiais, baseado nos resultados analíticos de um intervalo polinomial. Utilizando representações em espaço de estados, é demonstrado em (ZHAO & JIANG, 1998) que a existência de um compensador é equivalente à solução de um conjunto de inequações matriciais quadráticas acopladas. Um algoritmo baseado em uma heurística de projeto utilizando inequações matriciais lineares (LMI) é então apresentado (WANG & HUNT, 1999).

Com base nesses conceitos, tendo em vista as possibilidades ainda existentes para serem exploradas em relação ao problema de estabilização simultânea e também a sua grande importância em sistemas críticos do mundo atual, pesquisas envolvendo este problema podem ser aplicadas em um vasto campo. Além disso, com o crescimento cada vez maior de outras áreas que podem ser exploradas como ferramentas poderosas para serem aplicadas ao SSP, ampliam-se ainda mais os campos de interesse e as possibilidades ligadas ao assunto em questão. Alguns exemplos práticos que podem ser citados são aplicações militares como estabilização de sistemas de mísseis e helicópteros militares.

## 1.2 OBJETIVOS E METODOLOGIA

Este trabalho tem por objetivo o desenvolvimento de uma metodologia que resolva problemas de  $\alpha$ -estabilização simultânea por realimentação dinâmica de saída com controlador de ordem fixa, centrada no método das projeções alternadas. Para tal, foram escolhidas técnicas de abordagem do problema utilizando desigualdades matriciais baseadas no método proposto por Grigoriads e Beran em (GHAOUI & NICULESCU, 2000) para sistemas monoplanta, ou seja, as soluções do problema de  $\alpha$ -estabilização com controlador de ordem fixa para cada planta separadamente, obtidas com base no método das projeções alternadas, são utilizadas como semente inicial para a solução do problema original de estabilização simultânea.

O trabalho apresenta um estudo do método das projeções alternadas e propõe algoritmos para o desenvolvimento de um controlador de ordem fixa para sistemas MIMO compostos por uma ou várias plantas. O algoritmo foi aplicado a diversos modelos “benchmark” e também a modelos reais, com os resultados apresentados para contro-

ladores de diversas ordens.

Dentre os diversos tópicos abordados destacam-se:

- Estudo das inequações matriciais lineares;
- Estudo de métodos de soluções de LMIs;
- Estudo das inequações matriciais bilineares (BMIs);
- Estudo de métodos de soluções de BMIs;
- Estudo do algoritmo de projeções alternadas e suas variantes;
- Utilização de exemplos práticos e teóricos encontrados na literatura especializada para aplicação dos algoritmos estudados ou desenvolvidos.

O trabalho teve início com o estudo e implementação de um algoritmo baseado no modelo para uma única planta desenvolvido em (GHAOUI & NICULESCU, 2000), e posteriormente modificado para que pudesse ser aplicado com sucesso ao problema de estabilização simultânea.

Após a implementação do método para sistemas monoplanta, os estudos mostravam que o mesmo método não poderia ser aplicado diretamente para estabilização simultânea de sistemas com várias plantas, pois o problema tornava-se do tipo BMI de difícil solução.

Foram, então, realizadas pesquisas com o objetivo de desenvolver uma heurística que pudesse solucionar o problema. A saída encontrada se baseou na utilização de um método para solução de BMIs, através de LMIs alternadas que inserido adequadamente na metodologia inicial, permitiu o cálculo de controladores para estabilização simultânea de diversos sistemas MIMO.

Através do algoritmo proposto, foi possível resolver problemas de  $\alpha$ -estabilização simultânea de sistemas com considerável grau de complexidade, necessitando para isso de um número de iterações relativamente pequeno, conforme está ilustrado no capítulo de apresentação de resultados.

### 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O Capítulo 2 apresenta uma descrição das desigualdades matriciais, LMIs e BMIs, apresentando um breve histórico de ambas, assim como métodos de solução. São apresentados também alguns fundamentos de LMIs que foram empregados na abordagem e

desenvolvimento do problema de controle propriamente dito, assim como técnicas para solução dos problemas específicos de programação de LMIs utilizadas nesta dissertação.

O Capítulo 3 contém os métodos básicos da teoria de projeções alternadas, com os teoremas que garantem a sua aplicação e as proposições e ferramentas que permitem o cálculo das projeções aplicadas a conjuntos convexos e não-convexos.

O Capítulo 4 apresenta a abordagem do problema de controle envolvido na  $\alpha$ -estabilização de um sistema por controladores de ordem fixa, e em seguida estende essa abordagem para problemas de  $\alpha$ -estabilização simultânea, propondo um novo algoritmo para este caso.

O Capítulo 5 apresenta os resultados obtidos pela aplicação do algoritmo a exemplos práticos e acadêmicos encontrados na literatura.

Por fim, o Capítulo 6 é reservado para considerações finais, conclusões e perspectivas de trabalhos futuros.

## 2 DESIGUALDADES MATRICIAIS

### 2.1 MOTIVAÇÃO

Neste capítulo serão descritos, de forma resumida, dois tipos de desigualdades matriciais, as LMI e BMI.

Um grande número de problemas de controle, tais como estabilização de ordem completa,  $H_\infty$ , sincronização de ganho robusto,  $\mu$ -síntese com escalonamento constante, e outros problemas de projetos de controladores, pode ser formulado em termos de LMIs (PETERSEN, 1989; S. BOYD & BALAKRISHNAN, 1994; IWASAKI & SKELTON, 1994, 1995; P.GAHINET & APKARIAN, 1994; APKARIAN & P.GAHINET, 1995; BERAN, 1995). O livro escrito por Skelton, Iwasaki, e Grigoriards (R.E. SKELTON & GRIGORIARDS, 1998) apresenta uma coleção e uma formulação unificada destes problemas. Recentemente, foram desenvolvidos algoritmos baseados em métodos de pontos interiores, que fornecem eficientes ferramentas computacionais para solução numérica (VANDENBERGHE & BOYD, 1994, 1996; NESTEROV & NEMIROVSKII, 1994; VANDENBERGHE & BOYD, 1995) e novos programas baseados nesses algoritmos, como o “MATLAB©LMI Control Toolbox” (GAHINET & NEMIROVSKII, 1993, 1995), utilizado nas implementações desta pesquisa. Esses algoritmos convergem em tempo polinomial e a estrutura do problema pode ser explorada para aumentar a eficiência computacional.

Os problemas de controle citados acima, baseados em LMIs, fornecem controladores de ordem igual à da planta generalizada. Contudo, restrições na implementação frequentemente limitam a ordem dos controladores por razões de simplicidade, limitações de hardware, ou computacionais. Como exemplo, as limitações de ordem do controlador para o sistema de controle do Telescópio Espacial Hubble são discutidas em (G. ZHU & SKELTON, 1996). Para implementação desses controladores de ordem menor que a ordem da planta generalizada, o problema pode ser formulado como um problema de LMIs com uma restrição de posto adicional, que destrói a convexidade do problema de otimização. Portanto, algoritmos de pontos interiores não podem ser utilizados diretamente com convergência garantida para obter uma solução. Recentemente, foram propostas heurísticas para solução destes problemas (DAVID & DE MOOR, 1993; GHAOUI & CAHINET, 1993; IWASAKI & SKELTON, 1995; L. EL GHAOUI & RAMI, 1997; MESBAHI &

PAPAVASSILOPOULOS, 1997), mas a convergência não é garantida.

Alguns problemas de controle formulados como desigualdades matriciais podem levar ao surgimento de BMIs, dependendo do tipo de realimentação utilizada. Técnicas para resolver BMIs são discutidas na literatura especializada (ZHAO & JIANG, 1998; H. TUAN & TUY, 1996; MESBAHI & PAPAVASSILOPOULOS, 1997), porém apenas problemas de baixa ordem foram resolvidos de maneira eficiente.

As considerações sobre LMIs têm a intenção de apresentar os principais conhecimentos teóricos relativos a esta ferramenta que foram utilizados neste trabalho. As considerações sobre BMI têm por objetivo permitir a identificação e caracterização deste tipo de desigualdade matricial, além de citar alguns métodos heurísticos de solução, pois um dos objetivos deste trabalho é tratar as BMIs que surgem durante o desenvolvimento do projeto utilizando técnicas de LMIs. Para ambas as desigualdades matriciais, um pequeno histórico é apresentado como introdução às ferramentas.

## 2.2 LMI

### 2.2.1 INTRODUÇÃO

As considerações sobre o histórico das LMIs foram adaptadas de (S. BOYD & BALAKRISHNAN, 1994) e (PEREZ, 2006). Um dos primeiros problemas de análise dinâmica formulados como LMIs foi publicado por Lyapunov, introduzindo a teoria que hoje possui o seu nome. Ele mostrou que a equação diferencial

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \quad (2.1)$$

é estável, se e somente se, existir uma matriz real simétrica positiva definida  $P$  tal que

$$A^T P + PA < 0, P = P^T. \quad (2.2)$$

A restrição (2.2) é chamada de inequação de Lyapunov em  $P$ , que é uma forma especial de LMI. Lyapunov também mostrou que (2.2) pode ser explicitamente resolvida, tomando-se qualquer  $Q = Q^T > 0$  e então solucionando a equação de Lyapunov

$$A^T P + PA = -Q \quad (2.3)$$

para a matriz  $P$ , que é garantida ser positiva definida se o sistema (2.1) for estável.

Nos anos 1940's, Lur'e, Postnikov e outros, na União Soviética, foram os primeiros a aplicar os métodos de Lyapunov para alguns problemas práticos de engenharia. Apesar

dos problemas tratados não possuírem explicitamente a forma de inequações matriciais, seus critérios de estabilidade podem ser formulados como LMIs. As soluções eram obtidas manualmente, limitando a aplicação dos métodos a sistemas SISO de segunda ou terceira ordem.

Posteriormente, na década de 60, diversos pesquisadores como Popov, Kalman e Yakubovich obtiveram sucesso em reduzir a solução de certas famílias de LMIs a simples critérios gráficos. Esses resultados foram consagrados como critério de Popov, critério do círculo, critério de Tsytkin e outras variações, e podiam ser aplicados para resolver problemas de sistemas de ordem mais elevada, desde que estes não contivessem mais do que uma não-linearidade.

No ano de 1971, Willems mostrou, num trabalho sobre controle ótimo quadrático que a LMI

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA + Q & PB + C^T \\ B^T P + C & R \end{bmatrix} \geq 0 \quad (2.4)$$

poderia ser resolvida pelo estudo das soluções simétricas da seguinte equação algébrica de Ricatti (ARE):

$$A^T P + PA - (PB + C^T)R^{-1}(B^T P + C) + Q = 0 \quad (2.5)$$

Esta conexão foi observada anteriormente na União Soviética, onde foi chamada de equação de resolução de Lur'e (S. BOYD & BALAKRISHNAN, 1994).

Desta forma, em 1971 os pesquisadores conheciam diversos métodos para solução de tipos especiais de LMIs: diretos (para sistemas pequenos), métodos gráficos e resolução das equações de Ricatti ou Lyapunov.

O próximo avanço a ser destacado na teoria de LMIs, foi a observação de que as LMIs que aparecem na teoria de controle podem ser formuladas como um problema de otimização convexo, sendo muito adequadas a ambientes computacionais. Apesar de ser uma observação simples, ela tem importantes consequências, pois pode resolver de maneira confiável muitas LMIs para as quais nenhuma solução analítica havia sido encontrada.

Esta observação foi feita por muitos pesquisadores e, a partir dela, Pyatnitskii e Skorodinskii (PYATNITSKI & SKORODINSKII, 1982) reduziram o problema original de Lur'e, estendido ao caso de múltiplas não-linearidades, a um problema de otimização convexa envolvendo LMIs, cuja solução foi obtida utilizando-se o algoritmo do elip-

sóide (S. BOYD & BALAKRISHNAN, 1994).

Em 1976, Horisberger e Belanger (HORISBERGER & BÉLANGER, 1982) observaram que a existência de uma função quadrática de Lyapunov que prova simultaneamente a estabilidade de um conjunto de sistemas lineares é um problema convexo envolvendo LMIs (S. BOYD & BALAKRISHNAN, 1994).

Finalmente, em épocas mais recentes, houve o desenvolvimento de poderosos e eficientes métodos de pontos interiores para solucionar as LMIs que surgem na teoria de sistemas de controle. Em 1984, N. Karmarkar introduziu um novo algoritmo de programação linear que resolve programas lineares em tempo polinomial, com grande eficiência prática. O trabalho de Karmarkar impulsionou um grande número de publicações na área de programação linear utilizando métodos de pontos interiores. Então, em 1988, Nesterov e Nemirovskii desenvolveram métodos de pontos interiores que se aplicam diretamente a problemas convexos envolvendo LMIs. A partir daí, muitos algoritmos têm sido desenvolvidos e testados em famílias específicas de LMIs que surgem na teoria de controle e têm se mostrado bastante eficientes (S. BOYD & BALAKRISHNAN, 1994).

Este resumo histórico mostra a importância das LMIs na solução de diversos problemas na área de sistemas de controle, principalmente devido à alta eficiência computacional dos algoritmos desenvolvidos atualmente.

## 2.2.2 DEFINIÇÃO

Uma LMI é uma desigualdade da forma

$$F(x) := F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0 \quad (2.6)$$

onde  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \in R^m$  é a variável e as matrizes simétricas  $\{F_i \in R^{n \times n}, i = 0, \dots, m\}$  são dados do problema.

O símbolo na inequação em (2.6) significa que  $F(x)$  é positiva definida, isto é,  $u^T F(x) u > 0$  para todo  $u \in R^n, u \neq 0$ .

A LMI em (2.6) é uma restrição convexa em  $x$ , isto é, o conjunto  $\{x | F(x) > 0\}$  é convexo. Apesar da LMI (2.6) parecer uma forma específica, ela pode representar uma grande variedade de restrições convexas em  $x$ .

Uma LMI pode ainda ser expressa na forma:

$$F(x) < 0 \quad (2.7)$$

onde (2.7) é uma função afim que mapeia um vetor de dimensão finita em  $H^m$  ou  $S^n$ , onde  $H^m$  representa o conjunto das matrizes hermitianas e  $S^n$  representa o conjunto de matrizes simétricas (SCHERER & WEILAND, 2004).

Como os autovalores de uma matriz simétrica são reais, (2.7) significa dizer que todos os autovalores de  $F(x)$  são negativos. Equivalentemente, o máximo autovalor  $\lambda_{max}(F(x))$  é negativo.

Múltiplas LMIs  $F^{(1)}(x) < 0, \dots, F^{(p)} < 0$  podem ser expressas como uma simples LMI  $diag(F^{(1)}(x), \dots, F^{(p)}(x)) < 0$ .

A forma de representação de LMIs expressa em (2.7) é clássica e muito útil para entendimento do problema que representa, porém freqüentemente os problemas práticos são representados de outra maneira, com variáveis matriciais.

Assim, a inequação de Lyapunov costuma ser encontrada de maneira mais frequente conforme expressa em (2.2), onde  $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  é dado e a matriz  $P = P^T$  é a variável.

### 2.2.3 FÓRMULA DO COMPLEMENTO DE SCHUR

Algumas desigualdades matriciais não-lineares podem ser convertidas para a forma de LMIs utilizando o complemento de Schur. O complemento de schur estabelece que dada a LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0 \quad (2.8)$$

onde  $Q(x) = Q(x)^T$ ,  $R(x) = R(x)^T$ , e  $S(x)$  são funções matriciais e linearmente independentes em  $x$ , então a expressão (2.8) é equivalente a

$$Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0, R(x) > 0 \quad (2.9)$$

ou

$$R(x) - S(x)^TQ(x)^{-1}S(x) > 0, Q(x) > 0 \quad (2.10)$$

A demonstração a seguir é reproduzida a partir do trabalho de (PEREZ, 2006), e foi incluída apenas para facilitar a consulta.

**Demonstração 2.1.** *Considere a matriz  $T$ :*

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ S^TQ^{-1} & I \end{bmatrix} > 0$$



Então pode-se afirmar que

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R - S^T Q^{-1} S \end{bmatrix} T^T$$

verificando-se imediatamente que (2.8) e (2.10) são equivalentes. De maneira similar, utilizando a matriz  $P$

$$P = \begin{bmatrix} I & SR^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} > 0$$

e realizando o seguinte produto matricial

$$P \begin{bmatrix} Q - SR^{-1}S^T & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} P^T$$

pode-se concluir que (2.8) e (2.9) são equivalentes, completando assim a demonstração.

## 2.2.4 LEMA DA ELIMINAÇÃO

Em muitos problemas, podem ser encontradas inequações matriciais cuja solução só é possível ou se torna muito facilitada, através de uma mudança de variáveis. Este procedimento é muito útil quando se tem uma inequação matricial e deseja-se expressá-la na forma de uma LMI, pela eliminação de variáveis.

Considere a inequação matricial:

$$G(z) + U(z)XV(z) + V(z)X^T U(z)^T > 0 \quad (2.11)$$

onde o vetor  $z$  e a matriz  $X$  são variáveis independentes,  $G(z) \in R^{n \times n}$ ,  $U(z)$  e  $V(z)$  não dependem de  $X$ .

Para todo  $z$ ,  $U(z)^\perp$  e  $V(z)^\perp$  denotam os complementos ortogonais de  $U(z)$  e  $V(z)$ , respectivamente. Então, (2.11) é verdadeiro para algum  $X$  e  $z = z_0$ , se e somente se, as inequações matriciais

$$U(z)^\perp T G(z) U(z)^\perp > 0 \quad (2.12)$$

$$V(z)^\perp T G(z) V(z)^\perp > 0 \quad (2.13)$$

forem verdadeiras com  $z = z_0$ . Em outras palavras, o conjunto solução da expressão (2.11) é o mesmo conjunto solução das expressões (2.12) e (2.13), separadamente.

A demonstração a seguir é reproduzida a partir do trabalho de (S. BOYD & BALAKRISHNAN, 1994)

**Demonstração 2.2.** *Dadas as matrizes  $G$ ,  $U$ , e  $V$ , existe  $X$  tal que*

$$G + UXV^T + VX^TU^T > 0 \quad (2.14)$$

*se, e somente se,*

$$U^{\perp T}GU^{\perp} > 0 \quad (2.15)$$

$$V^{\perp T}GV^{\perp} > 0 \quad (2.16)$$

*onde  $U^{\perp}$  e  $V^{\perp}$  são os complementos ortogonais de  $U$  e  $V$ , respectivamente.*

*É óbvio que se (2.14) é verdadeiro para algum valor de  $X$ , então as inequações (2.15) e (2.16) também serão. Será demonstrado a seguir que se (2.15) e (2.16) forem verdadeiros, (2.14) também será.*

*Supõe-se inicialmente que (2.15) e (2.16) são verdadeiras e que (2.14) é falsa. Em outras palavras,*

$$G + UXV^T + VX^TU^T \not> 0 \quad (2.17)$$

*para qualquer  $X$ . Por dualidade, isso é equivalente à condição*

*existe  $Z \neq 0$  com  $Z \geq 0$ ,  $V^T ZU = 0$  e  $Tr(GZ) \leq 0$ .*

*Demonstra-se a seguir que  $Z \geq 0$  e  $V^T ZU = 0$  implica que*

$$Z = V^{\perp}HH^TV^{\perp T} + U^{\perp}KK^TU^{\perp T} \quad (2.18)$$

*para algumas matrizes  $H$ ,  $K$ . Isso irá completar a demonstração, desde que (2.15) e (2.16) implica que  $Tr(GZ) > 0$  para  $Z$  da forma (2.18), o que contradiz  $Tr(GZ) \leq 0$ .*

*Seja  $Z = RR^T$ . A condição  $V^T ZU = 0$  é equivalente a*

$$V^T RR^T U = (V^T R)(U^T R)^T = 0 \quad (2.19)$$

*Isso significa que existe uma matriz unitária  $T$ , e matrizes  $M$  e  $N$  tais que*

*$V^T RT = [0 \ M]$  e  $U^T RT = [N \ 0]$ . Em outras palavras,  $RT$  pode ser reescrito como  $RT = [A \ B]$  para algumas matrizes  $A$ ,  $B$  de tal forma que  $V^T A = 0$ ,  $U^T B = 0$ . Da definição de  $V^{\perp}$  e  $U^{\perp}$ , as matrizes  $A$ ,  $B$  podem ser reescritas como  $A = V^{\perp}H$ ,  $B = U^{\perp}K$  para algumas matrizes  $H$ ,  $K$ , obtendo-se*

$$Z = RR^T = (RT)(RT)^T = AA^T + BB^T = V^\perp HH^T V^{\perp T} + U^\perp KK^T U^{\perp T} \quad (2.20)$$

que é o mesmo resultado de (2.18), o que completa a demonstração, conforme comentado anteriormente.

## 2.2.5 LEMA DA INVERSÃO DE MATRIZES

O lema da inversão de matrizes é uma ferramenta que será utilizada no decorrer deste trabalho.

Seja a matriz quadrada  $A$

$$A \triangleq \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

onde  $A_{11}$  e  $A_{22}$  são também matrizes quadradas. Agora, supondo que  $A_{11}$  é não-singular, então  $A$  tem a seguinte decomposição:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & \Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

com  $\Delta := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ , e  $A$  é não-singular se  $\Delta$  é não-singular.

De forma dual, se  $A_{22}$  é não-singular, então

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\Delta} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{bmatrix}$$

com  $\hat{\Delta} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$ , e  $A$  é não-singular se  $\hat{\Delta}$  é não-singular. A matriz  $\Delta(\hat{\Delta})$  é chamada complemento de schur de  $A_{11}(A_{22})$  em  $A$ .

Prosseguindo, se  $A$  é não-singular, então

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1}A_{12}\Delta^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}\Delta^{-1} \\ -\Delta^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & \Delta^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

e

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \hat{\Delta}^{-1} & -\hat{\Delta}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}\hat{\Delta}^{-1} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1}A_{21}\hat{\Delta}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

## 2.2.6 PROBLEMAS ENVOLVENDO LMI

Entre os problemas genéricos envolvendo LMIs, existem dois tipos que foram amplamente utilizados neste trabalho e, conseqüentemente, têm grande peso no funcionamento do algoritmo utilizado para a implementação do método heurístico que resolve os problemas de estabilização simultânea que serão apresentados posteriormente.

Encontrar uma solução  $x$  para um sistema LMI

$$F(x) < 0 \tag{2.23}$$

é um deles. Neste caso, o que se busca é encontrar uma solução para um sistema de LMIs, e este problema será referido genericamente a partir daqui, inclusive na apresentação posterior do algoritmo, como “resolver o problema de viabilidade”.

O outro problema a ser considerado é a minimização de um funcional de custo linear sujeito a restrições LMIs. Podemos citar como exemplo

minimize o traço da matriz  $X$  sujeito a

$$A^T X + X A + X B B^T X + Q < 0 \tag{2.24}$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $Q = Q^T$  são matrizes fixas e  $X$  é a variável (matricial).

## 2.2.7 ALGORITMOS PARA SOLUÇÃO DE LMI

Os algoritmos para solução de LMIs mais empregados atualmente são baseados nos métodos de pontos interiores (SCHERER & WEILAND, 2004).

Muito utilizados no passado, algoritmos baseados nos métodos do elipsóide são bastante simples e, de um ponto de vista teórico, são eficientes para a solução de problemas que seguem determinados padrões, porém na prática têm se demonstrado muito lentos. A idéia básica por trás do algoritmo é calcular um elipsóide inicial que contenha o conjunto solução, e a partir daí, uma sequência de elipsóides de volumes decrescentes é gerada, todas contendo o conjunto solução. Para o correto funcionamento do algoritmo, é necessário algum método eficiente que forneça um elipsóide inicial que contenha o conjunto solução.

Os métodos de pontos interiores tornaram-se interessantes no contexto das LMIs com o trabalho de Yurii Nesterov e Arkadii Nemirovskii (SCHERER & WEILAND, 2004). Uma das formas de implementação deste tipo de método é descrita a seguir.

Seja  $F$  uma função afim e seja  $\mathcal{S} := \{x | F(x) < 0\}$  o domínio de uma função convexa  $f: \mathcal{S} \rightarrow \Re$  que se quer minimizar. Isto é, considera-se o problema convexo de otimização

$$V_{opt} = \inf_{x \in \mathcal{S}} f(x) \tag{2.25}$$

Para resolver este problema, isto é, determinar a solução ótima, torna-se necessário introduzir uma função barreira, definida como uma função contínua  $\phi$  que deve

- ser estritamente convexa no interior de  $\mathcal{S}$  e
- tender a  $+\infty$  ao longo da sequência de pontos  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  no interior de  $\mathcal{S}$  que convergem para um ponto na fronteira de  $\mathcal{S}$

Dada esta função barreira, a restrição do problema de minimização de  $f(x)$  em  $x \in \mathcal{S}$ , é substituída pelo problema de minimizar um funcional

$$f_t(x) := tf(x) + \phi(x) \quad (2.26)$$

onde  $t > 0$  é chamado de parâmetro de penalidade. Note que  $f_t$  é estritamente convexa em  $\mathbb{R}^n$ . A principal idéia é determinar um mapeamento  $t \mapsto x(t)$  que associa com qualquer  $t$  um minimizador  $x(t)$  de  $f_t$ . Subsequentemente, considera-se o comportamento deste mapeamento enquanto o parâmetro de penalidade varia. Em quase todos os métodos de pontos interiores, o problema de otimização em (2.26) é resolvido com a técnica de iteração clássica de Newton-Raphson (SCHERER & WEILAND, 2004), para aproximar o mínimo de  $f_t$ . Sob hipóteses favoráveis e para uma sequência definida de parâmetros de penalidade  $t_n$  com  $t_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ , a sequência  $x(t_n)$  com  $n \in \mathbb{Z}_+$  irá convergir para um ponto  $x_{opt}$  que será solução para o problema convexo de otimização original.

O método descrito nesta seção pode ser aplicado para os dois tipos de problemas citados na seção anterior. Considerando-se o problema de viabilidade em (2.23), uma função barreira normalmente utilizada é a função logarítmica

$$\phi(x) := \begin{cases} \log(\det(-F(x)^{-1})) & \text{se } x \in \mathcal{S} \\ \infty & \text{nos outros casos} \end{cases}$$

Assumindo que o conjunto solução de  $\mathcal{S}$  é limitado e não vazio, então  $\phi$  é estritamente convexo e portanto define uma função barreira para o conjunto solução de  $\mathcal{S}$ . Sabe-se que existe um único  $x_{opt}$  tal que  $\phi(x_{opt})$  é o mínimo global de  $\phi$ . O ponto  $x_{opt}$  obviamente pertence a  $\mathcal{S}$  e é chamado centro analítico do conjunto solução de  $\mathcal{S}$ .

Já os problemas de minimização conforme o exemplo em (2.24), podem ser descritos como solução da LMI

$$\tilde{F}_t(x) := \begin{bmatrix} f(x) - t & 0 \\ 0 & F(x) \end{bmatrix} < 0$$

onde  $f(x)$  é a função custo a ser minimizada e  $F(x)$  é a restrição na forma de LMI e  $t > t_0 := \inf_{x \in \mathcal{S}} f(x)$  é o parâmetro de penalidade. Utilizando-se a mesma função barreira do problema anterior para esta inequação matricial linear, chega-se ao problema de minimização

$$\min g_t(x) = \log\left(\frac{1}{t - f(x)}\right) + \log(\det(-F(x)^{-1}))$$

Devido à estrita convexidade de  $g_t$ , o minimizador  $x(t)$  de  $g_t$  é único para todo  $t > t_0$ . Pode ser mostrado que a sequência  $x(t)$  possui solução para todo  $t > t_0$  e se aproxima do  $\inf_{x \in \mathcal{S}} f(x)$  quando  $t \rightarrow t_0$ .

## 2.2.8 APLICAÇÕES EM CONTROLE

Uma aplicação importante de LMIs na área de controle é a sua utilização para análise da estabilidade de um sistema dinâmico, através da teoria de Lyapunov.

Seja o sistema abaixo, descrito pela sua equação no espaço de estados

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{2.27}$$

Utilizando-se a lei de controle por realimentação de estado,  $u = Fx$ , tem-se o sistema de malha fechada

$$\dot{x} = (A + BF)x \tag{2.28}$$

Através dos resultados obtidos por Lyapunov, pode-se afirmar que o sistema de malha fechada em (2.28) é estável se, e somente se, existir uma matriz simétrica positiva definida  $P$  tal que

$$(A + BF)^T P + P(A + BF) < 0 \tag{2.29}$$

ou

$$A^T P + F^T B^T P + PA + PBF < 0 \tag{2.30}$$

Observa-se que (2.30) é uma BMI, e não uma LMI, já que  $P$  e  $F$  são variáveis. Introduzindo-se as novas variáveis

$$Y = P^{-1}$$

$$K = FY$$

chega-se a

$$YA^T + AY + K^T B^T + BK < 0 \quad (2.31)$$

Após a mudança de variáveis, o sistema em (2.31) é uma LMI em  $Y$  e  $K$ . Resolvendo-se a LMI para estas duas variáveis, chega-se ao valor de  $P$  e em seguida ao valor de  $F$ . O controlador que estabiliza o sistema será determinado por  $F = KY^{-1}$ .

## 2.3 BMI

### 2.3.1 INTRODUÇÃO

Apesar dos avanços nas pesquisas e de sua crescente utilização em diferentes problemas na área de controle, muitos problemas desta área não podem ser expressos como LMIs, sendo muitas vezes descritos na forma de BMI. Em (SAFONOV, 1994), foi mostrado que grande parte dos problemas de controle robusto pode ser formulada não como LMIs, mas como BMIs. Pelas suas próprias características e peculiaridades, o estudo geral das BMIs é mais complexo que o estudo das LMIs, já que o seu conjunto solução não é convexo e os problemas envolvem mais variáveis de decisão e um maior número de dimensões, o que representa um grande esforço computacional para o cálculo das soluções.

Considerando-se a solução computacional de problemas de otimização em geral, estes podem ser geralmente classificados como pertencentes a uma de duas classes: “P” e “NP-hard”. A classe “P” refere-se aos problemas cujo tempo necessário para solução exata pode sempre ser limitado por uma função simples, que é polinomial em relação à quantidade de dados necessários para definir o problema. Tais problemas são ditos serem resolvidos em tempo polinomial. Apesar das consequências exatas de um problema ser “NP-hard” ainda permanecerem uma questão aberta na teoria especializada, é geralmente aceito que um problema definido como tal possui uma solução que não pode ser atingida em tempo polinomial, no pior caso. A vantagem de se formular os problemas de controle em termos de otimização convexa, quando possível, é que estes enquadram-se na classe “P” (NESTEROV & NEMIROVSKII, 1994), significando que podem ser resolvidos de maneira mais eficiente em termos computacionais. Os problemas que envolvem BMIs, entretanto, são “NP-hard” (TOKER & OSBAY, 1995), gerando normalmente grandes

dificuldades na criação de algoritmos que resolvam o problema em tempo polinomial. Uma prova desta dificuldade será apresentada na Seção 2.3.3, onde será apresentada uma BMI envolvendo variáveis unidimensionais. Conseqüentemente, algoritmos para solução de BMIs são atualmente bastante limitados a problemas com um modesto número de variáveis, e mesmo nestes casos, sem garantia de convergência para uma solução.

Pelo exposto acima, existem grandes possibilidades de interesses e pesquisas na área de BMIs, com estudos referentes à sua geometria, conjunto solução, desenvolvimento de algoritmos que resolvem problemas de otimização não convexos, representação de problemas de controle em problemas de otimização com BMIs e finalmente a sua transformação em problemas de LMIs, que é o enfoque apresentado neste trabalho de pesquisa.

### 2.3.2 DEFINIÇÃO

Uma BMI pode ser definida como

$$F(x, y) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i + \sum_{j=1}^n y_j G_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j H_{ij} > 0 \quad (2.32)$$

onde  $F_i, G_j, H_{ij}$  são matrizes simétricas de mesma dimensão,  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_m\} \in \Re^m$  e  $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \in \Re^n$ .

Uma BMI é uma LMI em  $x$  para um  $y$  fixo e uma LMI em  $y$  para um  $x$  fixo, sendo desta forma, um problema convexo em  $x$  e convexo em  $y$  separadamente. O termo bilinear implica que o problema não é convexo considerando-se as variáveis  $x$  e  $y$  simultaneamente. Para verificar isso, seja a BMI a seguir

$$1 - xy > 0 \quad (2.33)$$

onde  $x$  e  $y$  são variáveis escalares. Uma maneira de verificar que o conjunto não é convexo seria traçar o gráfico do conjunto no plano  $xy$  e aplicar a definição de convexidade. Outra maneira seria a escolha de dois elementos do conjunto que contrariem a definição de convexidade. Considerando-se  $(x, y)$  com os valores  $(0, 1, 7, 9)$  e  $(7, 9, 0, 1)$ , verifica-se imediatamente que ambos os pontos satisfazem à inequação (2.33), desde que  $1 - (0, 1)(7, 9) = 1 - (7, 9)(0, 1) = 0,21 > 0$  mas o ponto médio da linha que liga os dois pontos,  $(0, 5(0, 1, 7, 9) + 0, 5(7, 9, 0, 1)) = (4, 4)$  não satisfaz a mesma inequação bilinear:  $1 - (4)(4) = -15 < 0$ , comprovando assim a sua não convexidade. Além de inequações bilineares e inequações gerais quadráticas, inequações polinomiais também podem ser escritas como BMIs.



Como BMIs formam conjuntos que não são necessariamente convexos, podem descrever um número muito maior de restrições que as LMIs, e podem ser usadas para representar um número maior de problemas de otimização e controle.

### 2.3.3 MÉTODOS DE SOLUÇÃO

Algumas técnicas têm sido utilizadas na tentativa de solucionar problemas de otimização envolvendo BMIs. As mais comuns são as que relacionam o problema de otimização de BMIs com problemas de otimização cônica, com o método das LMIs alternadas e com o método conhecido como “*branch and bound*” (VANANTWERP, 1997).

No primeiro método, procura-se aproximar o problema original, expresso na forma de BMIs, por alguma forma de otimização cônica, que esteja especialmente relacionada com ele. Desta forma, é possível encontrar o conjunto solução da BMI investigando o cone relacionado com a mesma, apesar das dificuldades naturais de convergência devido à complexidade natural do problema.

No método conhecido como “*branch and bound*”, é necessário que se estabeleçam limites superiores e inferiores estreitos para a função objetivo em toda a área do seu domínio, para que haja alguma eficiência no método. Existem algoritmos que implementam esses limites inferiores e superiores utilizando LMIs, determinados por algum processo de otimização local ou fixando uma variável.

Finalmente, o método das LMIs alternadas utiliza a condição citada na seção anterior, de convexidade da BMI em relação as duas variáveis separadamente. Assim, uma das variáveis é fixada e resolve-se o problema como uma LMI, procedendo-se da mesma forma para a outra variável e repetindo-se o processo até que a BMI em questão seja satisfeita e a função custo seja minimizada o suficiente para resolver o problema. Este método leva a soluções aceitáveis para problemas com um número moderado de variáveis, desde que seja acompanhado de uma heurística que forneça um ponto inicial adequado para se fixar a primeira variável. Mesmo para sistemas simples e de baixa ordem, sem uma heurística apropriada, torna-se muito difícil encontrar uma solução para o problema. Para ilustrar este fato, considere a seguinte BMI:

$$B(x, y) = B_0 + xF + yG + xyH < 0, \text{ nas variáveis } x \text{ e } y, \text{ unidimensionais.}$$

Definindo-se ainda as seguintes constantes

$$B_0 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

apresenta-se um problema simples de BMI, com variáveis unidimensionais e envolvendo apenas matrizes simétricas e de segunda ordem. Para tentar resolver o problema utilizando-se o método das LMIs alternadas, é necessário inicialmente fixar uma das variáveis conforme descrito anteriormente. Sem uma metodologia para o cálculo do valor inicial de uma das variáveis, é necessário arbitrá-la. Fixando inicialmente a variável  $x$ , é proposto o seguinte algoritmo conceitual

**Algoritmo Função  $LMI-y(x, G, H, B_0, F)$**

Início

$$I \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

minimize  $t_f$

sujeito a  $B(y) = B_0 + xF + yG + yxH < t_f I$

retornar  $y, t_f$

Fim

**Algoritmo Função  $LMI-x(y, G, H, B_0, F)$**

Início

$$I \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

minimize  $t_f$

sujeito a  $B(x) = B_0 + xF + yG + yxH < t_f I$

retornar  $x, t_f$

Fim

**Algoritmo BMI**

Início

Ler  $B_0$

Ler  $F$

Ler  $G$

Ler  $H$

```

 $x \leftarrow 0$ 
Executar Função  $LMI-y$ 
Enquanto  $t_f > 0$  executar
    Função  $LMI-x$ 
    retorna o valor de  $x$ 
    Função  $LMI-y$ 
    retorna o valor de  $y$ 
Fim(enquanto)
Escrever  $x$ 
Escrever  $y$ 
Fim

```

Observando-se o algoritmo acima, nota-se que o valor inicialmente arbitrado foi de  $x = 0$ , iniciando desta forma a alternância de LMIs. Ao minimizar o valor de  $t_f$ , o que se busca é o conjunto solução das LMIs, porque quando  $t_f < 0$ , então obrigatoriamente a LMI será menor que zero e o valor encontrado de  $x$  ou  $y$  estará no seu conjunto solução. Implementando-se o algoritmo acima com o software “MATLAB©LMI Control Toolbox”, conclui-se que apesar da BMI em questão ser uma das mais simples possíveis, o algoritmo não converge para uma solução, pois  $t_f$  converge para 2,29347, mesmo para um número de iterações muito elevado. Um valor inicial de  $x = -3$  resolveria a BMI pelo mesmo método, fornecendo a solução

$$S = \begin{bmatrix} -3,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & -3,0000 \end{bmatrix}$$

cujos dois autovalores são iguais a  $-3,0000$ .

Sendo assim, conclui-se que mesmo para problemas simples, é preciso que haja uma metodologia para cálculo do ponto inicial de uma das variáveis em questão, para que se possa chegar a uma solução desejada, na grande maioria dos problemas a serem tratados, mesmo os mais simples.

## 3 MÉTODO DAS PROJEÇÕES ALTERNADAS

### 3.1 INTRODUÇÃO

O método das projeções alternadas pode ser utilizado para encontrar um ponto na interseção de dois conjuntos convexos fechados, através de projeções sucessivas de um ponto em um conjunto e outro. Muito popular devido a sua simplicidade e apelo intuitivo, o método tem sido redescoberto inúmeras vezes na literatura, em uma grande variedade de aplicações, com exemplos típicos em processamento de sinais (COMBETTES, 1993) e finanças (HIGHAM, 2002). O método se estende de uma maneira óbvia e automática para encontrar pontos na interseção de vários conjuntos.

Um dos grandes atrativos da teoria de projeções alternadas é a sua possibilidade de aplicação em problemas envolvendo conjuntos não-convexos, desde que acompanhados de uma heurística adequada e favorável. Aplicações envolvendo problemas não-convexos que utilizam tais técnicas podem ser encontradas na restauração de fase em processamento de imagens (H. BAUSCHKE & LUKE, 2002) e no projeto de controladores de ordem reduzida (GRIGORIARDS & BERAN, 2000) e (R. ORSI & MOORE, 2005).

Este trabalho aborda aspectos teóricos e práticos do método das projeções alternadas aplicado a conjuntos convexos e não-convexos. Em relação a estes últimos, a teoria existente é escassa e bem mais fraca que a teoria envolvendo conjuntos convexos, o que gera uma motivação a mais para este estudo.

### 3.2 MÉTODO DAS PROJEÇÕES ALTERNADAS APLICADO A CONJUNTOS CONVEXOS

Quando o problema se restringe a encontrar um ponto na interseção de conjuntos convexos, a convergência para este ponto é garantida pelo Teorema (3.1), que será enunciado e demonstrado utilizando-se a norma euclidiana, a distância euclidiana e a projeção euclidiana, para apenas dois conjuntos, sendo análoga a utilização e demonstração para um número maior de conjuntos.

**Teorema 3.1.** *Sejam dois conjuntos,  $C$  e  $D$ , convexos e fechados no espaço de matrizes simétricas, com  $C \cap D \neq \emptyset$  e sejam  $P_C(x)$  e  $P_D(y)$  as projeções de um ponto  $x \in D$  em  $C$  e de um ponto  $y \in C$  em  $D$ , respectivamente. Então, a sequência das projeções*

alternadas

$y_k = P_D(x_k)$  ,  $x_{k+1} = P_C(y_k)$  ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  converge para um ponto  $x^* \in C \cap D$ . (CHENEY & GOLDSTEIN, 1959; L. G. GUBIN & RAIK, 1967)

**Demonstração 3.1.** Esta demonstração é reproduzida a partir do trabalho de Boyd (BOYD & DATORRO, 2003). A sua inclusão aqui é feita apenas para facilitar a consulta.

Sejam os conjuntos  $C$  e  $D$ , fechados e convexos no espaço de matrizes simétricas, com  $C \cap D \neq \emptyset$ .

Seja  $\bar{x}$  um ponto qualquer na interseção  $C \cap D$ . Segundo o teorema, cada projeção leva a um ponto mais próximo de  $\bar{x}$ . Para verificar isso, observa-se inicialmente que já que  $y_k$  é a projeção de  $x_k$  em  $D$ , tem-se

$$D \subseteq \{z | (x_k - y_k)^T(z - y_k) \leq 0\}$$

Em outras palavras, o semiplano que passa através de  $y_k$ , com relação a normal  $x_k - y_k$ , contém  $D$ . Isso é decorrência das condições ótimas para projeções euclidianas, e é simples de se mostrar em qualquer caso: se qualquer ponto de  $D$  está do outro lado do hiperplano, um pequeno passo a partir de  $y_k$  na direção do ponto levaria a um ponto em  $D$  mais próximo de  $x_k$  do que de  $y_k$ , o que seria impossível, já que  $y_k$  é a projeção de  $x_k$  em  $D$ .

Agora, nota-se que

$$\begin{aligned} \|x_k - \bar{x}\|^2 &= \|x_k - y_k + y_k - \bar{x}\|^2 = \\ &= \|x_k - y_k\|^2 + \|y_k - \bar{x}\|^2 + 2(x_k - y_k)^T(y_k - \bar{x}) \geq \\ &\geq \|x_k - y_k\|^2 + \|y_k - \bar{x}\|^2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

utilizando a observação anterior. Assim, tem-se

$$\|y_k - \bar{x}\|^2 \leq \|x_k - \bar{x}\|^2 - \|y_k - x_k\|^2 \quad (3.2)$$

Isso mostra que  $y_k$  é mais próximo de  $\bar{x}$  do que  $x_k$ . De uma maneira similar, pode-se mostrar que

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\|^2 \leq \|y_k - \bar{x}\|^2 - \|x_{k+1} - y_k\|^2 \quad (3.3)$$

isto é,  $x_{k+1}$  está mais próximo de  $\bar{x}$  do que  $y_k$ .

Pode-se tirar uma série de conclusões a partir daí. Inicialmente, que todas as iterações estão mais próximas de  $\bar{x}$  do que  $x_0$ .

$$\|x_k - \bar{x}\| \leq \|x_0 - \bar{x}\| \text{ e}$$

$$\|y_k - \bar{x}\| \leq \|x_0 - \bar{x}\| \text{ com } k = 1, 2, \dots$$

Em particular, conclui-se que as sequências  $x_k$  e  $y_k$  são limitadas. Além disso, a sequência  $x_k$  possui um ponto de acumulação  $x^*$ . Desde que  $C$  é fechado, e  $x_k \in C$ , tem-se que  $x^* \in C$ . Mostrar-se-á a partir de agora que  $x^* \in D$  e que ambas as sequências,  $x_k$  e  $y_k$  convergem para  $x^*$ .

De (3.2) e (3.3), conclui-se que a sequência

$\|x_0 - \bar{x}\|, \|y_0 - \bar{x}\|, \|x_1 - \bar{x}\|, \|y_1 - \bar{x}\|, \dots$  é decrescente, e então converge. Conclui-se ainda de (3.2) e (3.3) que  $\|y_k - x_k\|$  e  $\|x_{k+1} - y_k\|$  devem convergir para zero.

Uma subsequência de  $x_k$  converge para  $x^*$ . De

$\text{dist}(x_k, D) = \text{dist}(x_k, y_k) \rightarrow 0$  e do fato de que  $D$  é um conjunto fechado, conclui-se que  $x^* \in D$ . Então  $x^* \in C \cap D$ .

Desde que  $x^*$  está na interseção, pode-se tomar  $\bar{x} = x^*$  (desde que  $\bar{x}$  foi descrito como qualquer ponto na interseção) para achar que a distância de  $x_k$  e  $y_k$  para  $x^*$  é decrescente. Desde que uma subsequência converge para zero, conclui-se que  $\|x_k - \bar{x}\|$  e  $\|y_k - \bar{x}\|$  convergem para zero.

A Figura 3.1 fornece uma melhor visualização do método, quando existe uma interseção entre os conjuntos.

Note-se que não se pode afirmar que o método converge para a interseção entre os conjuntos em um número finito de passos. O que se afirma é que a sequência  $x_k$  (que pertence a  $C$ ) satisfaz  $\text{dist}(x_k, D) \rightarrow 0$ , da mesma maneira que para  $y_k$ .

O método pode ser útil também quando os conjuntos não se interceptam. Neste caso pode-se provar o seguinte. Supondo-se que a distância entre  $C$  e  $D$  é atingida (isto é, existem pontos em  $C$  e  $D$  cuja distância é  $\text{dist}(C, D)$ ), então  $x_k \rightarrow x^* \in C$  e  $y_k \rightarrow y^* \in D$ , onde  $\text{dist}(C, D) = \|x^* - y^*\|_2$ . Em outras palavras, projeções alternadas levam a um par de pontos em  $C$  e  $D$  que tenham distância mínima. Neste caso, projeções alternadas também levam (no limite) a um hiperplano que separa  $C$  e  $D$ . Um simples exemplo é ilustrado na Figura 3.2.

### 3.3 MÉTODO DAS PROJEÇÕES ALTERNADAS APLICADO A CONJUNTOS DEFINIDOS POR RESTRIÇÕES NA FORMA DE LMIS

Nesta seção, os métodos de projeções alternadas são apresentados como forma de solução de problemas envolvendo conjuntos definidos por restrições na forma de LMIs,

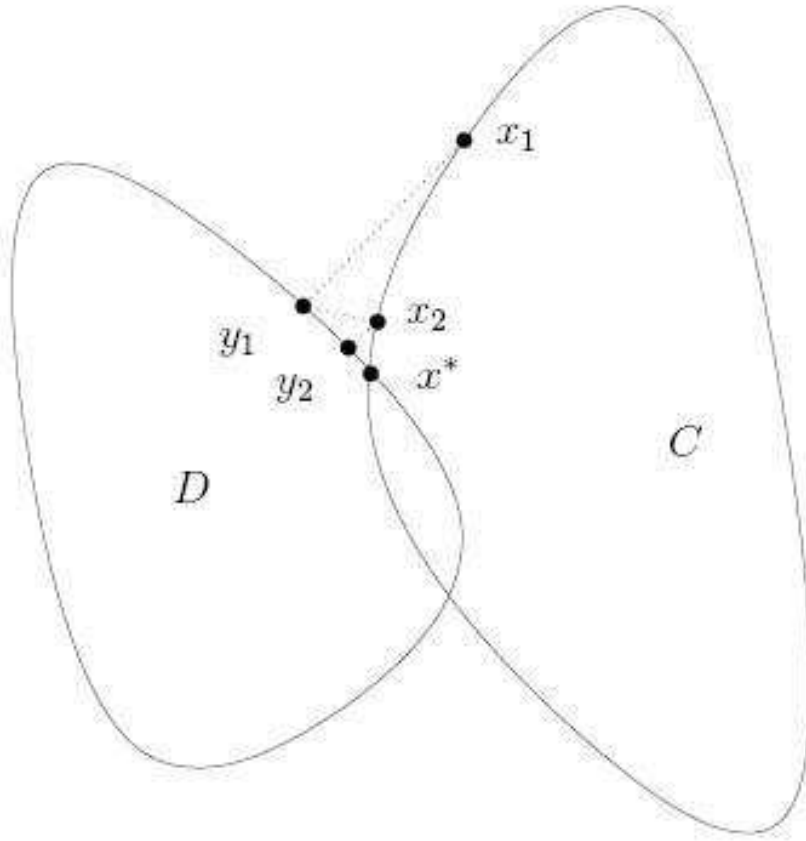


FIG.3.1: Método clássico das projeções alternadas

bastando para isso que a técnica descrita na seção anterior seja ligeiramente adaptada para a solução de problemas LMI. Esta abordagem é muito utilizada nas técnicas de projeto de controladores de ordem reduzida a serem apresentadas nos capítulos posteriores deste trabalho.

**Teorema 3.2.** *Considere uma família  $C_1, C_2, \dots, C_m$  de conjuntos fechados e convexos no espaço de matrizes simétricas. Então, se existe uma interseção não-vazia, a sequência de projeções alternadas*

$$\begin{aligned}
 X_1 &= P_{C_1} X_0 , \\
 X_2 &= P_{C_2} X_1 , \\
 &\vdots \\
 X_m &= P_{C_m} X_{m-1} , \\
 &\vdots \\
 X_{2m} &= P_{C_{2m}} X_{2m-1} , \\
 X_{2m+1} &= P_{C_{2m+1}} X_{2m} , \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

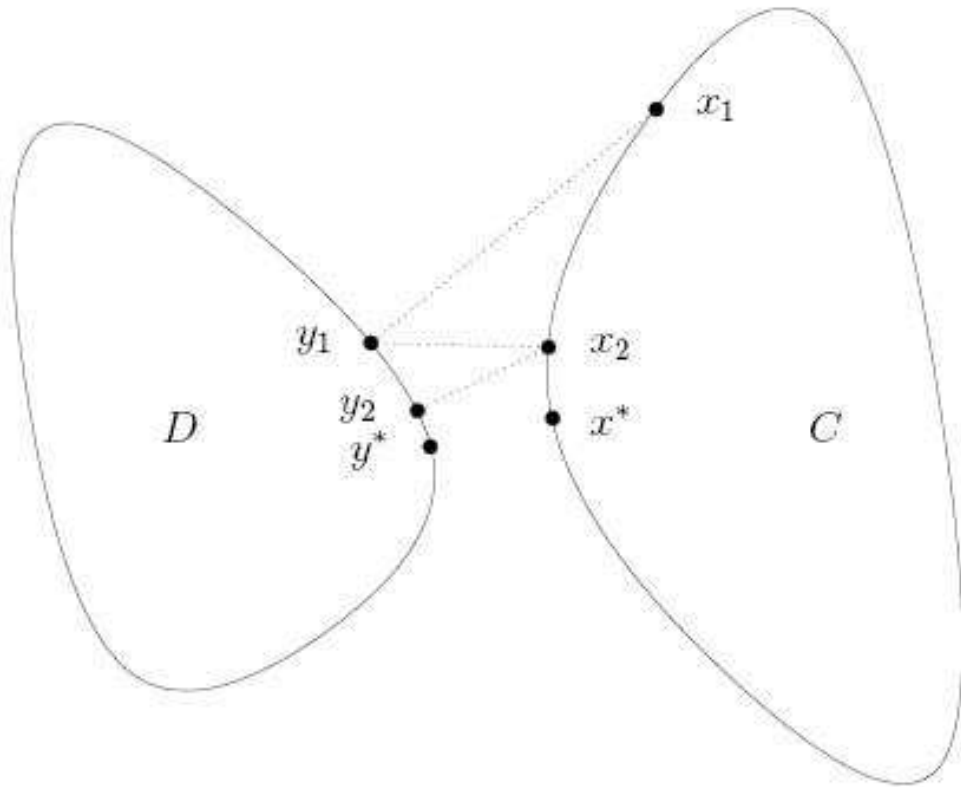


FIG.3.2: Conjuntos não possuem interseção

$X_{3m} = P_{C_{3m}} X_{3m-1}$ , converge para um ponto na interseção dos conjuntos, isto é,  $X_i \rightarrow X$ , onde  $X \in C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_m$ . Se a interseção for vazia, a sequência não converge.

Portanto, pela observância do Teorema 3.2, partindo de qualquer matriz simétrica, a sequência das projeções alternadas nos conjuntos descritos convergem para um ponto na interseção dos mesmos, que será na verdade a solução encontrada para as LMIs que representam as restrições que definem os conjuntos em questão.

Uma representação esquemática do método clássico das projeções alternadas descrito pelo Teorema 3.2 é apresentada na Figura 3.3.

Uma característica marcante do método das projeções alternadas é a facilidade com que seus algoritmos podem ser implementados e, usualmente, a pequena quantidade de cálculos em uma iteração. Contudo, em muitos casos, os algoritmos baseados no método clássico das projeções alternadas podem sofrer de convergência lenta. Por exemplo, considere-se o caso de dois planos que se interceptam com um pequeno ângulo. Neste caso, algoritmos baseados no método das projeções alternadas clássico podem oscilar por



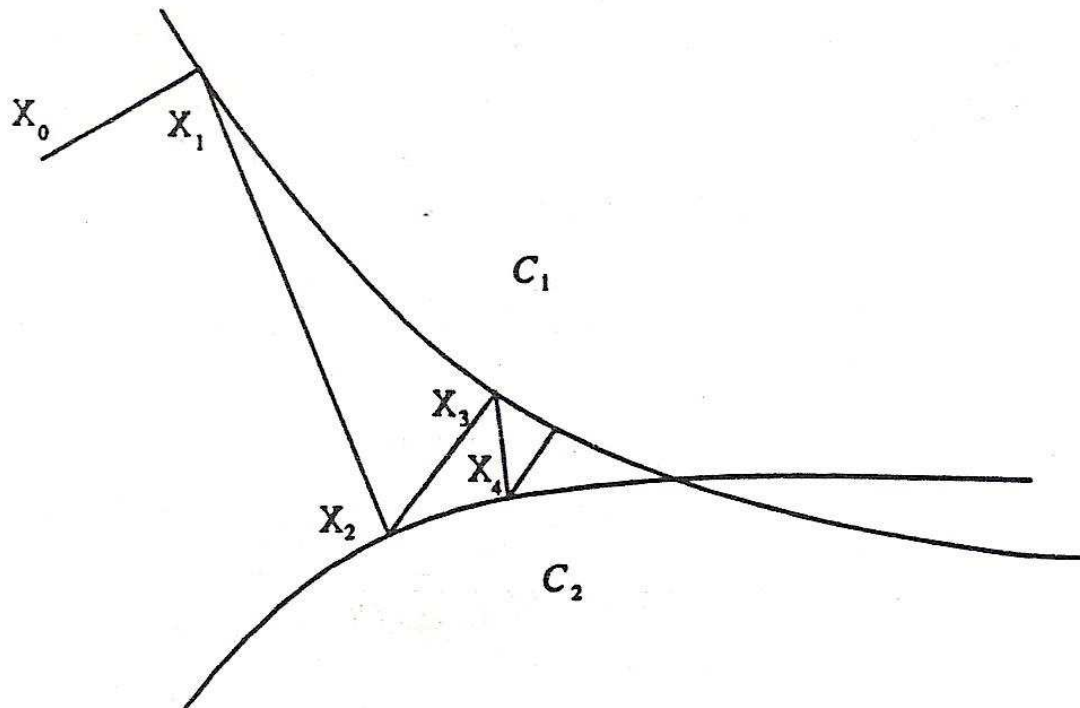


FIG.3.3: Método clássico das projeções alternadas

muitas iterações entre os dois conjuntos, antes de convergir para um ponto na interseção. Uma alternativa para tais problemas é a utilização do método das projeções alternadas direcional. (L. G. GUBIN & RAIK, 1967)

O método das projeções alternadas direcional usa informações sobre a geometria dos conjuntos para fornecer um algoritmo que teoricamente converge mais rapidamente que o método clássico. A idéia básica do método direcional, esquematizado na Figura 3.4, é utilizar em cada iteração o plano tangente a um dos conjuntos. Note-se que no caso, cada iteração é formada por quatro projeções, conforme pode ser visto na figura da referência. Assim, ainda observando a figura, as projeções  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  e  $X_4$  formam uma iteração e, como pode ser observado, a projeção  $X_4$  é realizada no plano tangente ao conjunto  $C_2$ . Desta forma, dependendo da geometria dos conjuntos, a sequência de pontos obtidos tende a se aproximar da interseção dos mesmos mais rapidamente, já que obter o ponto  $X_4$  sobre o plano tangente é mais rápido do que no conjunto  $C_2$  (conforme ocorreria no método clássico).

Este método pode ser descrito pelo teorema a seguir

**Teorema 3.3.** *Seja  $X_0$  uma matriz  $n \times n$  simétrica qualquer. Então, a sequência de matrizes  $X_i, i = 1, 2, \dots, \infty$ , dada por*

$$X_1 = P_{C_1} X_0, X_2 = P_{C_2} X_1, X_3 = P_{C_1} X_2,$$

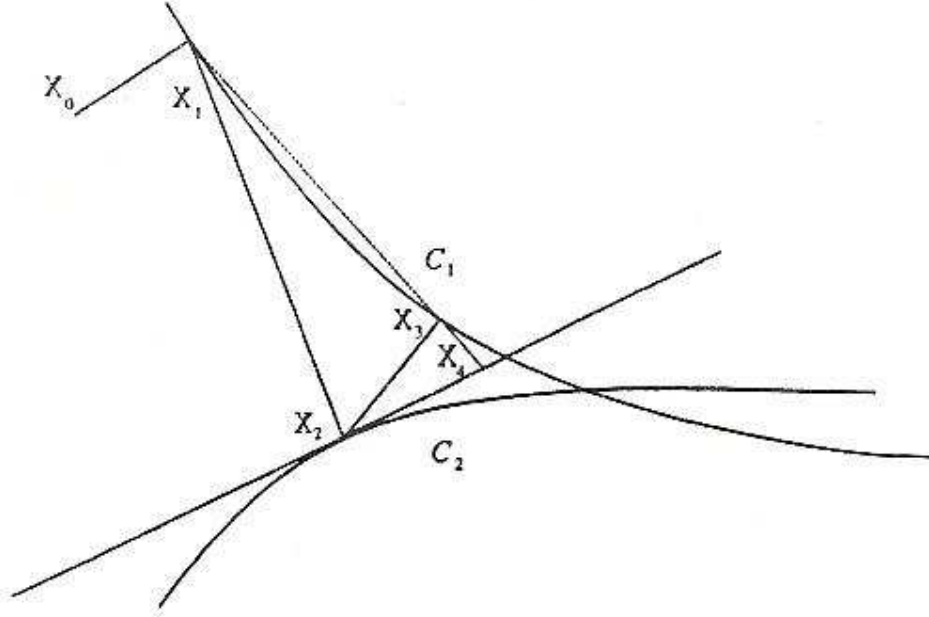


FIG.3.4: Método das projeções alternadas direcional

$$\begin{aligned}
 X_4 &= X_1 + \lambda_1(X_3 - X_1) , \lambda_1 = \frac{\|X_1 - X_2\|_F^2}{\text{Tr}(X_1 - X_3)^T(X_1 - X_2)} \\
 X_5 &= P_{C_1}X_4 , X_6 = P_{C_2}X_5 , X_7 = P_{C_1}X_6 , \\
 X_8 &= X_5 + \lambda_2(X_7 - X_5) , \lambda_2 = \frac{\|X_5 - X_6\|_F^2}{\text{Tr}(X_5 - X_7)^T(X_5 - X_6)} , \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

converge para um ponto na interseção dos conjuntos  $C_1$  e  $C_2$ . Note-se que  $P_{C_k}X_j$  ,  $j = 1, 2, \dots$  e  $k = 1, 2$  , é a projeção do ponto  $X_j$  no conjunto  $C_k$ .

Portanto, partindo de uma matriz simétrica qualquer, a sequência de projeções alternadas descrita pelo Teorema 3.3 fornece um algoritmo numérico otimizado para obter um ponto na interseção dos conjuntos  $C_1 \cap C_2$ . De fato, pode ser facilmente verificado que quando os dois conjuntos são hiperplanos no espaço de matrizes simétricas, então o algoritmo em questão converge para o ponto na interseção dos conjuntos em um ciclo, independentemente do ângulo entre os dois hiperplanos.

Tendo em vista que este trabalho busca utilizar o método das projeções alternadas para encontrar o ponto na interseção de conjuntos definidos por restrições na forma de LMIs, é importante que se defina uma maneira de calcular as projeções sobre tais conjuntos.

**Proposição 3.1.** *Seja  $\Gamma$  um conjunto convexo descrito por uma LMI. Então a projeção  $X^* = P_\Gamma X$  pode ser calculada como solução única  $Y$  para o problema (S. BOYD & BALAKRISHNAN, 1994)*

$$\begin{aligned}
& \text{minimize } \text{Tr } S \\
& \text{sujeito a } \begin{bmatrix} S & Y - X \\ Y - X & I \end{bmatrix} \geq 0 \\
& Y \in \Gamma \\
& S \in S^n.
\end{aligned}$$

O problema descrito na Proposição é típico da teoria de LMIs, conforme descrito na Seção 2.2.6 e pode ser tratado de maneira eficiente pelas ferramentas computacionais para soluções numéricas existentes na literatura especializada. A partir de sua solução, pode-se encontrar as projeções sobre os conjuntos convexos que compõe os problemas a serem abordados nesta pesquisa. Contudo, tendo em vista que tais problemas possuem também componentes que acabam por gerar conjuntos não-convexos, uma abordagem destes conjuntos e de que forma pode-se tratar as projeções sobre eles será feita a seguir.

### 3.4 MÉTODO DAS PROJEÇÕES ALTERNADAS APLICADO A CONJUNTOS NÃO-CONVEXOS

Em contraste com as projeções em conjuntos convexos, quando se considera conjuntos não-convexos, o mapeamento das projeções pode não ser único e normalmente é difícil de calcular. Além disso, mesmo que exista a interseção entre os conjuntos não-convexos, exemplos muito simples mostram que não se deve esperar que haja convergência em geral. Em contrapartida, para alguns conjuntos não-convexos os problemas de projeções são computacionalmente simples.

A decomposição em valores singulares (SVD) fornece uma maneira eficiente de lidar com técnicas de projeções em conjuntos não-convexos (HORN & JOHNSON, 1989). Se uma matriz real  $A$  tem uma decomposição em valores singulares  $UDV^T$ , onde as matrizes  $U$  e  $V$  são ortogonais e a matriz  $D$  é não-negativa na sua diagonal principal e zero fora dela, e então substituindo por zero todas as entradas da diagonal principal de  $D$ , exceto as  $r$  maiores, obtém-se a matriz mais próxima de  $A$  (com relação à norma de Frobenius) do conjunto de matrizes de posto não maior que  $r$ . Este resultado é de grande importância no projeto dos controladores de ordem fixa  $r$ , menor que a ordem da planta generalizada, um dos objetivos a ser atingido neste trabalho, a ser abordado nos capítulos posteriores. É apresentada a seguir uma técnica para aplicar o método das projeções alternadas a conjuntos não-convexos. Algumas particularizações são feitas para esta abordagem, de maneira a direcionar a teoria a ser apresentada para os problemas de controle a serem abordados posteriormente.

Inicialmente, devem ser apresentados os conjuntos  $D$ ,  $P$  e  $R_k$ , que são definidos a seguir no espaço de matrizes simétricas:

$$D \triangleq \left\{ Z \in S^{2n} : Z = \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix}, X, Y \in S^n \right\} \quad (3.4)$$

$$P \triangleq \{ Z \in S^{2n} : Z \geq -J \} \quad (3.5)$$

$$R_k \triangleq \{ Z \in S^{2n} : \text{posto}(Z + J) \leq k \} \quad (3.6)$$

onde  $k$  é uma restrição que destrói a convexidade do problema, sendo no caso específico deste trabalho, resultado da restrição na ordem do controlador. Além disso

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \in S^{2n} \quad (3.7)$$

onde  $I_n$  é uma matriz identidade de ordem  $n$  apropriada, sendo no caso específico a ordem da planta.

Assim, a conexão entre o conjunto não convexo ( $Z_{nc}$ ) do problema original e os três conjuntos acima definidos é dada por

$$(X, Y) \in Z_{nc} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{bmatrix} \in D \cap P \cap R_k \quad (3.8)$$

Deve-se notar que os conjuntos  $D$  e  $P$  são convexos, e o conjunto  $R_k$  é o único conjunto não-convexo entre eles.

Sendo assim, as projeções no conjunto  $Z_{nc}$  serão tratadas através de projeções alternadas nos conjuntos definidos de (3.4) a (3.6), a partir dos resultados a seguir.

**Teorema 3.4.** *Seja*

$$Z = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \in S^{2n} \quad (3.9)$$

A projeção ortogonal  $Z^* = P_D Z$ , de  $Z$  no conjunto  $D$  é dada por

$$Z^* = \begin{bmatrix} Z_{11} & 0 \\ 0 & Z_{22} \end{bmatrix} \in S^{2n} \quad (3.10)$$

A projeção no conjunto  $P$  é calculada através do Teorema 3.5 (HIGHAM, 1988)

**Teorema 3.5.** *Seja  $Z \in S^n$  e seja  $Z + J = L\Lambda L^T$  uma decomposição de autovalores-autovetores de  $Z + J$ , onde  $\Lambda$  é a matriz diagonal de autovalores e  $L$  é a matriz ortogonal de autovetores normalizados. A projeção ortogonal,  $Z^* = P_P Z$ , de  $Z$  no conjunto  $P$  é dada por*

$$Z^* = L\Lambda_-L^T - J \quad (3.11)$$

onde  $\Lambda_-$  é a matriz diagonal obtida substituindo os autovalores negativos de  $\Lambda$  por zero.

Portanto, essa projeção requer uma decomposição de autovalores-autovetores da matriz simétrica  $Z + J$ .

Nota-se que a restrição de posto é expressa pelo conjunto  $R_k$ , definido em (3.6), que é fechado porém não-convexo. Sendo assim, dada uma matriz  $Z$  em  $S^n$ , podem existir diversas matrizes em  $R_k$  que minimizam a distância de  $Z$ . Cada uma dessas matrizes é uma projeção de  $Z$  em  $R_k$  e pode ser calculada pelo Teorema 3.6 (HORN & JOHNSON, 1989)

**Teorema 3.6.** *Seja  $Z \in S^n$  e seja  $Z + J = U\Sigma V^T$  uma decomposição de valor singular(SVD) de  $Z + J$ . A projeção ortogonal,  $Z^* = P_{R_k} Z$ , de  $Z$  no conjunto  $R_k$  é dada por*

$$Z^* = U\Sigma_k V^T - J \quad (3.12)$$

onde  $\Sigma_k$  é a matriz diagonal obtida substituindo os menores  $2n - k$  valores singulares de  $Z + J$  por zero. O valor  $2n - k$  é definido pela natureza do problema e no caso específico de projetos de controladores de ordem fixa é dado pela diferença entre a ordem da planta e a ordem do controlador ( $n - n_c$ ).

A seqüência de projeções nos dois conjuntos  $P$  e  $R_k$  pode ser calculada em um único passo, através de uma decomposição de autovalores-autovetores de  $Z + J$  seguida por uma substituição do número adequado de menores autovalores por zero. Definindo esta seqüência de projeções por  $P_{PR_k} Z$ , pode-se usar a seguinte seqüência de iterações para encontrar as projeções no conjunto  $Z_{n_c}$

$$Z_i^a = P_{PR_k} Z_{i-1}$$

$$Z_i^b = P_D Z_i^a$$

$$Z_i^c = P_{PR_k} Z_i^b$$

Quando a intenção é utilizar o método clássico das projeções alternadas, as três iterações acima descritas são suficientes. Porém, para uma convergência mais rápida e

com maiores possibilidades de sucesso, pode-se usar o método das projeções alternadas direcional, definido por

$$Z_i^a = P_{PR_k} Z_{i-1}$$

$$Z_i^b = P_D Z_a$$

$$Z_i^c = P_{PR_k} Z_b$$

$$Z_i = Z_i^a + \lambda_i (Z_i^c - Z_i^a), \lambda_i = \frac{\|Z_i^a - Z_i^b\|_F^2}{\text{Tr}(Z_i^a - Z_i^c)^T (Z_i^a - Z_i^b)}$$

Através dos conceitos apresentados nesta seção e na seção anterior, pode-se aplicar o método das projeções alternadas a problemas envolvendo conjuntos convexos e não-convexos, o que será muito utilizado quando for feita a apresentação do algoritmo para o problema de controle envolvendo projeto de controladores de ordem fixa.

## 4 SÍNTESE DE CONTROLADORES DE ORDEM PRÉ-FIXADA

### 4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, é proposto um método para estabilização de sistemas por controladores de ordem pré-fixada, utilizando as técnicas de LMIs e o método das projeções alternadas apresentados nos capítulos anteriores. Inicialmente é apresentado um método aplicável a sistemas de uma única planta e um algoritmo proposto na literatura (GRIGORIARDS & BERAN, 2000) é apresentado. Em seguida, considera-se o problema de estabilização de várias plantas simultaneamente, sendo feitas as adaptações necessárias ao método inicialmente proposto para solução do problema monoponta. Um novo algoritmo é proposto para solução numérica do problema de estabilização simultânea por controladores de ordem pré-fixada.

### 4.2 ESTABILIZAÇÃO POR CONTROLADORES DE ORDEM PRÉ-FIXADA PARA SISTEMAS MONOPLANTA

#### 4.2.1 APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE

Considera-se inicialmente um sistema linear e invariante no tempo (LTI) da forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_w & B_u \\ C_z & D_{zw} & D_{zu} \\ C_y & D_{yw} & D_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

onde  $x \in \mathfrak{R}^n$  é o vetor de estados do sistema,  $u \in \mathfrak{R}^{n_u}$  é a entrada de controle,  $w \in \mathfrak{R}^{n_w}$  é a entrada externa (que inclui distúrbios da planta e entradas de ruídos),  $z \in \mathfrak{R}^{n_z}$  é a saída controlada, e  $y \in \mathfrak{R}^{n_y}$  é a saída medida. Sem perda de generalidade considera-se que  $D_{yu} = 0$ . É importante ainda ressaltar que, neste estudo, o par  $(A, B_u)$  é considerado controlável e que o par  $(C_y, A)$  é considerado observável.

Para estabilização do sistema descrito por (4.1), procura-se um controlador de ordem fixa  $n_c$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ u \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}}_G \begin{bmatrix} x_c \\ y \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

onde  $x_c \in \mathfrak{R}^{n_c}$  é o vetor de estado do controlador. A matriz  $G$  contém todos os parâmetros do controlador a ser projetado.

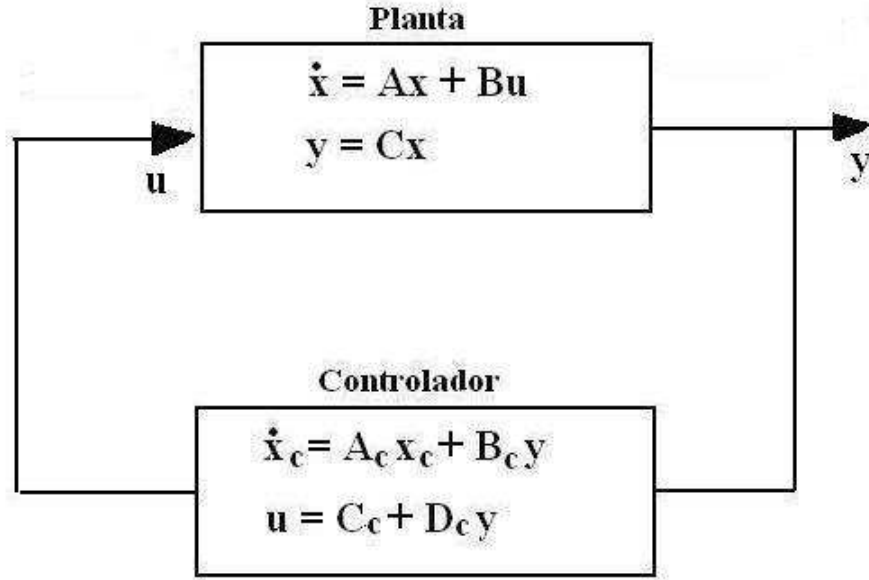


FIG.4.1: Diagrama em blocos do sistema (4.1) em MF com o controlador (4.2)

A figura 4.1 apresenta um diagrama em blocos do sistema representado em (4.1) realimentado pelo controlador representado por (4.2), desconsiderando-se a entrada externa ( $w$ ) e a saída controlada ( $z$ ).

Acrescentando os estados correspondentes ao controlador ao sistema (4.1), obtém-se a descrição do sistema aumentado em malha aberta

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_c \\ z \\ x_c \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B_w & 0 & B_u \\ 0 & 0 & 0 & I_{n_c} & 0 \\ C_z & 0 & D_{zw} & 0 & D_{zu} \\ 0 & I_{n_c} & 0 & 0 & 0 \\ C_y & 0 & D_{yw} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_c \\ w \\ \tilde{y} \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B}_w & \tilde{B}_u \\ \tilde{C}_z & \tilde{D}_{zw} & \tilde{D}_{zu} \\ \tilde{C}_y & \tilde{D}_{yw} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ w \\ \tilde{u} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

São introduzidas as seguintes abreviações



$\tilde{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_c \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{y} = \begin{bmatrix} x_c \\ y \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{u} = \begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ u \end{bmatrix}$ , que permitem enunciar a lei de controle (4.2) como  $\tilde{u} = G\tilde{y}$ . Conectando o sistema (4.1) e o controlador (4.2), e eliminando as variáveis  $\tilde{u}$  e  $\tilde{y}$  obtém-se o sistema de malha fechada

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{MF} & B_w \\ C_z & D_{zw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ w \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

onde a matriz de estado do sistema de malha fechada é uma função afim dos parâmetros ainda não conhecidos do controlador, como segue:

$$\begin{bmatrix} A & B_w \\ C_z & D_{zw} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B}_w \\ \tilde{C}_z & \tilde{D}_{zw} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_u \\ \tilde{D}_{zu} \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} \tilde{C}_y & \tilde{D}_{yw} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

#### 4.2.2 ESTABILIZAÇÃO COM DETERMINADO GRAU DE ESTABILIDADE

Para examinar o problema da estabilidade considera-se a seguinte representação do sistema (4.1) que ignora as variáveis de entrada externa e saída controlada

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_u \\ C_y & D_{yu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

O sistema de malha fechada  $\dot{\tilde{x}} = A_{MF}\tilde{x} = (\tilde{A} + \tilde{B}_u G \tilde{C}_y)\tilde{x}$  pode ser computado via (4.5) por eliminação das colunas e linhas apropriadas, correspondentes à entrada externa e à saída controlada.

Diz-se que o sistema  $\dot{\tilde{x}} = A_{MF}\tilde{x}$  é estável com um determinado grau de estabilidade  $\alpha$  (ou  $\alpha$ -estável) se todos os autovalores de  $A_{MF}$  estão à esquerda da linha  $-\alpha j$  no plano complexo, onde  $\alpha$  é um escalar positivo pré-determinado. O resultado a seguir fornece as condições necessárias e suficientes para a  $\alpha$ -estabilidade

**Teorema 4.1.** *Seja  $A_{MF}$  uma matriz quadrada e  $\alpha$  um escalar positivo. Então as seguintes proposições são equivalentes:*

- (i) *O sistema  $\dot{\tilde{x}} = A_{MF}\tilde{x}$  é  $\alpha$ -estável.*
- (ii) *Existe uma matriz  $P > 0$  tal que  $(A_{MF} + \alpha I)^T P + P(A_{MF} + \alpha I) < 0$*

Note que a  $\alpha$ -estabilidade garante que a resposta livre do sistema decai para zero mais rápido do que  $e^{-\alpha t}$ . Procura-se projetar um controlador de ordem fixa  $n_c < n_p$ , onde  $n_p$  é a ordem da planta, que garanta que o sistema de malha fechada  $\dot{\tilde{x}} = A_{MF}\tilde{x}$  seja  $\alpha$ -estável.

### 4.2.3 PROBLEMA DE $\alpha$ -ESTABILIZAÇÃO POR CONTROLADORES DE ORDEM FIXA

Considere o sistema (4.6) e seja  $\alpha$  um escalar positivo. O problema a ser resolvido é encontrar um controlador (4.2) de ordem  $n_c$ , se ele existe, tal que o sistema de malha fechada seja  $\alpha$ -estável.

Usando a desigualdade matricial da condição (ii) do teorema (4.1), obtém-se a seguinte formulação para o problema de  $\alpha$ -estabilização de ordem fixa: encontre uma matriz  $P > 0$  e uma matriz  $G$  do controlador tal que

$$\left(\tilde{A} + \tilde{B}_u G \tilde{C}_y + \alpha I\right)^T P + P \left(\tilde{A} + \tilde{B}_u G \tilde{C}_y + \alpha I\right) < 0 \quad (4.7)$$

Note-se que (4.7) é uma BMI nas matrizes variáveis  $P$  e  $G$ . Como comentado no Capítulo (2), as diversas técnicas existentes na literatura para resolver diretamente este tipo de BMI conseguem resolver apenas problemas de baixa ordem.

Neste trabalho, o objetivo será eliminar as variáveis da BMI em (4.7), substituindo-as por novas variáveis que permitam a transformação da BMI original em duas LMIs. Estas, em consequência de sua convexidade, podem ser resolvidas de forma mais simples e eficaz, levando assim à solução da desigualdade em (4.7). Com esta finalidade, reescreve-se (4.7) como

$$\underbrace{\tilde{A}^T P + P \tilde{A} + 2\alpha P}_{Q_\alpha} + \underbrace{P \tilde{B}_u}_B G \underbrace{\tilde{C}_y}_{C_\alpha} + \tilde{C}_y^T G^T \tilde{B}_u^T P < 0 \quad (4.8)$$

Para utilização do lema da eliminação, descrito em (2.2.4), são necessários os complementos ortogonais das matrizes coeficientes  $B_\alpha$  e  $C_\alpha^T$ , que podem ser calculados como

$$B_\alpha^{\perp T} = \left(P \tilde{B}_u\right)^{\perp T} = \tilde{B}_u^{\perp T} P^{-1} \text{ e } C_\alpha^\perp = \tilde{C}_y^\perp.$$

Portanto, após a aplicação do lema, obtém-se as seguintes condições necessárias e suficientes para a existência de um controlador que resolve o problema de  $\alpha$ -estabilização

$$\begin{aligned} B_u^{\perp T} P^{-1} \left(\tilde{A}^T P + P \tilde{A} + 2\alpha P\right) P^{-1} B_u^\perp &< 0 \\ \tilde{C}_y^\perp \left(\tilde{A}^T P + P \tilde{A} + 2\alpha P\right) \tilde{C}_y^{\perp T} &< 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Introduzindo a notação

$$P = \begin{bmatrix} Y & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} X & X_{12} \\ X_{12}^T & X_{22} \end{bmatrix}$$

onde  $X, Y \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  e  $X_{22}, Y_{22} \in \mathfrak{R}^{n_c \times n_c}$ , depois de simples manipulações de matrizes e escolhendo-se

$$\tilde{B}_u^{\perp T} = [B_u^{\perp T} \quad 0] \text{ e } \tilde{C}_y^{\perp} = [C_y^{\perp} \quad 0], \text{ são obtidas as condições}$$

$$B_u^{\perp T} (AX + XA^T + 2\alpha X) B_u^{\perp} < 0 \quad (4.11)$$

$$C_y^{\perp} (A^T Y + YA + 2\alpha Y) C_y^{\perp T} < 0$$

Nota-se que as condições acima são independentes do controlador. Além disso, é possível agora mostrar via a fórmula do complemento de Schur, descrita em (2.2.3) e do lema da inversão de matrizes, descrito em (2.2.5), que a relação entre  $X$  e  $Y$  em (4.10) fornece as condições

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.12)$$

$$\text{posto} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \leq n + n_c \quad (4.13)$$

Note também que através da fórmula do complemento de Schur, a condição (4.13) é equivalente a  $\text{posto}(I - XY) \leq n_c$ . Esta restrição de posto é obtida observando que

$$\begin{aligned} \text{posto} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} &= \text{posto} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -X^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -X^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \\ &= \text{posto} \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & Y - X^{-1} \end{bmatrix} \leq \text{posto}(Y - X^{-1}) + \text{posto}(X) \end{aligned}$$

e note ainda que  $\text{posto}(X) = n$ ,  $\text{posto}(Y - X^{-1}) = \text{posto}(P_{12}P_{22}^{-1}P_{12}^T) \leq n_c$

As condições (4.11), (4.12), e (4.13), onde  $X > 0$  e  $Y > 0$ , são as condições necessárias e suficientes para a existência de um controlador de ordem  $n_c$  que  $\alpha$ -estabiliza uma planta de ordem  $n_p$ . Verifica-se que a restrição de posto (4.13) é trivialmente satisfeita quando se procura um controlador de ordem completa  $n_c = n_p$ .

A partir deste ponto, reúnem-se todas as informações necessárias para a solução do problema de  $\alpha$ -estabilização por controladores de ordem fixa para planta única. Em conjunto com a teoria e as ferramentas já apresentadas, tem-se agora as restrições resultantes da formulação do problema de controle que podem ser colocadas em dois conjuntos distintos, um conjunto convexo ( $\Gamma_c$ ) e outro não convexo ( $Z_{nc}$ ), enunciados a seguir

$$\Gamma_c = \left\{ (X, Y) \left| \begin{array}{l} B_u^{\perp T} (AX + XA^T + 2\alpha X) B_u^{\perp} < 0 \\ C_y^{\perp} (A^T Y + YA + 2\alpha Y) C_y^{\perp T} < 0 \\ \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \\ X > 0 \\ Y > 0 \end{array} \right. \right\} \quad (4.14)$$

$$Z_{nc} = \left\{ (X, Y) \left| \begin{array}{l} \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0 \\ \text{posto}(I - XY) \leq n_c \end{array} \right. \right\} \quad (4.15)$$

Aplicando-se o método das projeções alternadas aos dois conjuntos acima, obtém-se as matrizes  $X$  e  $Y$ , que estão na interseção dos conjuntos, caso elas existam. Então pela relação (4.10), encontra-se o parâmetro  $P$ , função de  $X$  e  $Y$ , eliminando assim uma das variáveis da BMI em (4.7), transformando-se a mesma em uma LMI em  $G$ . Finalmente, a solução desta LMI fornece a matriz  $G$ , que contém todos os parâmetros que definem o controlador que  $\alpha$ -estabiliza o sistema.

#### 4.2.4 CÁLCULO DE $P$

De acordo com as equações descritas em (4.10), o valor de  $P$  é obtido a partir dos valores de  $X$  e  $Y$ . Sendo assim, partindo-se das equações citadas, pode-se escrever

$$Q = Y - X^{-1} = P_{12} P_{22}^{-1} P_{12}^T \quad (4.16)$$

Obtendo-se a decomposição em autovalores e autovetores de  $Q$  tem-se

$$Q = V D V^T \quad (4.17)$$

onde  $V$  é a matriz ortogonal de autovetores normalizados e  $D$  é a matriz diagonal de autovalores.

A matriz  $D$  pode ser explicitada como

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_{n_c} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Observando-se a expressão (4.18) é importante ressaltar que devido à restrição da ordem do controlador, já foram substituídos por zero os devidos autovalores na projeção no conjunto não-convexo (ver Seção 3.4). Outro fato importante a ser observado é que  $D$  é uma matriz quadrada que possui a ordem das plantas a serem estabilizadas.

A partir de  $D$  pode ser obtida a matriz  $E$

$$D = EE^T \quad (4.19)$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ (\lambda_1)^{0.5} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & (\lambda_{n_c})^{0.5} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

A matriz  $E$  possui o número de linhas igual à ordem das plantas e o número de colunas igual à ordem do controlador e será fundamental para o cálculo dos elementos ainda indeterminados de  $P$ . Porém, como a visualização das operações acima pode não ser imediata, um exemplo numérico pode ser utilizado para facilitar o entendimento, antes de prosseguir no cálculo de  $P$ .

Seja um sistema com uma planta de ordem 4 a ser estabilizada por um controlador de ordem 3 pela metodologia apresentada. Considere-se que o método das projeções alternadas já foi empregado e que os valores de  $X$  e  $Y$  já foram determinados. Calcula-se então o valor de  $Q$  e a partir de sua decomposição em autovalores e autovetores tem-se

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Destacando-se o que foi dito anteriormente, como se quer um controlador de ordem 3, durante as projeções alternadas no conjunto não-convexo o menor autovalor das projeções

foi substituído por zero. Assim, espera-se que o elemento  $D(1,1)$  seja zero ou um valor muito próximo disso (devido às aproximações que ocorrem durante os cálculos). Já a matriz  $E$  será

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Para o mesmo problema de uma planta de ordem 4 mas agora com um controlador de ordem 2, teríamos as seguintes matrizes

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Prosseguindo-se então com o cálculo de  $P$ , a partir da relação (4.10), nota-se que o seu único elemento conhecido até este ponto é a matriz  $Y$ . Porém, pode-se afirmar que

$$P_{12} = VE \quad (4.25)$$

$$P_{21} = P_{12}^T \quad (4.26)$$

Assim, definindo  $P_{22}$  como uma matriz identidade de ordem adequada, com o número de linhas de  $P_{21}$  e o número de colunas de  $P_{12}$ , todos os elementos de  $P$  tornam-se conhecidos. E além disso, através das operações descritas nesta seção, pode-se garantir que a relação entre  $P$ , sua inversa,  $X$  e  $Y$  está garantida, conforme descrito em (4.10).

#### 4.2.5 ALGORITMO CONCEITUAL

O algoritmo conceitual proposto a seguir é composto de um programa principal e 6 funções, que serão apresentados a seguir.

São fornecidas inicialmente as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$ , que caracterizam a representação da planta no espaço de estados e, em função disso, tem-se o parâmetro  $np$ , que é a ordem da planta. É definido então o coeficiente  $\alpha$  de estabilidade e a ordem do controlador. Estes são os dados conhecidos no início do algoritmo. Inicialmente é feita uma breve descrição de cada rotina do algoritmo proposto, antes da apresentação formal das mesmas, com o intuito de esclarecer alguns aspectos importantes e facilitar o entendimento do mesmo.

**Função calcula ponto inicial:**

Esta função calcula o ponto de partida para o método das projeções alternadas. Como foi dito e até mesmo exemplificado anteriormente na Seção (2.3.3), a escolha deste ponto é crucial para se chegar a um resultado aceitável, mesmo para problemas de BMIs simples, conforme referência anterior, ou para problemas convexos envolvendo apenas LMIs como é o caso deste algoritmo. Os testes realizados durante a fase de experimentos desta pesquisa indicaram claramente que partir de um ponto que não seja favorável resulta em insucessos na maior parte dos casos, conforme será mostrado no próximo capítulo. Assim, minimizando o traço das variáveis  $X0$  e  $Y0$ , sujeitas as restrições contidas no conjunto  $\Gamma_c$ , o que se busca é um ponto  $(X0, Y0)$  que esteja dentro deste conjunto e o mais próximo possível de  $Z_{nc}$ , favorecendo desta forma as futuras projeções.

**Função calcula projeções alternadas:**

Esta função implementa o método das projeções alternadas, partindo do ponto  $(X0, Y0)$  fornecido anteriormente e de acordo com as técnicas comentadas no Capítulo 3. Optou-se aqui pelo método das projeções alternadas padrão, nas projeções entre os conjuntos convexo e não-convexo, em consequência dos melhores resultados obtidos na prática. O ponto  $(X, Y)$  que esta função retorna está na interseção dos conjuntos convexo e não-convexo, caso esta interseção exista.

**Função projeção conjunto não-convexo:**

Esta rotina implementa a projeção no conjunto não-convexo, de acordo com os conceitos apresentados na Seção 3.4. Nas projeções internas do conjunto não-convexo optou-se pelo método das projeções alternadas direcional. Os passos implementados nessa função são chamados de iterações internas.

**Função projeção conjunto convexo**

Esta função implementa a projeção no conjunto convexo utilizando as técnicas de LMIs. Retorna um ponto que pertence ao conjunto  $\Gamma_c$ .

**Função calcula  $P$ :**

Recebe o ponto  $(X, Y)$  que está na interseção dos conjuntos convexo e não-convexo e

através da relação entre  $X$ ,  $Y$  e  $P$ , expressa em (4.10), calcula a variável  $P$  da BMI inicial (4.7), permitindo assim que o problema se transforme numa LMI em  $G$ .

Função **calcula  $G$** :

Resolvendo-se a LMI restante na variável  $G$ , chega-se finalmente à matriz que possui todos os parâmetros necessários para definir completamente o controlador que  $\alpha$ -estabiliza a planta do sistema.

**Programa principal:**

Inicialmente, é preciso ressaltar que o algoritmo principal parte de um valor de  $\alpha$  ligeiramente superior ao desejado pelo problema. Isto ocorre porque é preciso ter uma margem de segurança para o valor de  $\alpha$  que realmente se quer atingir em uma etapa subsequente. Obrigando-se o algoritmo a trabalhar com um valor de  $\alpha$  que é maior que o realmente desejado, permite que os cálculos sejam feitos para o pior caso, permitindo assim, ao ajustar o seu valor para o que se espera atingir, que o algoritmo caminhe naturalmente para uma solução de maneira mais natural, com um menor número de iterações.

Para o caso de uma única planta é importante ressaltar que, quando as restrições (4.11), (4.12), (4.13) são atendidas, têm-se as condições necessárias e suficientes para a existência do controlador que  $\alpha$ -estabiliza a planta.

Considerando-se a dificuldade natural inerente ao problema, é apresentado na Figura 4.2 um diagrama relativo à implementação do algoritmo para o caso de  $\alpha$ -estabilização de uma única planta, para facilitar a visualização do método. Logo a seguir será apresentado o algoritmo conceitual do programa principal e suas funções.



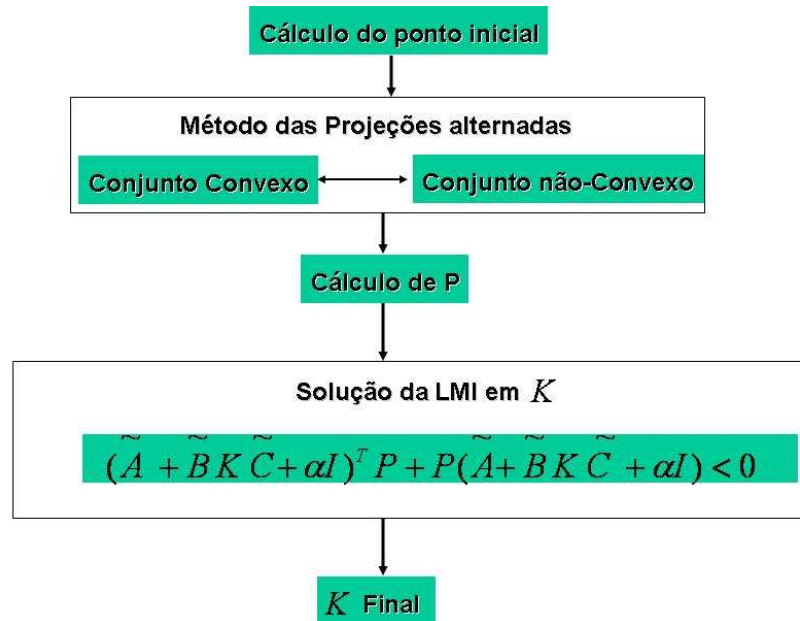


FIG.4.2: Diagrama representativo do algoritmo para o caso de uma única planta

Para um melhor entendimento do algoritmo, é importante que alguns pontos sejam esclarecidos:

- A notação utilizada em sua confecção buscou seguir um pseudo-código formal, que possa ser implementado em qualquer linguagem.
- Em certos casos, na tentativa de permitir um entendimento melhor da metodologia apresentada e devido à especificidades deste trabalho, algumas adaptações foram feitas, não sendo seguido, nestes casos, o formalismo supra-citado.
- Os termos que se encontram entre “//” são apenas comentários que tem por objetivo esclarecer algum ponto que possa gerar alguma dúvida.

### Algoritmo conceitual Programa principal

Início

//Quando se coloca a expressão “Ler” significa que aquela constante deve ser definida naquele ponto do programa. São os dados já conhecidos do problema//

Ler  $np$  //Ordem da planta//

Ler  $nc$  //Ordem do controlador//

Ler  $\alpha_{ini}$  //Parâmetro inicial de  $\alpha$ -estabilidade que deve ser próximo do valor desejado e maior que o mesmo//

Ler  $A$  //Matriz de estado//

Ler  $B$  //Matriz de entrada//

Ler  $C$  //Matriz de saída//

$I_{til} \leftarrow$  matriz identidade de ordem  $(nc)$  //O símbolo “ $\leftarrow$ ” significa que o valor à direita está sendo atribuído à variável à esquerda da seta//

$I_c \leftarrow$  matriz identidade de ordem  $(nc+np)$  //É atribuída à variável  $I_c$  uma matriz identidade de ordem  $(nc+np)$ //

$B^\perp$  //O complemento ortogonal de  $B$  é calculado e atribuído a esta variável//

$C^\perp$  //O complemento ortogonal de  $C$  é calculado e atribuído a esta variável//

$B_c \leftarrow B^\perp$

$C_c \leftarrow C^\perp$

Executar Função *calcula ponto inicial*  $(A, B_c, C_c, np, \alpha_{ini})$  //Os valores entre parênteses ao lado do nome da função devem ser passados como parâmetros para a mesma. Os valores a serem retornados pela função são  $X0$  e  $Y0$ //

Executar Função *calcula projeções alternadas*  $(X0, Y0, A, B_c, C_c, np, \alpha_{ini}, nc)$  //Os valores a serem retornados pela função são  $X$  e  $Y$ //

Executar Função *calcula*  $P(X, Y, np, nc)$  //Retorna o valor da matriz  $P$ //

//Montagem das matrizes aumentadas que formavam a BMI do problema inicial//

//As matrizes  $0_{np \times nc}$  são matrizes com todos os elementos zero,  $np$  linhas e  $nc$  colunas//

$n \leftarrow$  número de colunas de  $B$

$$A_{til} \leftarrow \begin{bmatrix} A & 0_{np \times nc} \\ 0_{nc \times np} & 0_{nc \times nc} \end{bmatrix}$$

$$B_{til} \leftarrow \begin{bmatrix} 0_{np \times nc} & B \\ I_{til} & 0_{np \times n} \end{bmatrix}$$

$$C_{til} \leftarrow \begin{bmatrix} 0_{nc \times np} & I_{til} \\ C & 0_{n \times nc} \end{bmatrix}$$

Ler  $\alpha$  //Parâmetro de  $\alpha$ -estabilidade que se quer atingir para o problema//

Executar Função *calcula G(Atil,Btil,Ctil,α,Ic,np,P)* //Retorna a matriz *G* do controlador//

Fim

**Algoritmo Função** *calcula ponto inicial (A,Bc,Cc,np,α<sub>ini</sub>)*

//Os valores entre parênteses ao lado do nome da função devem ser passados para a mesma pelo programa principal//

Início

$I \leftarrow$  matriz identidade de ordem  $np$

minimize  $\text{traço}(X0 + Y0)$  //  $X0$  e  $Y0$  são variáveis//

sujeito a  $Bc^T (AX0 + X0A^T + 2\alpha_{ini}X0) Bc < 0$

$Cc (A^TY0 + Y0A + 2\alpha_{ini}Y0) Cc^T < 0$

$$\begin{bmatrix} X0 & I \\ I & Y0 \end{bmatrix} \geq 0$$

$X0 > 0$

$Y0 > 0$

retornar  $X0, Y0$  //Valores que a função retorna//

Fim

**Algoritmo Função** *calcula projeções alternadas (X0,Y0,A,Bc,Cc,np,α<sub>ini</sub>,nc)*

Início

$teste \leftarrow 0$

$i \leftarrow 0$

Enquanto ( $teste=0$ ) executar

Executar Função *projeção conjunto não-convexo (X0,Y0,np,α<sub>ini</sub>,nc)* //Retorna as projeções  $Xnca$  e  $Ynca$ //

Executar Função *projeção conjunto convexo(Xnca,Ynca,A,Bc,Cc,np,α<sub>ini</sub>,nc)* //Retorna as projeções  $Xcb$  e  $Ycb$ //

Executar Função *Projeção conjunto não-convexo (Xcb,Ycb,np,α<sub>ini</sub>,nc)* //Retorna as projeções  $Xncc$  e  $Yncc$ //

$Xc \leftarrow Xncc;$

```

     $Y_c \leftarrow Y_{ncc}$ ;
     $Mat1 \leftarrow X_c - X_{cb}$ ;
     $Mat2 \leftarrow Y_c - Y_{cb}$ ;
    se ( $Mat1 < precis\tilde{a}o$ ) e ( $Mat2 < precis\tilde{a}o$ ) ent\~{a}o
         $teste \leftarrow 1$ 
    Fim (se)
     $i \leftarrow i + 1$ 
Fim (enquanto)
 $X \leftarrow X_c$ 
 $Y \leftarrow Y_c$ 
retornar  $X, Y$ 
Fim

```

**Algoritmo Função** *projeção conjunto não-convexo* ( $X_{int}, Y_{int}, np, \alpha_{ini}, nc$ )

Início

$J11 \leftarrow 0_{np}$  // Atribuição de uma matriz quadrada de ordem  $np$ , com todos os elementos iguais a zero à variável  $J11$  //

$J12 \leftarrow$  matriz identidade de ordem  $np$  // Atribuição de uma matriz identidade de ordem  $np$  à variável  $J12$  //

$J21 \leftarrow$  matriz identidade de ordem  $np$

$J22 \leftarrow$  matriz identidade de ordem  $np$

$J \leftarrow \begin{bmatrix} J11 & J12 \\ J21 & J22 \end{bmatrix}$

$j \leftarrow 0$

$X_i \leftarrow X_{int}$

$Y_i \leftarrow Y_{int}$

$n \leftarrow np - nc$

para ( $j$  de 1 até  $n$ ) executar

$controle \leftarrow 0$

Enquanto ( $controle = 0$ )

$Z_i \leftarrow \begin{bmatrix} X_i & 0_{np \times np} \\ 0_{np \times np} & Y_i \end{bmatrix}$

$Z_{aux} \leftarrow Z_i + J$

//Neste ponto deve ser obtida uma decomposição em autovalores e autovetores para a matriz  $Zaux$ //

$D \leftarrow$  matriz dos autovalores de  $Zaux$  //A variável  $D$  recebe a matriz de autovalores de  $Zaux$ , ordenados do menor para o maior, ou seja, o autovalor  $D(1,1)$  é o menor e o autovalor  $D(n,n)$  é o maior, onde  $n$  é a ordem da matriz  $D$ //

$V \leftarrow$  matriz dos autovetores de  $Zaux$  //A variável  $V$  recebe a matriz de autovetores de  $Zaux$ //

$D(j,j) \leftarrow 0$  //O elemento da  $j$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna da matriz  $D$  recebe o valor zero//

$$Zia \leftarrow V * D * V^T - J$$

$$X1 \leftarrow \begin{bmatrix} Zia(1,1) & Zia(1,2) & \cdots & Zia(1,np) \\ Zia(2,1) & \cdots & \cdots & Zia(2,np) \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ Zia(np,1) & Zia(np,2) & \cdots & Zia(np,np) \end{bmatrix}$$

$$Y1 \leftarrow \begin{bmatrix} Zia(np+1,np+1) & Zia(np+1,np+2) & \cdots & Zia(np+1,2*np) \\ Zia(np+2,np+1) & \cdots & \cdots & Zia(np+2,2*np) \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ Zia(2*np,np+1) & Zia(2*np,np+2) & \cdots & Zia(2*np,2*np) \end{bmatrix}$$

//As variáveis  $X1$  e  $Y1$  devem receber a matriz  $Zia$ , conforme especificado acima//

//A matriz  $Zia$  está especificada elemento a elemento, ao invés de seguir o formalismo do pseudo-código para facilitar a compreensão do método//

$$Zib \leftarrow \begin{bmatrix} X1 & 0_{np \times np} \\ 0_{np \times np} & Y1 \end{bmatrix}$$

$$Zaux1 \leftarrow Zib + J$$

//Neste ponto deve ser obtida uma decomposição em autovalores e autovetores para a matriz  $Zaux1$ //

$D1 \leftarrow$  matriz dos autovalores de  $Zaux1$  //A variável  $D1$  recebe a matriz de autovalores de  $Zaux1$ , ordenados do menor para o maior//

$V1 \leftarrow$  matriz dos autovetores de  $Zaux1$  //A variável  $V1$  recebe a matriz de autovetores de  $Zaux1$ //

$D1(j,j) \leftarrow 0$  //O elemento da  $j$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna da matriz  $D1$  recebe o valor zero//

$$Zic \leftarrow V1 * D1 * V1^T - J$$

$$var1 \leftarrow (Zia - Zic)^T$$

$$var2 \leftarrow (Zia - Zib)$$

$den \leftarrow \text{traço}(var1 * var2)$  //O traço da matriz resultante da multiplicação entre as variáveis  $var1$  e  $var 2$  deve ser calculado e atribuído à variável  $den$ //

$var3 \leftarrow$  norma de Frobenius de  $(var2)$  //A norma de frobenius da variável  $var2$  deve ser calculada e atribuída à variável  $var3$ //

$num \leftarrow (var3)^2$

$\lambda \leftarrow num/den$

$Zf \leftarrow Zia + \lambda * (Zic - Zia)$

$Znc1 \leftarrow Zf + J$

$posto \leftarrow \text{posto}(Znc1)$  //O posto da matriz  $Znc1$  deve ser calculado e atribuído à variável “posto”//

se  $(posto \leq (nc + np))$  então

$controle \leftarrow 1$

fim (se)

$$Xi \leftarrow \begin{bmatrix} Zf(1,1) & Zf(1,2) & \cdots & Zf(1,np) \\ Zf(2,1) & \cdots & \cdots & Zf(2,np) \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ Zf(np,1) & Zf(np,2) & \cdots & Zf(np,np) \end{bmatrix}$$

$$Yi \leftarrow \begin{bmatrix} Zf(np+1,np+1) & Zf(np+1,np+2) & \cdots & Zf(np+1,2*np) \\ Zf(np+2,np+1) & \cdots & \cdots & Zf(np+2,2*np) \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ Zf(2*np,np+1) & Zf(2*np,np+2) & \cdots & Zf(2*np,2*np) \end{bmatrix}$$

fim (enquanto)

$j \leftarrow j+1$

fim ( $j$ )

$Xsnc \leftarrow Xi$

$Ysnc \leftarrow Yi$

retorna  $Xsnc, Ysnc$  //Valores a serem retornados pela função//

Fim

**Função** *projeção conjunto convexo*  $(Xi, Yi, A, Bc, Cc, np, \alpha_{ini}, nc)$

Início

$I \leftarrow$  matriz identidade de ordem  $np$

minimize  $\text{traço}(T + S)$  //  $T$  e  $S$  são matrizes variáveis e simétricas//

$$\text{sujeito a } \begin{bmatrix} T & X - X_i \\ X - X_i & I \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\begin{bmatrix} S & Y - Y_i \\ Y - Y_i & I \end{bmatrix} \geq 0$$

$$Bc^T * (A * X + X * A^T + 2 * \alpha_{ini} * X) * Bc < 0$$

$$Cc * (A^T * Y + Y * A + 2 * \alpha_{ini} * Y) * Cc^T < 0$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \geq 0$$

$$X > 0$$

$$Y > 0$$

$X_s \leftarrow$  solução da LMI em relação a  $X$

$Y_s \leftarrow$  solução da LMI em relação a  $Y$

retornar  $X_s, Y_s$

Fim

**Função** *calcula P (Xci, Yci, np, nc)*

Início

$i \leftarrow 0$

$k \leftarrow 0$

$j \leftarrow 0$

$Inc \leftarrow$  identidade de ordem  $nc$

$Xfimax \leftarrow Xci$

$Yfimax \leftarrow Yci$

$Q \leftarrow Yfimax - inv(Xfimax) // inv(X)$  é a inversa da matriz  $X //$

// Neste ponto deve ser obtida uma decomposição em autovalores e autovetores para a matriz  $Q //$

$D \leftarrow$  matriz dos autovalores de  $Q //$  A variável  $D$  recebe a matriz de autovalores de  $Q$ , ordenados do menor para o maior //

$V \leftarrow$  matriz dos autovetores de  $Q //$  A variável  $V$  recebe a matriz de autovalores de  $Q$ , ordenados do menor para o maior //

// Formação da matriz “ $e$ ” //

para ( $i$  de 1 até  $np$ ) executar

para ( $j$  de 1 até  $np$ ) executar

```

se (i = j) então
    e(k,k)←1 //O elemento da k-ésima linha e k-ésima coluna da
matriz “e” recebe o valor 1//
senão
    e(k,k)←0 //O elemento da k-ésima linha e k-ésima coluna da
matriz “e” recebe o valor 0//
fim (se)
fim (j)
fim (i)
//Formação da matriz E//
cont← np-nc
para (i de 1 até np) executar
    para (k de (cont + 1) até np) executar
        j = k - cont
        E(i,j)←[(D(k, k)0.5)*e(i, k)]//O elemento da i-ésima linha e j-ésima col-
una da matriz E recebe o valor que resulta da operação à direita da símbolo de atribuição,
onde D(k,k) é o elemento da k-ésima linha e k-ésima coluna da matriz D e e(i,k) é o ele-
mento da i-ésima linha e k-ésima coluna da matriz “e”//
fim(k)
Yaux← V*E
Y12← Yaux
Y22← Inc
P←  $\begin{bmatrix} Y f i m a u x & Y 12 \\ Y 12^T & Y 22 \end{bmatrix}$ 
retornar P
Fim

```

**Algoritmo Função** *calcula G (Atil,Btil,Ctil,α,Ic,np,P)*

Início

$I_c \leftarrow$  identidade de ordem  $nc$

minimizar a variável  $t$

sujeito a  $(Atil+Btil*G*Ctil + \alpha * I_c)^T *P+P*(Atil+Btil*G*Ctil + \alpha * I_c) < t * I_c$

retornar  $G$

Fim



### 4.3 ESTABILIZAÇÃO SIMULTÂNEA POR CONTROLADORES DE ORDEM PRÉ-FIXADA

#### 4.3.1 PROBLEMA DE ESTABILIZAÇÃO SIMULTÂNEA

O problema da estabilização simultânea pode ser genérica e formalmente expresso como segue: dadas as funções  $G_1(s), G_2(s), \dots, G_r(s)$  que são matrizes de transferência para plantas distintas, encontre um compensador  $C(s)$  (se ele existe), tal que todos os sistemas de malha fechada  $[I + G_i(s)C(s)]^{-1} G_i(s)$ , ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) são internamente estáveis.

O problema da estabilização simultânea de sistemas lineares por controladores de ordem pré-fixada é não-convexo e os algoritmos aplicáveis são de convergência não-polinomial, conforme vários resultados da literatura especializada. Por outro lado, este problema possui grande motivação de ordem prática na área de controle, principalmente em sistemas militares, onde os modelos reconhecidamente possuem muitas incertezas além de ambiente de operação ruidoso.

Recentemente, uma abordagem utilizada com sucesso na área de controle consiste na formulação dos problemas em termos de LMIs, utilizando as técnicas sobre o assunto apresentadas anteriormente neste trabalho. Uma grande variedade de problemas foram tratados neste ambiente. Entretanto, uma classe de problemas, nitidamente aqueles onde se impõem restrições ao controlador (descentralização, restrições de ordem, etc), não puderam ser formulados em termos de otimização linear. Um ambiente mais geral, fazendo uso de BMIs foi necessário. Nesta forma, os problemas são não-convexos e não-diferenciáveis e os algoritmos para LMIs não são mais aplicáveis de maneira direta.

O problema de estabilização simultânea aqui proposto, é um caso clássico de problema inerentemente BMI, podendo ser descrito exatamente como no caso monoplanta, em termos de LMIs com uma restrição adicional de posto (bilinear). Utilizando os métodos propostos anteriormente neste capítulo, este trabalho propõe uma metodologia para solução do problema.

Considera-se sistemas lineares invariantes no tempo(LTI) da forma

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

com  $i = 1, 2, \dots, r$  onde  $r$  é o número de plantas do sistema,  $x \in \mathfrak{R}^n$  é o vetor de estados do sistema,  $u \in \mathfrak{R}^{n_u}$  é a entrada de controle, e  $y \in \mathfrak{R}^{n_y}$  é a saída medida. Sem perda de generalidade, considera-se que  $D_i = 0$ .

Para estabilização simultânea dos sistemas descritos por (4.27), procura-se um único controlador de ordem fixa  $n_c$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ u \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix}}_G \begin{bmatrix} x_c \\ y \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

onde  $x_c \in \mathfrak{R}^{n_c}$  é o vetor de estado de controlador. A matriz  $G$  contém todos os parâmetros ainda não conhecidos do controlador.

A partir deste ponto, todo o tratamento matemático e as explicações para o caso de uma única planta são os mesmos, motivo pelo qual apresenta-se apenas as fórmulas principais, adaptadas ao caso de várias plantas.

A BMI inicial a ser satisfeita é dada por

$$\left( \tilde{A}_i + \tilde{B}_i G \tilde{C}_i + \alpha I \right)^T P_i + P_i \left( \tilde{A}_i + \tilde{B}_i G \tilde{C}_i + \alpha I \right) < 0 \quad (4.29)$$

As restrições que compõe os conjuntos convexo e não-convexo são

$$B_i^{\perp T} (A_i X_i + X_i A_i^T + 2\alpha X_i) B_i^{\perp} < 0 \quad (4.30)$$

$$C_i^{\perp} (A_i^T Y_i + Y_i A_i + 2\alpha Y_i) C_i^{\perp T} < 0$$

$$\begin{bmatrix} X_i & I \\ I & Y_i \end{bmatrix} \geq 0 \quad (4.31)$$

$$\text{posto} \begin{bmatrix} X_i & I \\ I & Y_i \end{bmatrix} \leq n + n_c \quad (4.32)$$

Os conjuntos convexo e não-convexo são definidos por:

$$\Gamma_c = \left\{ (X_i, Y_i) \left| \begin{array}{l} B_i^{\perp T} (A_i X_i + X_i A_i^T + 2\alpha X_i) B_i^{\perp} < 0 \\ C_i^{\perp} (A_i^T Y_i + Y_i A_i + 2\alpha Y_i) C_i^{\perp T} < 0 \\ \begin{bmatrix} X_i & I \\ I & Y_i \end{bmatrix} \geq 0 \\ X_i > 0 \\ Y_i > 0 \end{array} \right. \right\} \quad (4.33)$$

$$Z_{nc} = \left\{ (X_i, Y_i) \left| \begin{array}{l} \begin{bmatrix} X_i & I \\ I & Y_i \end{bmatrix} \geq 0 \\ \text{posto}(I - X_i Y_i) \leq n_c \end{array} \right. \right\} \quad (4.34)$$

As relações entre  $P_i$ ,  $X_i$  e  $Y_i$  permanecem as mesmas conforme descrito em (4.10) e por isso não estão aqui repetidas.

Enquanto para o caso de uma única planta as restrições (4.11), (4.12), (4.13) são condições necessárias e suficientes para a existência do controlador que  $\alpha$ -estabiliza a planta, o mesmo não ocorre no caso de várias plantas. As condições correspondentes (4.30), (4.31), (4.32) são apenas necessárias para a existência de um controlador único que estabilize todas as plantas. Sendo assim, é necessária uma alteração na parte final do algoritmo, que vai inserir o método de solução de BMIs por meio de LMIs alternadas e vai permitir que os problemas de estabilização simultânea sejam resolvidos, conforme o algoritmo proposto na seção seguinte.

#### 4.3.2 ALGORITMO CONCEITUAL PARA ESTABILIZAÇÃO SIMULTÂNEA

O algoritmo conceitual para estabilização simultânea possui uma rotina a mais que o caso monoplanta, além do programa principal.

Parte-se dos mesmos dados iniciais que no caso de uma única planta, sendo eles as matrizes  $A_i$ ,  $B_i$  e  $C_i$  que representam as plantas no espaço de estados, a ordem do controlador que se quer encontrar, a ordem das plantas, o parâmetro  $\alpha$  e um novo fator que é o número de plantas do sistema.

Todas as funções apresentadas aqui, com exceção de duas que serão detalhadas, possuem basicamente as mesmas finalidades das apresentadas anteriormente, tornando desnecessária uma descrição das mesmas. As mudanças significativas serão apresentadas quando da descrição do programa principal.

##### **Função calcula $G$ :**

Neste caso, a função vai calcular a matriz  $G$ , mas esta não será obrigatoriamente a matriz que irá estabilizar simultaneamente as plantas. Isso só irá ocorrer quando o parâmetro  $tf$ , que será minimizado na LMI no interior da função for negativo. Se este parâmetro for positivo, o valor de  $G$  encontrado não satisfaz a BMI e então ainda não é a resposta esperada para o controlador, devendo ser ressaltado que isso não significa que o problema não possui solução.

##### **Função calcula $P$ auxiliar:**

Esta função é utilizada já no momento de aplicação da técnica de BMIs alternadas, para solução da BMI. Sendo assim, vai calcular um valor de  $P$  diferente daquele valor de  $P$  inicial (apresentado na função calcula  $P$ ), que se pretende ser um valor que caminhe na direção de solução da BMI. Para cálculo deste valor de  $P$  será minimizado o parâmetro

$tf$  na LMI no interior da função, e se este valor de  $tf$  for negativo, então  $P$  satisfaz a BMI e basta resolver a LMI em  $G$  (na função *calcula G*) para que se chegue ao valor de um controlador que  $\alpha$ -estabiliza o sistema.

### **Programa principal:**

O programa principal funciona de forma semelhante ao caso anterior, porém é importante salientar que as plantas são tratadas de maneira independente em todas as funções até a função *calcula G*. Isso significa que as funções anteriores se comportam da mesma forma que no caso monoplanta, produzindo os mesmos parâmetros, como se cada planta estivesse sendo tratada isoladamente. Assim, tem-se um ponto inicial  $(X0, Y0)$  para cada planta, um valor inicial de  $P$  para cada planta e assim por diante. Apenas quando o algoritmo chega à função *calcula G*, é que todas as plantas são adicionadas a BMI original 4.7, que passa a ser considerada uma restrição LMI em  $G$ , já que os valores das variáveis  $P_i$  foram determinados por *calcula P*. Na verdade, a partir desta função, tem-se os valores de  $P$  (um para cada planta) que servem como ponto de partida para a técnica de solução de BMIs por LMIs alternadas, e começa a alternância nos cálculos de  $G$  e  $P_i$  que leva à solução da BMI em questão. Quando a alternância se concentra em  $P$ , novamente são calculados valores de  $P$  para cada planta. Apenas a função *calcula G* trata as plantas conjuntamente.

Conforme feito para o caso de uma única planta, inicialmente será apresentado um diagrama esquemático na Figura 4.3, relativo à implementação do algoritmo para o caso de  $\alpha$ -estabilização simultânea. Logo a seguir será apresentado o algoritmo conceitual do programa principal e suas funções.

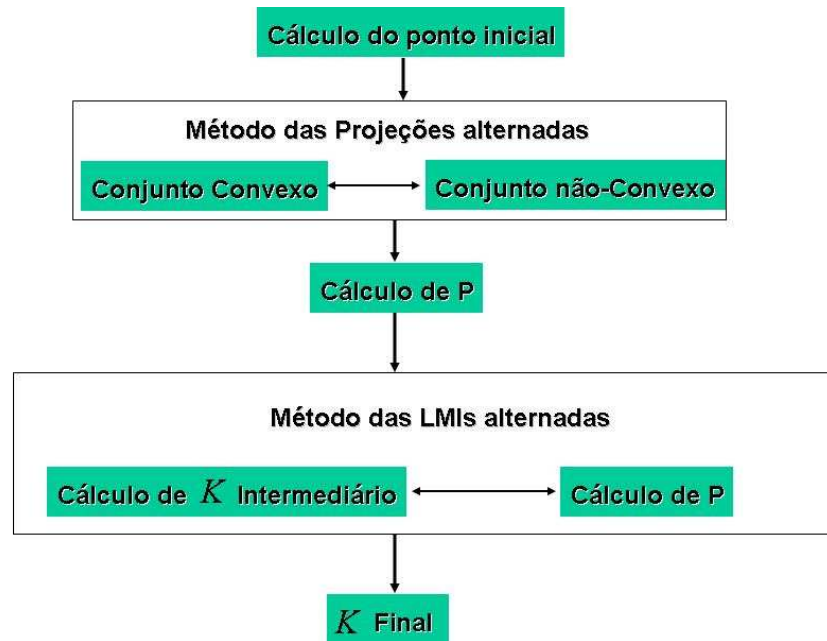


FIG.4.3: Diagrama representativo do algoritmo para o caso de várias plantas

#### Algoritmo conceitual Programa principal:

Início

Ler  $NPS$  //Número de plantas do sistema//

Ler  $np$  //Ordem das plantas//

Ler  $nc$  //Ordem do controlador//

Ler  $\alpha_{ini}$  //parâmetro inicial de  $\alpha$ -estabilidade//

//Próximo do valor desejado e maior que o mesmo//

para ( $i$  de 1 até  $NPS$ )

Ler  $A(i), B(i), C(i)$  //Matrizes do modelo de estado//

fim( $i$ )

$I_{til} \leftarrow$  matriz identidade de ordem ( $nc$ )

$I_c \leftarrow$  matriz identidade de ordem( $nc+np$ )

para ( $i$  de 1 até  $NPS$ ) executar

$B(i)^\perp$  //Cálculo do complemento ortogonal de  $B_i$ //

$C(i)^\perp$  //Cálculo do complemento ortogonal de  $C_i$ //

fim( $i$ )

para ( $i$  de 1 até  $NPS$ ) executar

$B_c(i) \leftarrow B(i)^\perp$

$C_c(i) \leftarrow C(i)^\perp$

fim( $i$ )

```

para (i de 1 até NPS) executar
    Executar Função calcula ponto inicial ( $A(i), Bc(i), Cc(i), np, \alpha_{ini}$ )
//retorna os valores de  $X0(i)$  e  $Y0(i)$ //
fim(i)

para (i de 1 até NPS) executar
    Executar Função calcula projeções alternadas (
 $X0(i), Y0(i), A(i), Bc(i), Cc(i), np, \alpha_{ini}, nc$ ) //retorna os valores  $X(i)$  e  $Y(i)$ //
    fim(i)

para (i de 1 até NPS) executar
    Executar Função calcula P ( $X(i), Y(i), np, nc$ ) //retorna os valores das matrizes
 $P(i)$ // fim(i)

//Montagem das matrizes aumentadas que formavam a BMI do problema inicial//
//As matrizes  $0_{i \times j}$  são matrizes com todos os elementos zero,  $i$  linhas e  $j$  colunas//
 $n \leftarrow$  número de colunas de  $B(i)$ 
para (i de 1 até NPS) executar
     $Atil(i) \leftarrow \begin{bmatrix} A(i) & 0_{np \times nc} \\ 0_{nc \times np} & 0_{nc \times nc} \end{bmatrix}$ 
     $Btil(i) \leftarrow \begin{bmatrix} 0_{np \times nc} & B(i) \\ I_{til} & 0_{nc \times n} \end{bmatrix}$ 
     $Ctil(i) \leftarrow \begin{bmatrix} 0_{nc \times np} & I_{til} \\ C(i) & 0_{n \times nc} \end{bmatrix}$ 
fim (i)

Ler  $\alpha$  //parâmetro de  $\alpha$ -estabilidade que se quer atingir para o problema//
Executar Função calcula G ( $Atil(i), Btil(i), Ctil(i), \alpha, Ic, np, P(i)$ ) //retorna a matriz
 $G$  do controlador//
 $varcontrole \leftarrow 0$ 
enquanto ( $tf > 0$ ) executar
    Executar função calcula P auxiliar ( $Atil(i), Btil(i), Ctil(i), \alpha, Ic, np, nc, G, NPS$ )//retorna
a matriz  $P$ //
    Executar Função calcula G ( $Atil(i), Btil(i), Ctil(i), \alpha, Ic, np, P(i)$ )

```

fim(enquanto)  
Fim

**Algoritmo Função** *calcula*  $G(Atil, Btil, Ctil, \alpha, I_c, np, P(i))$

Início

$I_c \leftarrow$  identidade de ordem  $nc$

minimizar a variável  $t$

sujeito a  $(Atil(i) + Btil(i) * G * Ctil(i) + \alpha * I_c)^T * P(i) + P(i) * (Atil(i) + Btil(i) * G * Ctil(i) + \alpha * I_c) <$   
 $t * I_c$

retornar  $G$

$tf \leftarrow t$

retornar  $tf$

Fim

**Algoritmo Função** *calcula*  $Pauxiliar(Atil(i), Btil(i), Ctil(i), \alpha, I_c, np, nc, G, NPS)$

Início

$I_c \leftarrow$  identidade de ordem  $nc$

para ( $i$  de 1 até  $NPS$ ) executar

minimizar a variável  $t$

sujeito a  $(Atil(i) + Btil(i) * G * Ctil(i) + \alpha * I_c)^T * P(i) + P(i) * (Atil(i) + Btil(i) * G * Ctil(i) + \alpha * I_c) <$   
 $t * I$

fim( $i$ )

retornar  $P(i)$

$tf \leftarrow t$

retornar  $tf$

Fim

## 5 APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

### 5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos pela aplicação do algoritmo desenvolvido a diversos sistemas, tanto acadêmicos como modelos baseados em sistemas reais, buscando mostrar a eficácia do método apresentado para estabilização simultânea de plantas MIMO. Estes resultados foram obtidos após implementar o algoritmo no software “MATLAB©LMI Control Toolbox”, utilizando-se um computador com as seguintes especificações: processador Pentium IV com frequência de 2.3 GHz e 2 GB de memória RAM.

Cada sistema é composto por pelo menos três plantas instáveis, controláveis e observáveis, com várias entradas e várias saídas. Em cada caso, são descritos neste capítulo: os valores de  $\alpha$ -estabilidade desejados, os pólos de MA, os controladores de diversas ordens que foram obtidos e os pólos de MF. Em alguns casos, a busca por um controlador de determinada ordem não foi satisfeita, resultando em um controlador de ordem menor que a desejada, normalmente um controlador estático. Nestes casos, como o objetivo principal é testar o algoritmo e verificar a eficácia do método empregado, os resultados são apresentados, mesmo quando diferem da ordem desejada. As plantas utilizadas em cada caso estão especificadas no Apêndice B.

### 5.2 CASO 1: SISTEMA COM TRÊS PLANTAS DE ORDEM 3

Neste exemplo é considerado um sistema com três plantas de ordem 3, com 2 entradas e 2 saídas. Definido o valor do parâmetro  $\alpha$  igual a 0,1, o problema estará resolvido se todos os autovalores de malha fechada tiverem partes reais menores que  $-0,1$ . As matrizes envolvidas neste exemplo foram obtidas através do comando “rand.m” do MATLAB. Este exemplo foi também utilizado em (SALES & CORRÊA, 2002).

Pólos do sistema em MA:



TAB.5.1: Pólos de MA, Caso 1

matriz	autovalores
$A_1$	1, 7095; -0, 2172; -0, 7990
$A_2$	1, 4342; 0, 0089 ± 0, 0324j
$A_3$	2, 0577; 0, 2195 ± 0, 2115j

### 5.2.1 CONTROLADOR DE ORDEM 2

Representação do controlador no espaço de estados:

$$A_c = \begin{bmatrix} -62,2177 & -1,9438 \\ -0,5947 & -37,5449 \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} -2,4478 & 0,6996 \\ 35,5359 & -14,0977 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} -0,4985 & 3,9890 \\ -0,2982 & 14,0910 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} -12,4282 & -2,3729 \\ -15,4171 & 3,2847 \end{bmatrix}$$

Pólos do sistema de malha fechada:

TAB.5.2: Pólos de MF para  $n_c = 2$ , Caso 1

matriz	autovalores
$\tilde{A}_{1MF}$	-62, 2654; -43, 3473; -6, 7344; -0, 3884; -0, 9914
$\tilde{A}_{2MF}$	-62, 2677; -35, 6977; -12, 0330; -0, 1150 ± 0, 0564j
$\tilde{A}_{3MF}$	-0, 1970 ± 0, 2381j; -6, 4462; -57, 8944; -62, 2611

onde  $\tilde{A}_{iMF} = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i G \tilde{C}_i$

O tempo necessário para obtenção deste controlador foi de 35 segundos.

### 5.2.2 CONTROLADOR DE ORDEM 1

Na tentativa de encontrar um controlador de ordem 1, o algoritmo implementado não obteve êxito, encontrando um controlador estático que estabiliza simultaneamente o sistema para o valor de  $\alpha$  desejado, com a matriz de ganho de realimentação:

$$K = \begin{bmatrix} -2,55454820906783 & -3,10596800309479 \\ -0,30705957841503 & -0,26749793437926 \end{bmatrix}$$

Pólos do sistema em MF:

TAB.5.3: Pólos de MF para controlador estático, Caso 1

matriz	autovalores
$\tilde{A}_{1MF}$	$-1,4120 \pm 0,7444j; -0,5042;$
$\tilde{A}_{2MF}$	$-4,8686; -0,1215 \pm 0,1971j;$
$\tilde{A}_{3MF}$	$-0,8042 \pm 0,9894j; -0,1150;$

onde  $\tilde{A}_{iMF} = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i G \tilde{C}_i$

O tempo necessário para obtenção deste controlador foi de 94 segundos.

### 5.3 CASO 2: SISTEMA COM TRÊS PLANTAS DE ORDEM 3

Neste exemplo é considerado um sistema com três plantas de ordem 3, com 3 entradas e 3 saídas. O valor do parâmetro  $\alpha$  é igual a 0,1. As matrizes envolvidas neste exemplo foram obtidas através do comando “rand.m” do MATLAB. Este exemplo foi também utilizado em (SALES & CORRÊA, 2002).

Pólos do sistema em MA:

TAB.5.4: Pólos de MA, Caso 2

matriz	autovalores
$A_1$	$1,9943; -0,3838 \pm 0,2769j$
$A_2$	$1,3343; -0,7248; 0,3496$
$A_3$	$1,4123; 0,1305 \pm 0,3532j$

#### 5.3.1 CONTROLADOR DE ORDEM 2

Representação do controlador no espaço de estados:

$$A_c = \begin{bmatrix} -36,1044 & -0,0345 \\ 0,0076 & -5,7385 \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} -0,0440 & 0,0612 & -0,0845 \\ -0,3004 & 17,5923 & -11,7539 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} -0,0370 & 2,0613 \\ -0,0606 & -2,2881 \\ 0,0910 & -3,0770 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} -26,1798 & 8,6518 & -0,5253 \\ 38,5333 & -37,9372 & 18,7331 \\ -31,4613 & 31,5416 & -36,2965 \end{bmatrix}$$

Pólos de MF:

TAB.5.5: Pólos de MF para  $n_c = 2$ , Caso 2

matriz	autovalores
$\tilde{A}_{1MF}$	$-12,6663 \pm 0,9097j; -2,2129 \pm 0,5068j; -36,1043$
$\tilde{A}_{2MF}$	$-0,8360; -3,4662; -8,0235; -22,5232; -36,1044$
$\tilde{A}_{3MF}$	$-0,4552; -8,6240 \pm 4,1856j; -7,4267; -36,1044$

onde  $\tilde{A}_{iMF} = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i G \tilde{C}_i$

O tempo necessário para obtenção deste controlador foi de 4 segundos.

### 5.3.2 CONTROLADOR DE ORDEM 1

Assim como no caso anterior, a busca por um controlador de ordem 1 levou a um controlador estático com a matriz de ganho de realimentação:

$$K = \begin{bmatrix} -47,3901 & 32,0625 & -26,6961 \\ 21,1106 & -48,7278 & -3,4120 \\ -11,0818 & 40,3438 & -22,7248 \end{bmatrix}$$

Pólos do sistema em MF:

TAB.5.6: Pólos de MF para controlador estático, Caso 2

matriz	autovalores
$\tilde{A}_{1MF}$	$-17,0067; -13,3719; -2,5547;$
$\tilde{A}_{2MF}$	$-52,7508; -6,0981; -0,4082;$
$\tilde{A}_{3MF}$	$-0,1655; -40,8663; -24,8470;$

onde  $\tilde{A}_{iMF} = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i G \tilde{C}_i$

O tempo necessário para obtenção deste controlador foi de 34 segundos.

#### 5.4 CASO 3: SISTEMA COM TRÊS PLANTAS DE ORDEM 4

Este é o exemplo de um sistema com três plantas de ordem 4, com quatro entradas e quatro saídas. O parâmetro  $\alpha$  é igual a 0,1. As plantas foram geradas pelo comando “rand.m” do matlab.

Pólos do sistema em MA:

TAB.5.7: Pólos de MA, Caso 3

matriz	autovalores
$A_1$	1, 8783; 0, 5251; -0, 8710; -0, 5370
$A_2$	2, 1654; -0, 4693; 0, 0441 ± 0, 1666j
$A_3$	1, 7288; 0, 4884; -0, 1444; 0, 1121

##### 5.4.1 CONTROLADOR DE ORDEM 3

Representação do controlador no espaço de estados:

$$\begin{aligned}
 A_c &= \begin{bmatrix} -40,4247 & 0 & 0 \\ 0 & -40,4247 & -0,02523 \\ 0 & -0,0190 & -24,03942 \end{bmatrix} \\
 B_c &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0221 & -0,0259 & 0,0087 & -0,0058 \\ 12,1950 & 17,5663 & -1,4970 & -1,7894 \end{bmatrix} \\
 C_c &= \begin{bmatrix} 0 & -0,0134 & 10,8837 \\ 0 & 0 & -1,2310 \\ 0 & -0,0199 & 13,8412 \\ 0 & -0,0138 & 15,4218 \end{bmatrix} \\
 D_c &= \begin{bmatrix} 7,1803 & -19,9639 & 3,6369 & -13,2740 \\ -12,7338 & -3,5144 & 5,4761 & 19,9048 \\ -21,6960 & 8,7875 & -16,3570 & 15,1218 \\ 2,2428 & 19,9902 & -16,0141 & -33,5897 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Pólos do sistema em MF:

TAB.5.8: Pólos de MF para  $n_c = 3$ , Caso 3

matriz	autovalores
$\tilde{A}_{1MF}$	$-92,8401; -6,2071 \pm 0,2860j; -1,8114; -0,5526; -40,4247; -40,4247$
$\tilde{A}_{2MF}$	$-84,3672; -12,7185; -1,4448 \pm 2,6491j; -0,1671; -40,4247; -40,4247$
$\tilde{A}_{3MF}$	$-77,2911; -4,4618 \pm 0,8076j; -0,3188; -0,1425; -40,4247; -40,4247$

onde  $\tilde{A}_{iMF} = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i G \tilde{C}_i$

O tempo necessário para obtenção deste controlador foi de 42 segundos.

#### 5.4.2 CONTROLADOR DE ORDEM 2

A busca por um controlador de ordem 2 resultou em um controlador estático com a matriz de ganho de realimentação:

$$K = \begin{bmatrix} -13.7698 & 10.7444 & 16.5721 & -31.4260 \\ 20.81147 & -45.9771 & -20.0454 & 24.4298 \\ -34.2445 & -1.0980 & 14.7884 & 11.8331 \\ 2.1031 & -7.5325 & 0.1211 & -13.9839 \end{bmatrix}$$

Os pólos de MF do sistema são:

TAB.5.9: Pólos de MF para controlador estático, Caso 3

matriz	autovalores
$\tilde{A}_{1MF}$	$-76,8789; -10,1512; -2,1222 \pm 0,5918j;$
$\tilde{A}_{2MF}$	$-110,9229; -0,3953; -0,5928; -6,4286;$
$\tilde{A}_{3MF}$	$-81,3515; -12,6320; -0,4309 \pm 0,4003j;$

onde  $\tilde{A}_{iMF} = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i G \tilde{C}_i$

O tempo necessário para obtenção deste controlador foi de 330 segundos.

#### 5.5 CASO 4: SISTEMA COM TRÊS PLANTAS DE ORDEM 5

Este é o exemplo de um sistema com três plantas de ordem 5, com cinco entradas e cinco saídas. O parâmetro  $\alpha$  é igual a 0,1. As plantas foram geradas pelo comando “rand.m” do matlab.

Pólos do sistema em malha aberta:

TAB.5.10: Pólos de MA, Caso 4

matriz	autovalores
$A_1$	2,8043; $-0,0490 \pm 0,5617j$ ; 0,2093; $-0,0381$
$A_2$	2,6699; $-0,5806$ ; $-0,1360$ ; $0,5730 \pm 0,3160j$
$A_3$	1,6245; $0,4742$ ; $0,2112 \pm 0,1648j$ ; $-0,4990$

### 5.5.1 CONTROLADOR DE ORDEM 4

Representação do controlador no espaço de estados:

$$\begin{aligned}
 A_c &= \begin{bmatrix} -33,3720 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -33,3720 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -31,9408 & -0,0905 \\ 0 & 0 & -0,1138 & -32,4276 \end{bmatrix} \\
 B_c &= \begin{bmatrix} -0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3,6271 & 1,8470 & 5,1518 & -6,7690 & 0,5028 \\ -3,5720 & -2,3720 & 4,4944 & 1,1598 & -0,9733 \end{bmatrix} \\
 C_c &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1,8751 & -3,5633 \\ 0 & 0 & -1,3221 & -1,0639 \\ 0 & 0 & -1,6789 & 3,2507 \\ 0 & 0 & -0,3632 & 0,1829 \\ 0 & 0 & 5,5851 & 0,4027 \end{bmatrix} \\
 D_c &= \begin{bmatrix} 2,2615 & 2,3115 & -22,3751 & 12,8726 & -13,4415 \\ -12,9591 & 11,8504 & -4,5144 & -9,3060 & -20,0045 \\ -8,1268 & 0,7626 & -10,5740 & 0,3664 & -4,6651 \\ -2,8968 & -25,7511 & -7,9426 & -15,5129 & -7,2932 \\ 31,3516 & 0,6211 & 23,0369 & -6,2764 & -20,7103 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Os pólos de MF do sistema são:

TAB.5.11: Pólos de MF para  $n_c = 4$ , Caso 4

matriz	autovalores
$\tilde{A}_{1MF}$	$-147,3900; -11,8102; -0,6571; -1,5582; -3,8591;$ $-31,7446; -32,5736; -33,3720; -33,3720$
$\tilde{A}_{2MF}$	$-136,6355; -11,8102 \pm 0,7687j; -3,7062; -16,8779;$ $-32,0953; -32,4562; -33,3720; -33,3720$
$\tilde{A}_{3MF}$	$-90,8315; -0,5278; -2,1176; -9,9200 \pm 10,0530j;$ $-31,5341; -32,6895; -33,3720; -33,3720;$

onde  $\tilde{A}_{iMF} = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i G \tilde{C}_i$

O tempo necessário para obtenção deste controlador foi de 15 segundos.

### 5.5.2 CONTROLADOR DE ORDEM 3

Representação do controlador no espaço de estados:

$$\begin{aligned}
 A_c &= \begin{bmatrix} -33,7935 & 0 & 0 \\ 0 & -32,5846 & -0,0579 \\ 0 & -0,8894 & -25,2230 \end{bmatrix} \\
 B_c &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1,7801 & 3,5202 & -2,9294 & -0,6124 & -0,2026 \\ 10,4638 & -8,8820 & 3,0174 & 6,6589 & -2,5628 \end{bmatrix} \\
 C_c &= \begin{bmatrix} 0 & 2,1793 & -3,4589 \\ 0 & 2,9414 & 1,0885 \\ 0 & -1,1564 & 1,5657 \\ 0 & -1,6231 & -4,0500 \\ 0 & -2,0518 & -5,9159 \end{bmatrix} \\
 D_c &= \begin{bmatrix} -0,4638 & 3,2967 & -34,6146 & 16,0536 & -19,2539 \\ -8,6085 & 23,1064 & 4,1538 & -32,0616 & -3,5244 \\ -10,4979 & 2,6069 & -1,6283 & 0,7862 & 11,9188 \\ -0,5913 & -15,5286 & 8,1198 & -26,0825 & 4,1908 \\ 20,3801 & -11,7434 & 10,4571 & 3,8791 & -23,1050 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Os pólos de MF do sistema são:

TAB.5.12: Pólos de MF para  $n_c = 3$ , Caso 4

matriz	autovalores
$\tilde{A}_{1MF}$	$-92,7038; -32,5731; -22,7119; -9,5754;$ $-2,9850 \pm 3,3636j; -0,3468; -33,7935;$
$\tilde{A}_{2MF}$	$-103,9480; -32,5529; -25,4163; -7,7520 \pm 6,1188j;$ $-2,5507; -0,3288; -33,7935$
$\tilde{A}_{3MF}$	$-85,6687; -0,1818; -3,0953; -6,7999 \pm 9,2424j;$ $-32,8268; -21,2449; -33,7935$

onde  $\tilde{A}_{iMF} = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i G \tilde{C}_i$

O tempo necessário para obtenção deste controlador foi de 23 segundos.

### 5.5.3 CONTROLADOR DE ORDEM 2

A busca por um controlador de ordem 2 resultou em um controlador estático com a matriz de ganho de realimentação:

$$K = \begin{bmatrix} -7,3152 & -15,6206 & -16,6632 & 3,2247 & -27,4409 \\ -20,9721 & 10,2479 & 17,2029 & -25,9174 & -0,4101 \\ -7,8903 & -7,5610 & 4,4977 & -17,2730 & 4,3531 \\ 9,3888 & -22,9235 & 6,5104 & -23,6172 & 24,9470 \\ 30,5266 & 1,6756 & 7,4837 & -12,1229 & -20,3278 \end{bmatrix}$$

Pólos de MF do sistema:

TAB.5.13: Pólos de MF para controlador estático, Caso 4

matriz	autovalores
$\tilde{A}_{1MF}$	$-114,2959; -12,5593; -0,6049; -4,7717 \pm 3,6314j;$
$\tilde{A}_{2MF}$	$-148,8442; -7,3818 \pm 7,1725j; -1,8096; -0,2347;$
$\tilde{A}_{3MF}$	$-192,0350; -9,0494 \pm 12,4065j; -2,0273; -0,5849;$

onde  $\tilde{A}_{iMF} = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i G \tilde{C}_i$

O tempo necessário para obtenção deste controlador foi de 275 segundos.



### 5.5.4 CONTROLADOR DE ORDEM 1

A busca por um controlador de ordem 1 resultou em um controlador estático com a matriz de ganho de realimentação:

$$K = \begin{bmatrix} -7,9885 & -20,7701 & -6,7886 & 14,8834 & -32,6333 \\ -18,9559 & 10,4970 & 21,0623 & -24,7101 & -7,1388 \\ -9,1127 & -11,2603 & 10,7023 & -20,7104 & 6,8954 \\ 9,8056 & -21,2537 & 3,5795 & -21,5088 & 12,9479 \\ 31,6061 & 8,9240 & -2,6867 & -3,6286 & -32,2776 \end{bmatrix}$$

Os pólos de MF do sistema são:

TAB.5.14: Pólos de MF para controlador estático, Caso 4

matriz	autovalores
$\tilde{A}_{1MF}$	$-122,2283; -11,6874; -3,2974 \pm 4,3137j; -0,3501;$
$\tilde{A}_{2MF}$	$-156,1580; -8,4722 \pm 7,3835j; -0,3178; -0,4284;$
$\tilde{A}_{3MF}$	$-179,6457; -11,7659 \pm 10,7086j; -2,5070; -0,3877;$

onde  $\tilde{A}_{iMF} = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i G \tilde{C}_i$

O tempo necessário para obtenção deste controlador foi de 358 segundos.

### 5.6 CASO 5: SISTEMA COM TRÊS PLANTAS DE ORDEM 6

Este é o exemplo de um sistema com três plantas de ordem 6, com seis entradas e seis saídas. O parâmetro  $\alpha$  é igual a 0,1. As plantas foram geradas pelo comando “rand.m” do matlab.

Os pólos em MA são:

TAB.5.15: Pólos de MA, Caso 5

matriz	autovalores
$A_1$	$2,7253; 0,6141; -0,0501 \pm 0,2720j; -0,6085 \pm 0,2290j$
$A_2$	$2,6269; -0,3634 \pm 0,3493j; 0,1219 \pm 0,2267j; -0,0315$
$A_3$	$2,8550; -0,0372 \pm 0,6603j; 0,2037 \pm 0,3417j; -0,5343$

#### 5.6.1 CONTROLADOR DE ORDEM 5

Representação do controlador no espaço de estados:

$$\begin{aligned}
A_c &= \begin{bmatrix} -26,6451 & -0,0089 & -0,0106 & 0,0826 & 0,0471 \\ -0,0081 & -26,6095 & 0,0641 & -0,1121 & -0,2115 \\ -0,0156 & 0,0426 & -26,7080 & 0,8067 & 1,7949 \\ 0,1313 & -0,4575 & 1,9908 & -15,5909 & 4,9796 \\ -0,0103 & -0,1722 & 0,3137 & -6,8045 & -14,3295 \end{bmatrix} \\
B_c &= \begin{bmatrix} 0,0603 & -0,1847 & 0,0049 & 0,1571 & -0,0684 & -0,0131 \\ -0,1196 & 0,9390 & -0,0113 & -0,8298 & 0,4673 & 0,0982 \\ -0,2074 & -0,1384 & -0,4737 & 0,3266 & 0,5930 & -0,2851 \\ 7,5230 & -0,7906 & -2,2917 & 0,9668 & 4,5477 & -0,6176 \\ -2,8393 & -18,2465 & -1,1497 & 18,7519 & -9,1366 & -1,5903 \end{bmatrix} \\
C_c &= \begin{bmatrix} 0,0528 & -0,0930 & 0,2820 & 6,2248 & -0,9937 \\ -0,0171 & 0,1807 & -0,0977 & 3,9959 & -6,5981 \\ 0,2065 & -0,8527 & 1,0393 & 9,1111 & 16,4653 \\ 0,0242 & 0,0275 & 0,7698 & 5,6497 & -1,6194 \\ -0,4066 & 1,4545 & -3,7640 & -30,5838 & -23,7962 \\ 0,0065 & 0,0397 & -0,0302 & 2,1648 & -1,2479 \end{bmatrix} \\
D_c &= \begin{bmatrix} 7,4443 & 0,9518 & 8,5740 & -0,5676 & -5,4860 & -0,0131 \\ -9,0076 & 19,1350 & -12,9974 & -9,9821 & 0,4089 & 3,5648 \\ -13,8173 & -3,5971 & 18,3657 & 9,9394 & 10,0325 & 2,1453 \\ 15,8944 & -9,5558 & 9,7949 & -9,3254 & 1,8039 & -3,1687 \\ -14,4885 & -3,2973 & -4,3448 & -22,7374 & -3,2670 & -18,5797 \\ -7,5933 & -6,7264 & -22,0173 & 16,9228 & 10,8037 & -7,6386 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Os pólos de MF do sistema são:

TAB.5.16: Pólos de MF para  $n_c = 5$ , Caso 5

matriz	autovalores
$\tilde{A}_{1MF}$	$-38,1381; -1,6568 \pm 2,2475j; -1,6818; -2,6268;$
	$-8,5170; -32,3492; -24,5418 \pm 2,4410j; -26,6700; -26,6473$
$\tilde{A}_{2MF}$	$-62,1906; -17,8830 \pm 12,9348j; -3,0831 \pm 5,0513j; -1,2828 \pm 0,6299j;$
	$-6,0572; -27,0842; -26,5923; -26,6472$
$\tilde{A}_{3MF}$	$-54,5864; -10,3597 \pm 8,5208j; -0,3779 \pm 0,3029j; -3,3779; -5,2249;$
	$-10,7081; -27,0296; -26,5850; -26,6472$

onde  $\tilde{A}_{iMF} = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i G \tilde{C}_i$

O tempo necessário para obtenção deste controlador foi de 1535 segundos.

### 5.6.2 CONTROLADOR DE ORDEM 4

$$\begin{aligned}
 A_c &= \begin{bmatrix} -31,0631 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -31,0035 & 1,3663 & 1,0665 \\ 0 & 1,6081 & -29,3931 & 0,7500 \\ 0 & 0,9055 & -0,6346 & -16,5234 \end{bmatrix} \\
 B_c &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,5782 & -0,6112 & 0,4936 & -0,2862 & 0,2718 & 0,2834 \\ -7,6083 & -7,7869 & 4,3438 & -6,9919 & 8,0911 & -1,5580 \\ -6,6431 & -3,4415 & 3,2915 & -7,2599 & 5,4174 & 0,8913 \end{bmatrix} \\
 C_c &= \begin{bmatrix} 0 & 0,2122 & -0,9969 & 2,8560 \\ 0 & 0,1956 & -2,6941 & 0,9662 \\ 0 & -1,0491 & -11,02054620418755 & -10,34096603872236 \\ 0 & -0,0393 & -2,2429 & -1,8863 \\ 0 & 0,0231 & 3,6987 & 3,3932 \\ 0 & 0,5674 & 4,1706 & 3,5716 \end{bmatrix} \\
 D_c &= \begin{bmatrix} -17,8546 & 8,2837 & 1,81662,3223 & -18,6094 & 16,8352 \\ 8,1640 & 0,3381 & 14,7632 - 22,8385 & -7,3573 & 16,9590 \\ -1,9827 & 1,0874 & -12,7199 - 4,3541 & -5,6258 & -25,5363 \\ 8,4283 & -13,5815 & -20,7196 - 0,8790 & -3,8656 & 12,8804 \\ 17,1427 & 5,9198 & 8,20331,1980 & 10,8227 & -15,1358 \\ -7,8923 & -28,2397 & 5,345718,3582 & 2,2344 & 5,2656 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Os pólos de MF do sistema são:

TAB.5.17: Pólos de MF para  $n_c = 4$ , Caso 5

matriz	autovalores
$\tilde{A}_{1MF}$	$-101,8074; -31,4530; -25,5058; -15,7627; -10,5948;$
	$-6,2589; -2,1356; -1,5797 \pm 1,5502j; -31,0631$
$\tilde{A}_{2MF}$	$-75,4378; -31,3239; -23,6204; -18,1314;$
	$-5,5899 \pm 7,5426j; -0,1894; -2,6289 \pm 4,9994j; -31,0631$
$\tilde{A}_{3MF}$	$-42,7962 \pm 20,9207j; -31,4634; -24,7113; -17,0877;$
	$-4,1288 \pm 3,2524j; -0,5106; -1,8171; -31,0631$

onde  $\tilde{A}_{iMF} = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i G \tilde{C}_i$

O tempo necessário para obtenção deste controlador foi de 167 segundos.

### 5.6.3 CONTROLADOR DE ORDEM 3

$$A_c = \begin{bmatrix} -33,4111 & 0 & 0 \\ 0 & -33,4111 & 0 \\ 0 & 0 & -13,5406 \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7,0898 & -14,6215 & 0,9962 & 0,1114 & 6,1749 & -14,9969 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,6880 \\ 0 & 0 & 7,3407 \\ 0 & 0 & -5,0919 \\ 0 & 0 & -4,1217 \\ 0 & 0 & 2,6292 \\ 0 & 0 & -4,1158 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} -6,0318 & 7,0398 & 6,5176 & 16,8334 & -1,0194 & -1,4233 \\ -22,0960 & -1,4384 & 6,6679 & -17,4524 & -8,1950 & -1,1779 \\ 12,6079 & 21,3741 & -20,7150 & 5,7037 & -14,8094 & 3,9327 \\ 20,3153 & -21,7190 & -16,5277 & -10,1807 & 2,9859 & 18,9555 \\ -8,6940 & 3,4215 & -33,4393 & -10,0547 & -8,7917 & -7,2502 \\ -3,1457 & -19,1790 & -1,2197 & 8,2135 & -0,7975 & 6,1046 \end{bmatrix}$$

Os pólos de MF do sistema são:

TAB.5.18: Pólos de MF para  $n_c = 3$ , Caso 5

matriz	autovalores
$\tilde{A}_{1MF}$	$-218,4000; -15,4477; -4,7830; -1,2195 \pm 1,4486j; -2,0041; -0,8604; -33,4111; -33,4111$
$\tilde{A}_{2MF}$	$-121,8704; -14,4698; -8,8682; -7,2425; -0,3634; -1,7800 \pm 2,3904j; -33,4111; -33,4111$
$\tilde{A}_{3MF}$	$-69,4431; -11,3799 \pm 4,0741j; -1,1575 \pm 1,1177j; -0,5863; -1,0763; -33,4111; -33,4111$

onde  $\tilde{A}_{iMF} = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i G \tilde{C}_i$

O tempo necessário para obtenção deste controlador foi de 1380 segundos.

#### 5.6.4 CONTROLADOR DE ORDEM 1

A busca por um controlador de ordem 1 resultou em um controlador estático com a matriz de ganho de realimentação:

$$K = \begin{bmatrix} -12,8070 & -18,1842 & 3,2051 & -9,5233 & -17,5819 & 22,9699 \\ -8,5648 & 8,6237 & 4,8798 & -12,8867 & -2,1862 & 13,3017 \\ 4,0298 & -12,0551 & 8,2898 & -0,1669 & -0,6668 & -16,1887 \\ 13,1369 & -10,1264 & -18,7832 & -11,4669 & -12,6905 & 14,5763 \\ 11,3527 & 7,040 & 20,4269 & -40,8911 & 5,2967 & -10,0210 \\ 0,5866 & -31,3985 & -9,3399 & 3,5999 & 17,2762 & -17,4530 \end{bmatrix}$$

Os pólos de MF do sistema são:

TAB.5.19: Pólos de MF para controlador estático, Caso 5

matriz	autovalores
$\tilde{A}_{1MF}$	$-203,3276; -7,6325; -2,4905; -1,6305; -1,2191; -0,6309;$
$\tilde{A}_{2MF}$	$-180,0411; -3,5151 \pm 5,0930j; -3,9783; -0,4180; -1,8123;$
$\tilde{A}_{3MF}$	$-159,2209; -15,9696; -5,6782; -1,7236 \pm 0,7191j; -0,3646;$

onde  $\tilde{A}_{iMF} = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i G \tilde{C}_i$

O tempo necessário para obtenção deste controlador foi de 153 segundos.

#### 5.7 CASO 6: MODELO DE UM HELICÓPTERO

Neste caso, será abordado o problema da estabilização simultânea de um sistema MIMO, descrito pelo modelo de um helicóptero empregado em trabalho na área de controle robusto (SAMBLANCAT, 1991). As noções sobre o seu funcionamento, que podem

ser vistas no Apêndice A, colocam em evidência a complexidade do sistema e a grande carga de trabalho a que está sujeito o piloto. Sendo assim, a elaboração de uma lei de controle que diminua o seu trabalho é um problema complexo que apresenta um interesse evidente.

O que se propõe a seguir é estabilizar simultaneamente o modelo do helicóptero em questão considerando os sete pontos de operação em torno dos quais ele foi linearizado, de modo que um único controlador garanta a sua estabilidade em relação a todos os pontos de operação. As matrizes que descrevem a dinâmica do sistema no espaço de estados estão especificadas no Apêndice B.

Os pólos de MA para cada ponto de operação são:

TAB.5.20: Pólos de MA, Caso 6

matriz	autovalores
$A_1$	$-5,3878; -1,3580; 0,2220 \pm 0,5822j;$
	$-0,0603 \pm 0,6825j; -0,2025; -0,3358;$
$A_2$	$-5,5390; -1,7891; -0,1290 \pm 0,8362j;$
	$-0,0299 \pm 0,3616j; 0,1189; -0,3306;$
$A_3$	$-5,6045; -1,0859 \pm 0,9670j; -0,2985 \pm 1,2285j;$
	$-0,0185 \pm 0,2075j; -0,0746;$
$A_4$	$-5,5142; -2,0562; -0,3937 \pm 1,5464j;$
	$-0,7758; 0,0506 \pm 0,4007j; -0,0844$
$A_5$	$-5,3057; -0,4861 \pm 1,8539j; -2,06483272876989;$
	$-1,3347; 0,0305 \pm 0,4186j; -0,0881$
$A_6$	$-4,9659; -0,5533 \pm 2,1432j; -2,0804 \pm 0,6893j;$
	$0,0242 \pm 0,4049j; -0,0986$
$A_7$	$-4,2616; -2,7115 \pm 0,8663j; -0,6261 \pm 2,4295j;$
	$0,0415 \pm 0,3851j; -0,1202$

onde  $\tilde{A}_{iMF} = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i G \tilde{C}_i$

Apesar de ser objetivo deste trabalho abordar apenas os aspectos relativos à estabilidade dos sistemas considerados, que podem ser verificados pela posição dos pólos de MF, para cada ponto de operação serão mostrados também os gráficos de resposta ao impulso e ao degrau para os controladores obtidos, permitindo assim uma melhor visualização do comportamento dos sistemas com os controladores obtidos pela metodologia apresentada.

### 5.7.1 CONTROLADOR DE ORDEM 7

$$\begin{aligned}
 A_c &= \begin{bmatrix} -34,8940 & 0,0114 & -0,0147 & -0,0365 & 0,0190 & 0,0168 & -0,0488 \\ 0,0503 & -34,7095 & 0,1277 & 0,0669 & 0,0148 & 0,0435 & 0,2998 \\ -0,0087 & -0,0020 & -34,8617 & -0,0287 & 0,0437 & 0,1314 & -0,0181 \\ -0,0068 & -0,0484 & -0,0271 & -34,8701 & -0,0105 & 0,0510 & -0,0281 \\ -0,0491 & -0,0640 & -0,0734 & -0,0749 & -34,8030 & 0,0766 & -0,1507 \\ -0,0762 & -0,0257 & 0,0578 & 0,0154 & 0,0809 & -34,3323 & -0,0730 \\ -0,0079 & -0,0429 & -0,0975 & -0,0663 & 0,0475 & 0,1003 & -35,0182 \end{bmatrix} \\
 B_c &= \begin{bmatrix} 0,1292 & 0,1410 & 0,3377 & -0,1818 & -0,0530 & 0,2266 & 0,3696 & 0,4953 \\ 1,0525 & -0,6436 & -1,2440 & -0,7695 & 1,3108 & 1,7331 & 2,8516 & 0,9773 \\ -0,7739 & 0,7717 & -0,7040 & 0,8781 & -0,7040 & -0,4344 & 1,1258 & 0,4631 \\ 0,0463 & 0,6429 & 0,3566 & 1,1676 & -1,7951 & 0,4842 & -0,2358 & -0,5539 \\ 0,4607 & 0,2043 & -0,4481 & -0,2968 & 1,5846 & -1,4398 & -0,9559 & -0,9452 \\ -1,2348 & 0,4203 & -3,8099 & 0,3837 & -1,3579 & -1,6728 & 0,4256 & -1,0135 \\ -0,1429 & 1,6074 & 0,7911 & 1,234 & -0,7765 & 0,8338 & 0,1771 & 0,0855 \end{bmatrix} \\
 C_c &= \begin{bmatrix} -0,0074 & 0,0486 & 0,1130 & 0,0521 & 0,0379 & 0,1425 & 0,1601 \\ -0,0087 & 0,0163 & -0,0736 & -0,1172 & 0,0494 & -0,0170 & -0,1920 \\ -0,0625 & -0,1918 & -0,7371 & -0,7750 & 0,8313 & -1,0047 & -0,2956 \end{bmatrix} \\
 D_c &= \begin{bmatrix} -0,2572 & 0,0463 & 0,7567 & 1,2943 & -0,2633 & -0,0159 & 0,4378 & -0,0099 \\ 0,1005 & -0,0625 & -0,2172 & -0,2476 & 0,5226 & 0,7421 & 0,1957 & 0,4966 \\ 0,2045 & 0,4816 & -2,4526 & 3,9328 & 21,0058 & 7,1418 & -22,8640 & 8,5295 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Os pólos de MF do sistema são:

TAB.5.21: Pólos de MF para  $n_c = 7$ , Caso 6

matriz	autovalores
$\tilde{A}_{1MF}$	$-279,3331; -66,5271; -13,2523; -0,3593 \pm 2,2880j; -0,7343 \pm 1,5985j;$ $-0,3196; -34,4905 \pm 0,6088j; -0,3499; -34,8546 \pm 0,0345j; -34,8676; -34,8941$
$\tilde{A}_{2MF}$	$-249,9279; -67,6879; -11,3015; -5,8123; -2,0662 \pm 0,5410j;$ $-0,6481 \pm 0,4688j; -34,6578 \pm 0,4467j; -35,0913; -34,8423; -34,8676 \pm 0,0125j; -34,8948$
$\tilde{A}_{3MF}$	$-271,8185; -69,2490; -0,5299 \pm 0,5881j; -1,0868; -6,7126 \pm 2,3842j;$ $-12,2929; -35,4053; -34,7313 \pm 0,1376j; -35,0003; -34,8656; -34,8755; -34,8915$
$\tilde{A}_{4MF}$	$-303,5688; -71,9730; -6,3527 \pm 5,1095j; -0,8781; -0,3955 \pm 0,5965j; -17,5298;$ $-35,8558; -35,2625; -34,6875 \pm 0,0921j; -0,3488 \pm 0,0076j; -34,8928$
$\tilde{A}_{5MF}$	$-319,6986; -75,5469; -6,1240 \pm 6,5719j; -0,3278 \pm 0,6230j; -0,8168; -21,7519;$ $-36,3599; -35,5863; -34,7062 \pm 0,1133j; -34,8817 \pm 0,0050j; -34,8923$
$\tilde{A}_{6MF}$	$-326,4438; -80,4788; -5,7027 \pm 7,5028j; -0,2537 \pm 0,6679j; -0,8121; -24,7058;$ $-36,7860; -36,1324; -34,7251 \pm 0,1192j; -34,8798; -34,8899 \pm 0,0015j$
$\tilde{A}_{7MF}$	$-328,0303; -87,3883; -5,2104 \pm 7,6538j; -0,1466 \pm 0,7570j; -0,8754; -26,0249;$ $-36,9148 \pm 0,4850j; -34,7316 \pm 0,1075j; -34,8780; -34,8925 \pm 0,0037j$

onde  $\tilde{A}_{iMF} = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i G \tilde{C}_i$

O tempo necessário para obtenção deste controlador foi de 12 segundos.

Os gráficos de resposta ao degrau e ao impulso para o sistema em malha fechada com o controlador de ordem 7 seguem adiante:

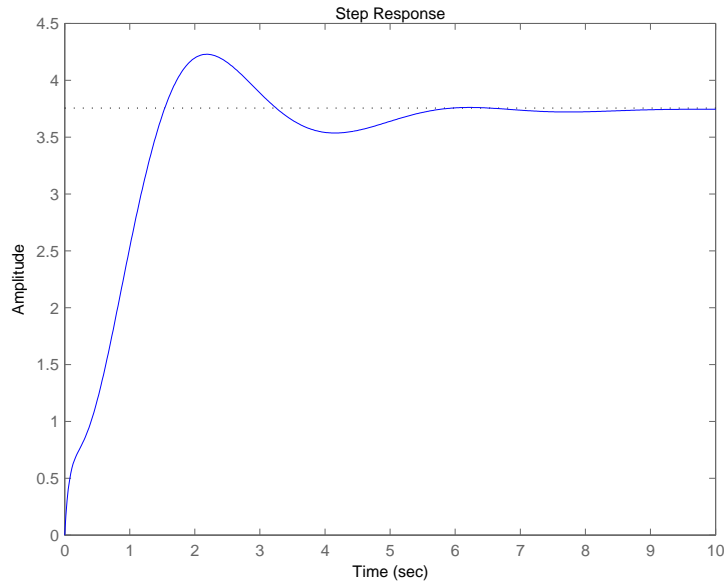


FIG.5.1: Resposta ao degrau para o ponto de operação 1: Entrada 1 - Saída 1



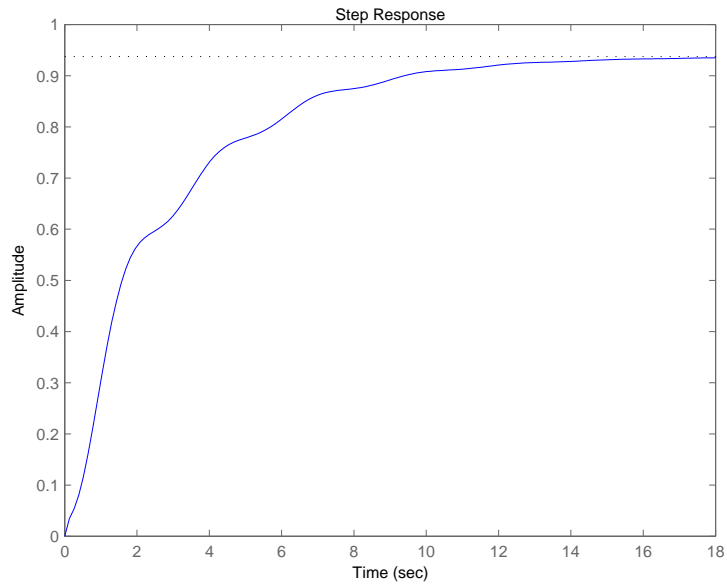


FIG.5.2: Resposta ao degrau para o ponto de operação1: Entrada 1 - Saída 2

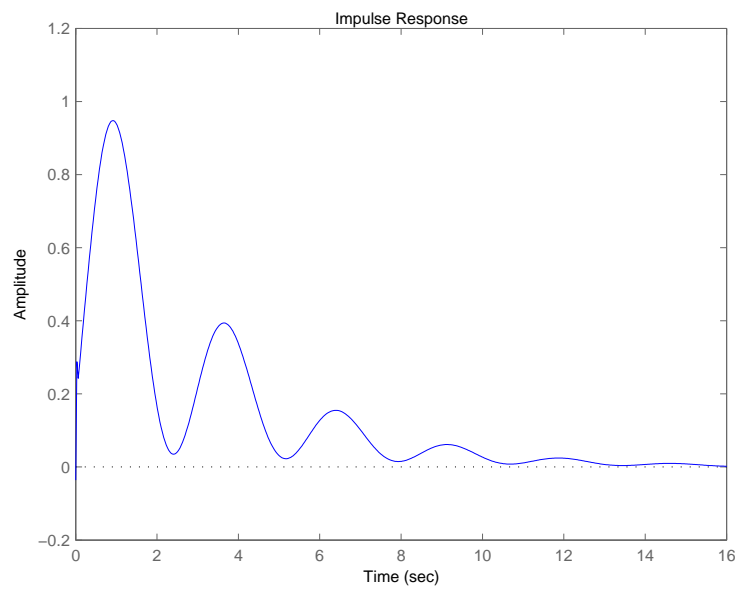


FIG.5.3: Resposta ao impulso para o ponto de operação 1: Entrada 1 - Saída 1

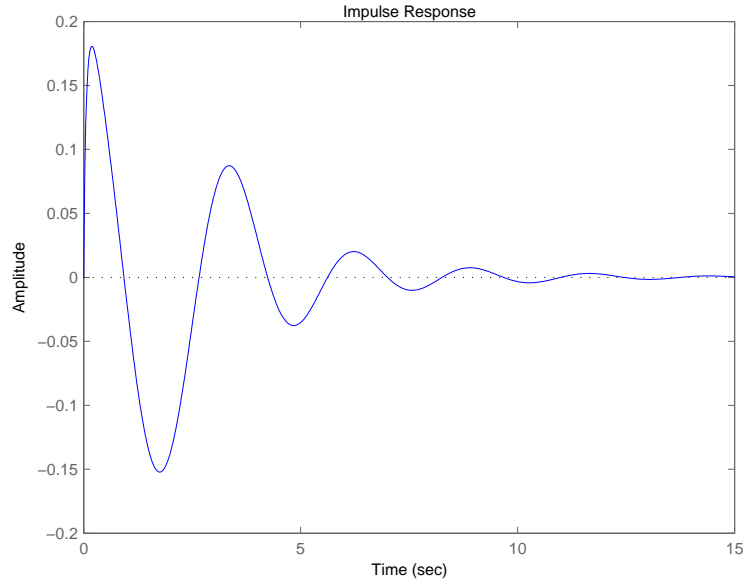


FIG.5.4: Resposta ao impulso para o ponto de operação 1: Entrada 2 - Saída 4

## 5.7.2 CONTROLADOR DE ORDEM 6

$$A_c = \begin{bmatrix} -36,9611 & 0 & 0 & 0 & -0,0488 & 0 \\ 0 & 36,9459 & -0,0012 & 0,0204 & 0,0064 & -0,0175 \\ 0 & -0,0191 & -36,8941 & 0,0709 & -0,0049 & 0,06198 \\ 0 & -0,0409 & -0,0003 & -36,8611 & -0,0565 & -0,1222 \\ 0 & 0,0254 & 0,0115 & -0,0316 & -36,9059 & 0,0707 \\ 0 & -0,0531 & 0,1335 & 0,1972 & -0,0305 & -36,7150 \end{bmatrix}$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5449 & -0,3184 & -0,3017 & -0,8934 & 0,6955 & 0,1629 & 0,4542 & -0,4853 \\ 0,1967 & 0,0622 & -1,3154 & 0,4762 & 0,2960 & -0,0771 & 0,1372 & 0,6145 \\ 0,2020 & 0,3378 & 0,3545 & 2,1865 & -1,6219 & 1,0497 & -0,3206 & 0,4577 \\ 0,4969 & 0,0087 & -0,5060 & -0,6601 & 1,2144 & -1,0822 & 0,2536 & -1,0294 \\ -1,4991 & 0,0082 & -3,0033 & 1,4394 & 0,1262 & -0,7171 & -0,2517 & -0,3467 \end{bmatrix}$$

$$C_c = \begin{bmatrix} 0 & -0,0758 & 0,1922 & 0,3427 & -0,0284 & 0,08445 \\ 0 & 0,0673 & 0,0048 & -0,2056 & 0,0219 & 0,0653 \\ 0 & -0,0550 & 0,4465 & 0,1093 & -0,1932 & 0,2654 \end{bmatrix}$$

$$D_c = \begin{bmatrix} -0,4609 & 0,0118 & 1,5298 & 1,9836 & -0,2474 & 0,6963 & 1,2507 & 0,4967 \\ 0,252 & -0,2509 & -0,4455 & -0,6613 & 1,2086 & 2,4211 & 1,3893 & 1,4059 \\ -0,0011 & 0,3966 & -0,8235 & 5,9600 & 24,2082 & 9,7614 & -23,1175 & 10,6399 \end{bmatrix}$$

Os pólos de MF do sistema são:

TAB.5.22: Pólos de MF para  $n_c = 6$ , Caso 6

matriz	autovalores
$\tilde{A}_{1MF}$	$-331,6498; -210,3638; -0,3638 \pm 2,3107j; -0,6103 \pm 1,5274j; -0,3262; -29,6230;$ $-36,2638; -37,4938; -36,8789; -36,9383; -36,9570; -36,9611;$
$\tilde{A}_{2MF}$	$-302,2768; -209,2218; -0,7311 \pm 0,4509j; -1,4889 \pm 0,9454j; -5,9012; -28,4665;$ $-37,6967; -36,4101; -36,8904; -36,9386; -36,9566; -36,9611;$
$\tilde{A}_{3MF}$	$-315,7567; -218,7281; -0,5807 \pm 0,5892j; -1,4046; -2,8500; -11,8041; -27,3969;$ $-37,9770; -36,5384; -36,8996; -36,9390; -36,9565; -36,9611;$
$\tilde{A}_{4MF}$	$-341,4029; -229,2449; -0,4297 \pm 0,6050j; -1,0119; -5,0274; -15,8290; -25,7669;$ $-37,8981; -36,6269; -36,9100; -36,9394; -36,9575; -36,9611$
$\tilde{A}_{5MF}$	$-353,8408; -235,9448; -0,3609 \pm 0,6372; -0,9185; -7,5411; -15,1914; -29,1836;$ $-37,7334; -36,7122; -36,9779; -36,9377 \pm 0,0013j; -36,9611$
$\tilde{A}_{6MF}$	$-357,8356; -241,7690; -0,2843 \pm 0,6939j; -0,8937; -10,9105 \pm 3,6275j; -35,0208;$ $-36,8346 \pm 0,9839j; -36,8589; -36,9476; -36,9416; -36,9611$
$\tilde{A}_{7MF}$	$-357,4897; -249,1504; -9,8858 \pm 5,3358j; -0,1663 \pm 0,8057j; -0,9443; -38,4900 \pm 2,7420j;$ $-36,4617; -36,8821; -36,9452 \pm 0,0001j; -36,9611$

onde  $\tilde{A}_{iMF} = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i G \tilde{C}_i$

O tempo necessário para obtenção deste controlador foi de 310 segundos.

Os gráficos de resposta ao degrau e ao impulso para o sistema em malha fechada com o controlador de ordem 6 seguem adiante:

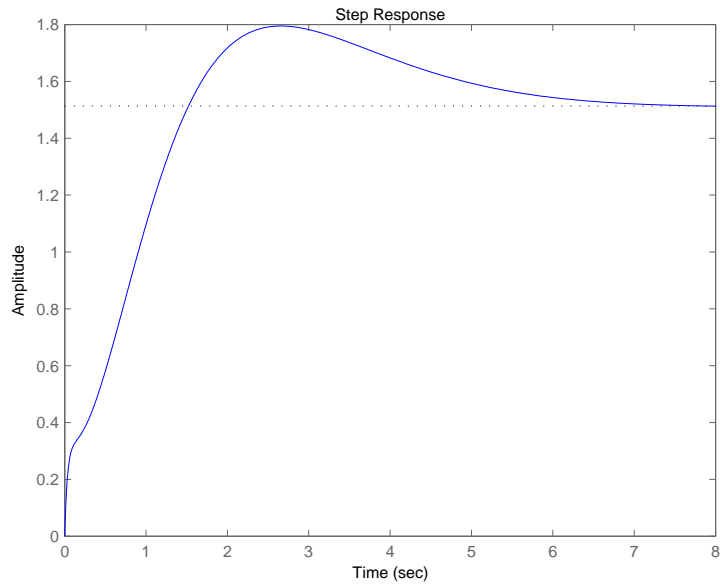


FIG.5.5: Resposta ao degrau para o ponto de operação 2: Entrada 1 - Saída 1

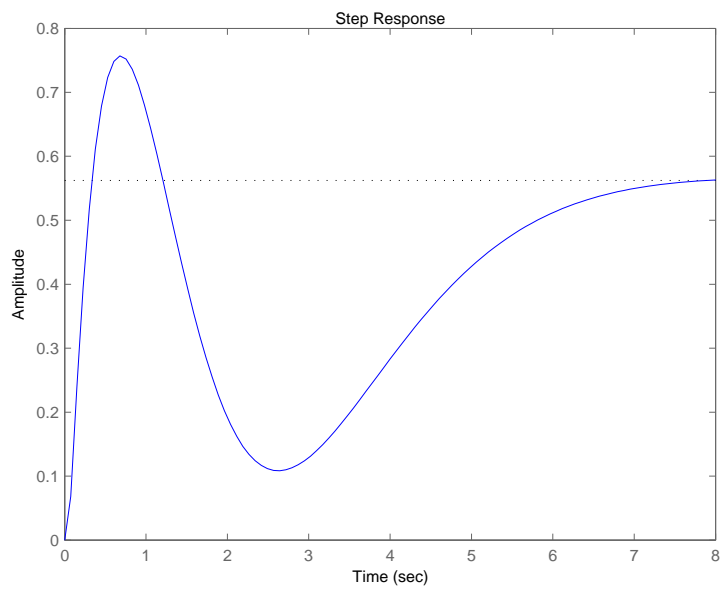


FIG.5.6: Resposta ao degrau para o ponto de operação 2: Entrada 2 - Saída 2

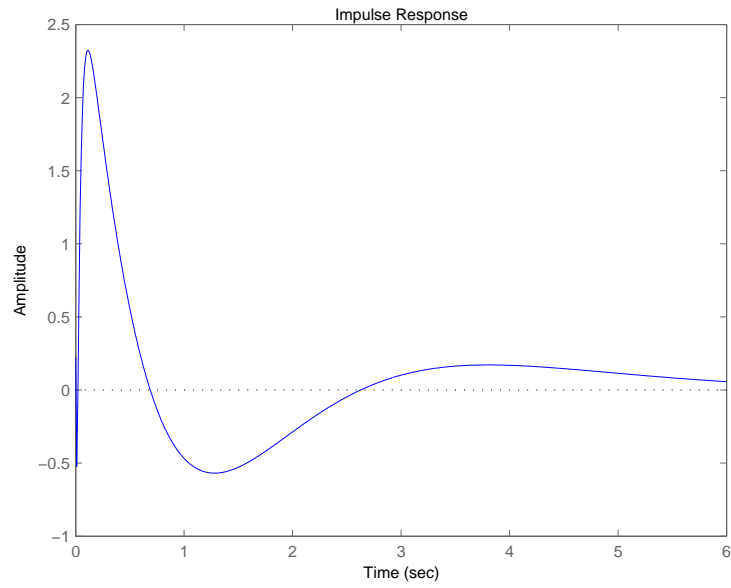


FIG.5.7: Resposta ao impulso para o ponto de operação 2: Entrada 2 - Saída 2

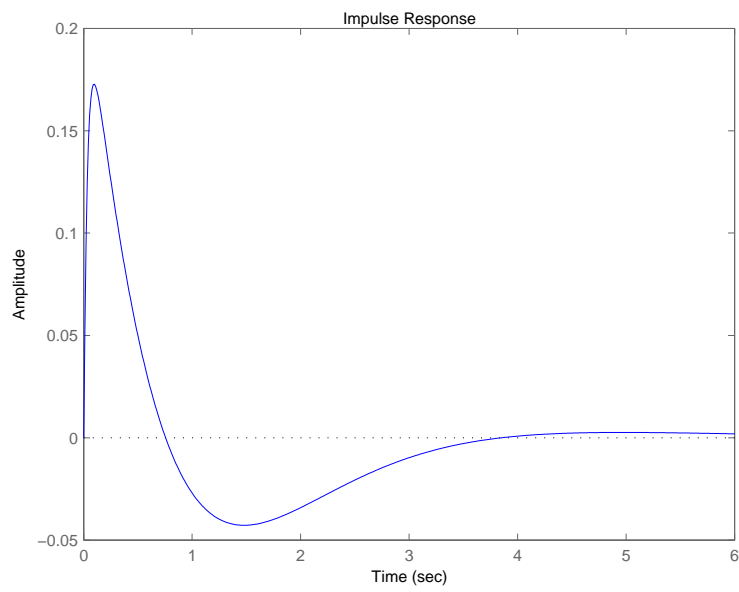


FIG.5.8: Resposta ao impulso para o ponto de operação 2: Entrada 2 - Saída 4

### 5.7.3 CONTROLADOR DE ORDEM 5

$$\begin{aligned}
 A_c &= \begin{bmatrix} -40,1236 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -40,1236 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 39,9770 & 0,0583 & 0,0246 \\ 0 & 0 & 0,0853 & -40,0337 & -0,0076 \\ 0 & 0 & 0,0048 & -0,0739 & -40,0189 \end{bmatrix} \\
 B_c &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3026 & 0,0493 & -2,1891 & -0,3538 & -0,2807 & -0,1602 & 0,4520 & 0,7320 \\ 0,5025 & 0,4190 & -0,5401 & 1,3285 & -1,8435 & 0,7014 & -0,2856 & 0,0375 \\ 0,7645 & 0,1348 & -0,7907 & -0,4203 & 1,5534 & -1,4517 & -0,5737 & -1,3218 \end{bmatrix} \\
 C_c &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,1228 & 0,0874 & 0,0720 \\ 0 & 0 & -0,0361 & -0,1399 & 0,0399 \\ 0 & 0 & -0,0886 & -0,4615 & 0,5240 \end{bmatrix} \\
 D_c &= \begin{bmatrix} -0,3349 & 0,0996 & 0,8745 & 1,4214 & -0,2882 & -0,2901 & 0,1417 & -0,1305 \\ 0,1271 & -0,1090 & -0,2521 & -0,2874 & 0,5604 & 0,9356 & 0,3795 & 0,5690 \\ 0,0825 & 0,6603 & -2,0239 & 4,9243 & 23,3597 & 7,3385 & -27,8064 & 9,4113 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Os pólos de MF do sistema são:

TAB.5.23: Pólos de MF para  $n_c = 5$ , Caso 6

matriz	autovalores
$\tilde{A}_{1MF}$	$-322,1177; -83,8940; -40,2507; -40,1094; -39,7297; -15,1554;$ $-0,3448 \pm 2,2767j; -0,6730 \pm 1,6258j; -0,3267; -40,1236; -40,1236;$
$\tilde{A}_{2MF}$	$-289,5727; -84,9424; -13,7502; -5,6686; -1,8328 \pm 0,8135j; -0,6745 \pm 0,4744j;$ $-40,2783; -39,7508; -40,1081; -40,1236; -40,1236;$
$\tilde{A}_{3MF}$	$-316,7050; -86,5751; -11,7308; -10,9160; -5,0092; -1,1001;$ $-0,5488 \pm 0,6036j; -40,3167; -39,8104; -40,1102; -40,1236; -40,1236$
$\tilde{A}_{4MF}$	$-355,6597; -89,2423; -0,4056 \pm 0,6150j; -0,8582; -7,7130 \pm 3,8970j; -16,7981;$ $-40,3173; -39,8994; -40,1300; -40,1236; -40,1236$
$\tilde{A}_{5MF}$	$-376,5459; -92,8919; -7,5646 \pm 5,8552j; -0,3341 \pm 0,6432j; -0,7905; -21,1885$ $-40,3220; -40,2406; -39,9921; -40,1236; -40,1236$
$\tilde{A}_{6MF}$	$-386,6772; -98,2167; -7,1440 \pm 7,0320j; -0,2551 \pm 0,6902j; -0,7846; -24,6127;$ $-40,4065 \pm 0,0459j; -40,0292; -40,1236; -40,1236$
$\tilde{A}_{7MF}$	$-390,9494; -106,1795; -6,5993 \pm 7,1924j; -0,1388 \pm 0,7834j; -0,8509; -26,5007;$ $-40,7402; -40,4040; -40,0401; -40,1236; -40,1236$

onde  $\tilde{A}_{iMF} = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i G \tilde{C}_i$

O tempo necessário para obtenção deste controlador foi de 298 segundos.

Os gráficos de resposta ao degrau e ao impulso para o sistema em malha fechada com o controlador de ordem 5 seguem adiante:

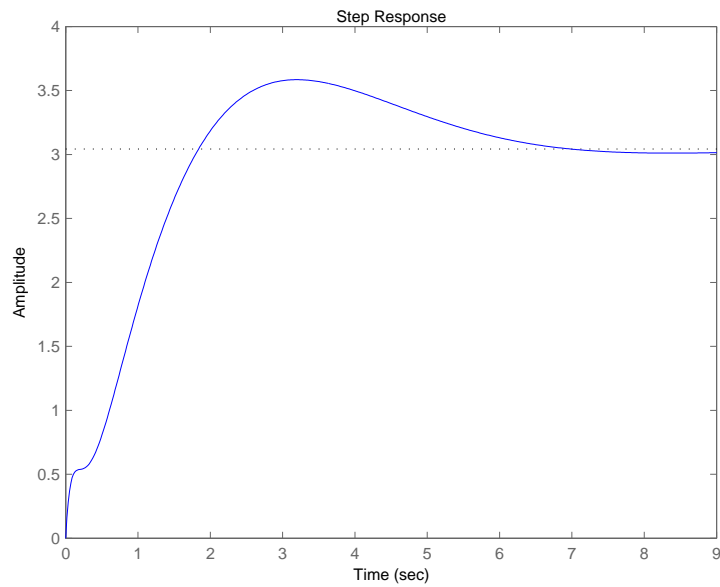


FIG.5.9: Resposta ao degrau para o ponto de operação 3: Entrada 1 - Saída 1

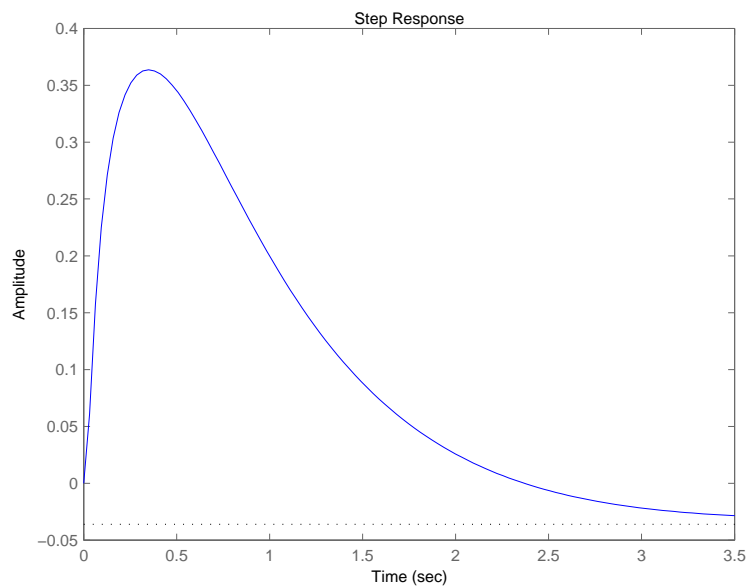


FIG.5.10: Resposta ao degrau para o ponto de operação 3: Entrada 2 - Saída 5

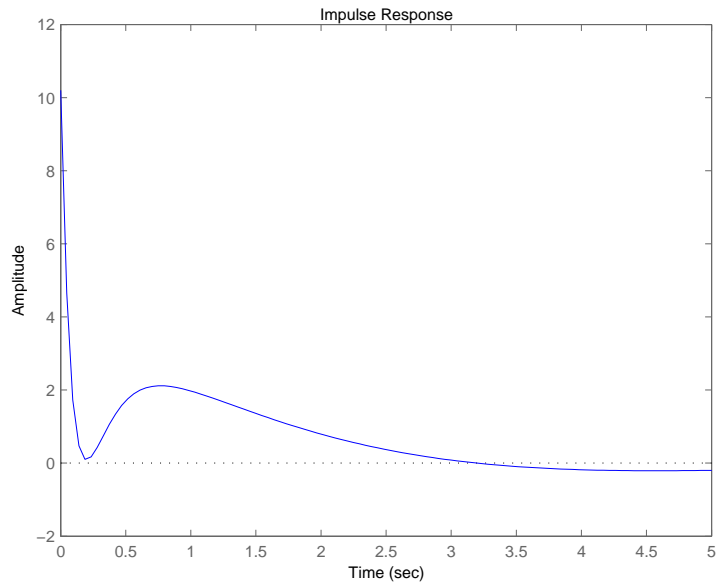


FIG.5.11: Resposta ao impulso para o ponto de operação 3: Entrada 1 - Saída 1

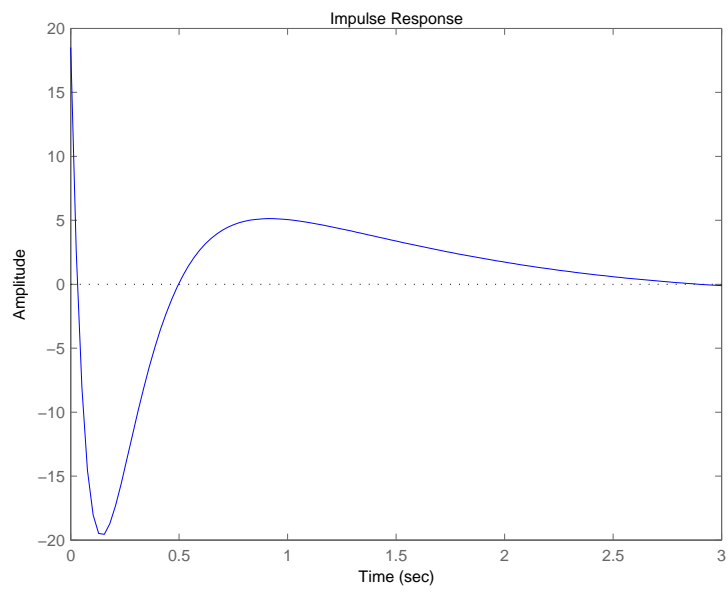


FIG.5.12: Resposta ao impulso para o ponto de operação 3: Entrada 1 - Saída 2



### 5.7.4 CONTROLADOR DE ORDEM 4

$$\begin{aligned}
 A_c &= \begin{bmatrix} -43,1576 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -43,1576 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 43,1576 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -43,0689 \end{bmatrix} \\
 B_c &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,4577 & 0,3662 & 0,2302 & 2,1294 & -2,0240 & 1,0437 & -0,7787 & 0,4591 \end{bmatrix} \\
 C_c &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0,4154 \\ 0 & 0 & 0 & -0,2948 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1113 \end{bmatrix} \\
 D_c &= \begin{bmatrix} -0,8514 & 0,3606 & 2,2057 & 2,7929 & -1,1901 & -2,0082 & -0,8286 & -0,8072 \\ 0,4379 & -0,4345 & -0,8957 & -1,2384 & 1,8766 & 3,8735 & 2,4779 & 2,1413 \\ -0,2100 & 0,4622 & -0,4912 & 6,8396 & 28,8963 & 11,9211 & -27,2637 & 12,9050 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Os pólos de MF do sistema são:

TAB.5.24: Pólos de MF para  $n_c = 4$ , Caso 6

matriz	autovalores
$\tilde{A}_{1MF}$	$-419,8890; -289,7925; -35,4447; -42,9518; -0,3761 \pm 2,3607j; -0,5358 \pm 1,6048j;$ $-0,3253; -43,1576; -43,1576; -43,1576$
$\tilde{A}_{2MF}$	$-391,8923; -281,2157; -43,1410; -34,4642; -5,9104; -1,5023 \pm 1,1317j;$ $-0,6933 \pm 0,4738j; -43,1576; -43,1576; -43,1576$
$\tilde{A}_{3MF}$	$-399,2270; -304,6891; -43,3842; -32,6961; -12,0571; -2,4847;$ $-1,7902; -0,5505 \pm 0,5881j; -43,1576; -43,1576; -43,1576$
$\tilde{A}_{4MF}$	$-417,9017; -332,5203; -43,4345; -27,9278; -18,0176; -4,8822;$ $-1,1207; -0,4081 \pm 0,5954j; -43,1576; -43,1576; -43,1576$
$\tilde{A}_{5MF}$	$-425,01883; -354,4820; -43,4228; -25,2451; -22,5461; -6,9897;$ $-0,9992; -0,3432 \pm 0,6234j; -43,1576; -43,1576; -43,1576$
$\tilde{A}_{6MF}$	$-418,4819; -383,7163; -43,2840; -28,9134; -18,0946; -10,0236;$ $-0,9643; -0,2717 \pm 0,6767j; -43,1576; -43,1576; -43,1576$
$\tilde{A}_{7MF}$	$-413,8438 \pm 29,5166j; -43,0313; -32,9566; -12,3801 \pm 3,4350j; -1,0227;$ $-0,1612 \pm 0,7857j; -43,1576; -43,1576; -43,1576$

onde  $\tilde{A}_{iMF} = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i G \tilde{C}_i$

O tempo necessário para obtenção deste controlador foi de 376 segundos.

Os gráficos de resposta ao degrau e ao impulso para o sistema em malha fechada com o controlador de ordem 4 seguem adiante:

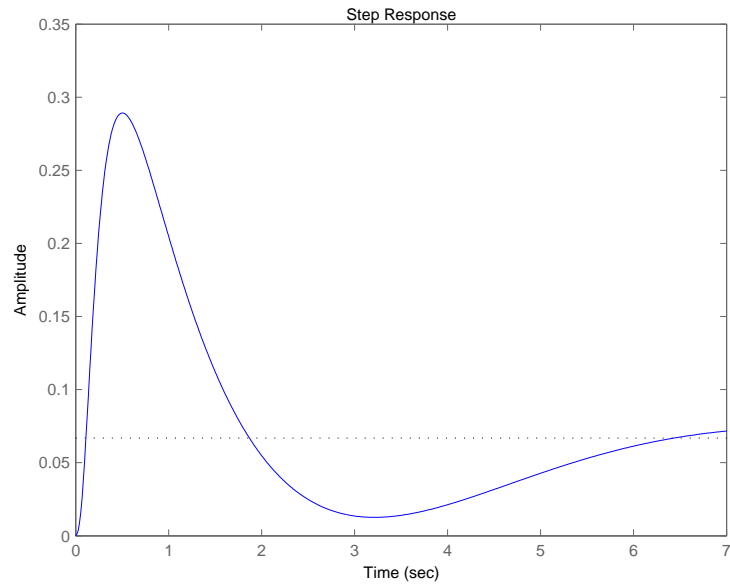


FIG.5.13: Resposta ao degrau para o ponto de operação 4: Entrada 1 - Saída 5

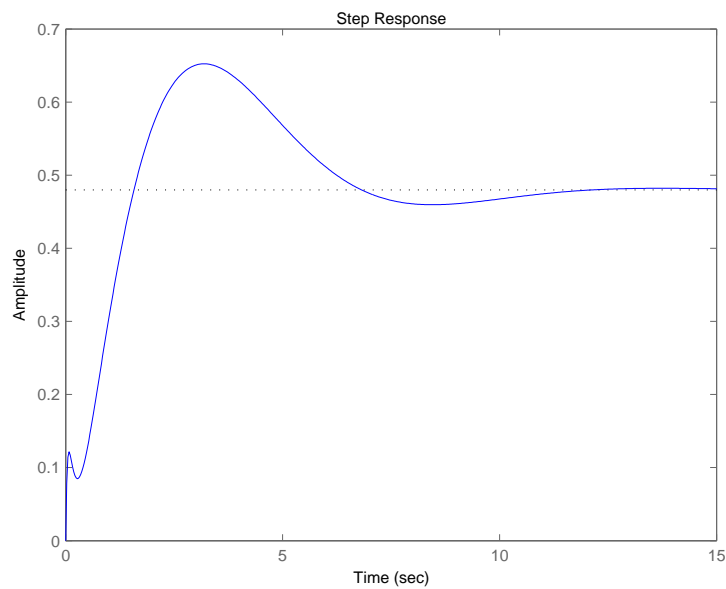


FIG.5.14: Resposta ao degrau para o ponto de operação 4: Entrada 2 - Saída 1

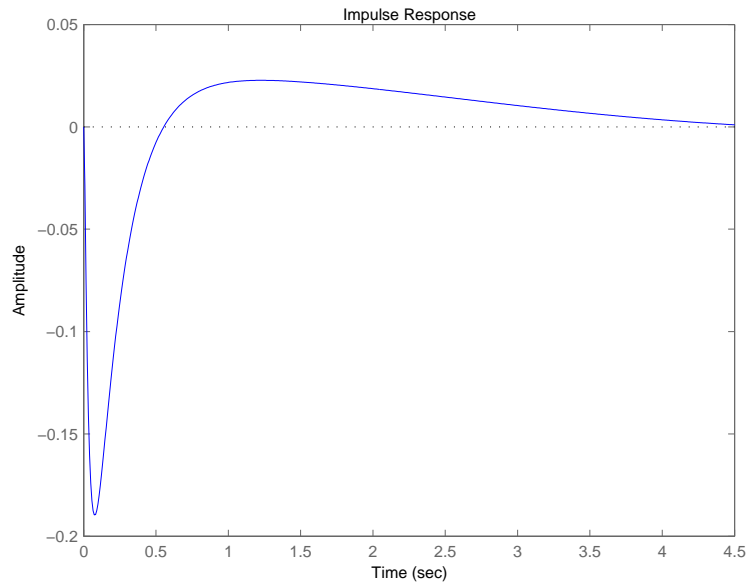


FIG.5.15: Resposta ao impulso para o ponto de operação 4: Entrada 2 - Saída 4

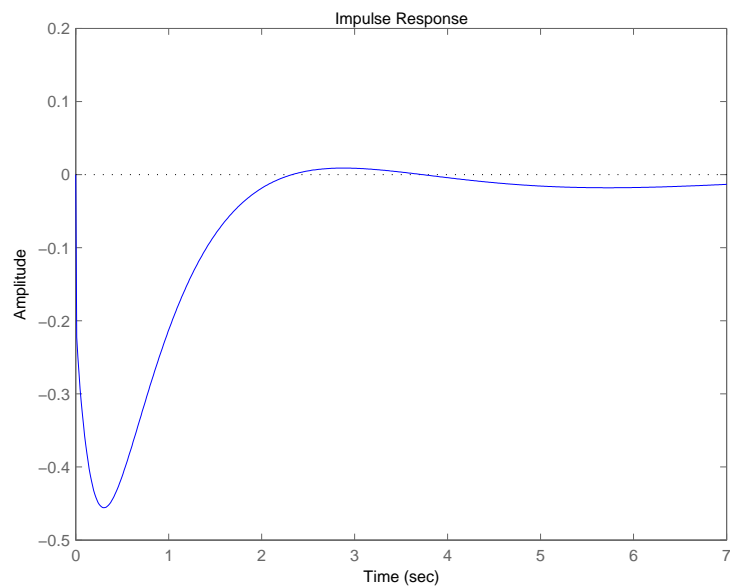


FIG.5.16: Resposta ao impulso para o ponto de operação 4: Entrada 2 - Saída 8

### 5.7.5 CONTROLADOR DE ORDEM 3

A busca por um controlador de ordem 3 resultou em um controlador estático com a matriz de ganho de realimentação:

$$K = \begin{bmatrix} -1,1059 & 0,4160 & 2,9183 & 3,4274 & -1,0767 & -2,0287 & -0,7710 & -0,7050 \\ 0,5623 & -0,5501 & -1,3112 & -1,5826 & 2,1971 & 4,5951 & 2,9307 & 2,3616 \\ -0,3214 & 0,1727 & 0,2869 & 8,1512 & 33,6492 & 17,9083 & -26,3850 & 16,5814 \end{bmatrix}$$

Os pólos de MF do sistema são:

TAB.5.25: Pólos de MF para controlador estático, Caso 6

matriz	autovalores
$\tilde{A}_{1MF}$	$-497,6468; -320,3511; -47,2538; -0,4965 \pm 1,6256j; -0,3675 \pm 2,3757j;$ $-0,3294;$
$\tilde{A}_{2MF}$	$-467,5498; -310,0803; -46,6458; -5,9931; -1,3097 \pm 1,2861j;$ $-0,7132 \pm 0,4382j;$
$\tilde{A}_{3MF}$	$-471,6409; -339,1183; -45,4342; -12,2186; -1,7497 \pm 0,8370j;$ $-0,6106 \pm 0,5707j;$
$\tilde{A}_{4MF}$	$-483,4069; -377,7215; -39,8236; -18,5435; -3,6333; -1,1370;$ $-0,4641 \pm 0,6197j;$
$\tilde{A}_{5MF}$	$-481,5366; -410,9124; -35,2589; -25,1923; -4,9974;$ $-0,9596; -0,3927 \pm 0,6678j;$
$\tilde{A}_{6MF}$	$-458,5297 \pm 21,1212j; -30,2521 \pm 5,4580j; -6,1244; -0,9103;$ $-0,3086 \pm 0,7423j;$
$\tilde{A}_{7MF}$	$-472,7274 \pm 47,0107j; -30,0148 \pm 5,9843j; -6,0952; -0,1703 \pm 0,8862j;$ $-0,9708;$

onde  $\tilde{A}_{iMF} = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i G \tilde{C}_i$

O tempo necessário para obtenção deste controlador foi de 349 segundos.

Os gráficos de resposta ao degrau e ao impulso para o sistema em malha fechada com o controlador estático obtido seguem adiante:

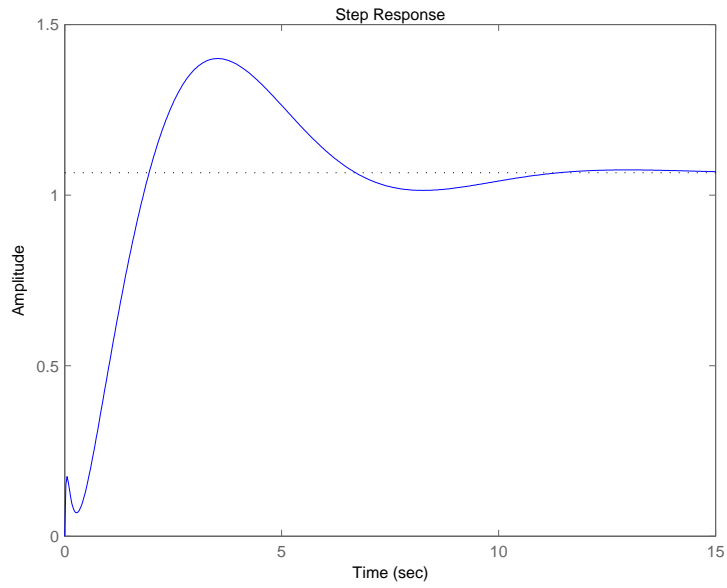


FIG.5.17: Resposta ao degrau para o ponto de operação 5: Entrada 1 - Saída 1

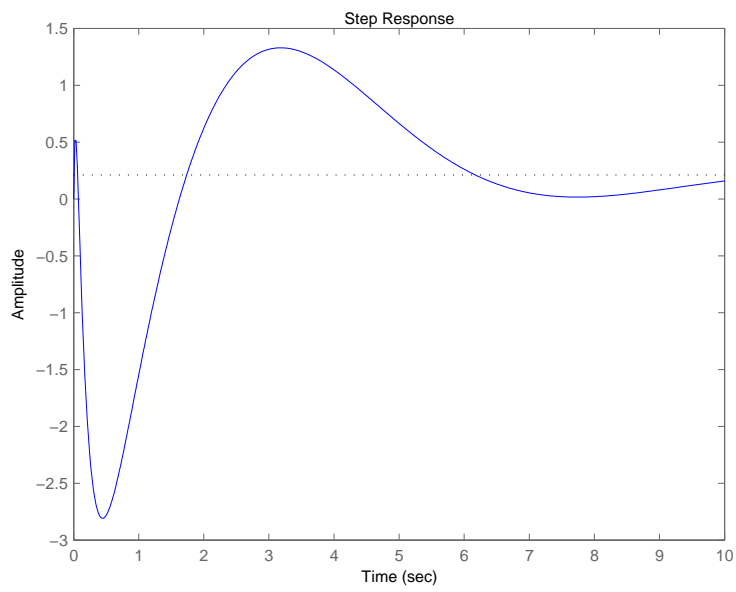


FIG.5.18: Resposta ao degrau para o ponto de operação 5: Entrada 2 - Saída 1

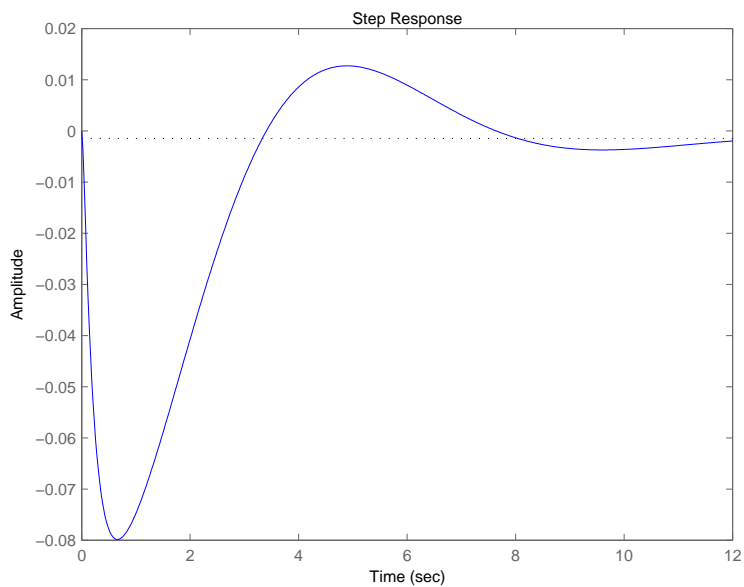


FIG.5.19: Resposta ao impulso para o ponto de operação 5: Entrada 1 - Saída 4

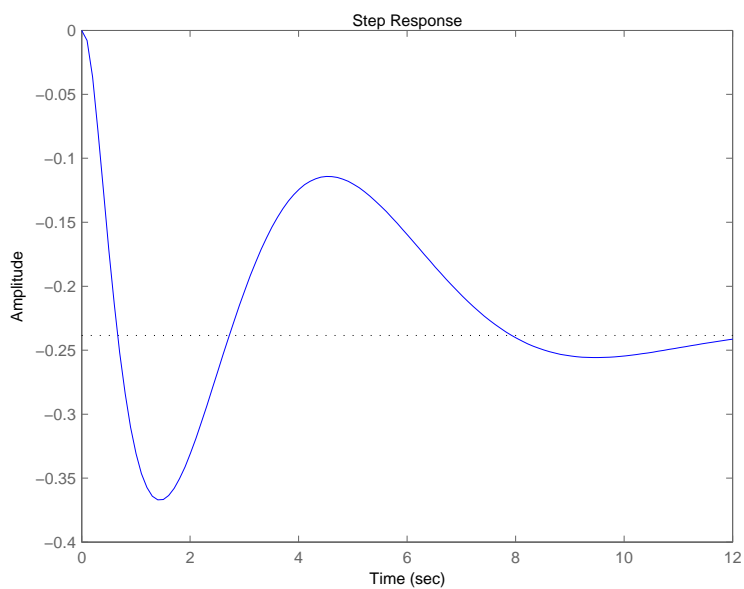


FIG.5.20: Resposta ao impulso para o ponto de operação 5: Entrada 1 - Saída 8

### 5.7.6 CONTROLADOR DE ORDEM 2

A busca por um controlador de ordem 2 resultou em um controlador estático com a matriz de ganho de realimentação:

$$K = \begin{bmatrix} -1,0008 & 0,3707 & 2,8441 & 3,3655 & -0,7576 & -1,6859 & -0,8417 & -0,5206 \\ 0,5515 & -0,5342 & -1,2766 & -1,4568 & 2,5361 & 4,7306 & 2,7356 & 2,5114 \\ -0,0091 & 0,0574 & -0,0393 & 8,4849 & 38,4042 & 20,2672 & -29,5068 & 18,4841 \end{bmatrix}$$

Os pólos de MF do sistema são:

TAB.5.26: Pólos de MF para controlador estático, Caso 6

matriz	autovalores
$\tilde{A}_{1MF}$	$-564,7288; -319,6038; -46,0874; -0,3665 \pm 2,3958j; -0,5021 \pm 1,5650j; -0,3268;$
$\tilde{A}_{2MF}$	$-529,0985; -310,8319; -45,6630; -5,9753; -1,2810 \pm 1,2180j; -0,7167 \pm 0,4455j;$
$\tilde{A}_{3MF}$	$-544,2699; -333,5112; -44,7120; -12,1846; -1,7011 \pm 0,7986j; -0,6023 \pm 0,5777j;$
$\tilde{A}_{4MF}$	$-573,7896; -361,2358; -39,5767; -18,4209; -3,4476; -1,1348; -0,4543 \pm 0,6179j;$
$\tilde{A}_{5MF}$	$-588,4830; -381,8871; -35,8562; -24,6404; -4,7084; -0,9618; -0,3837 \pm 0,6621j;$
$\tilde{A}_{6MF}$	$-594,7257; -402,8401; -30,5209 \pm 4,2657j; -5,7254; -0,9142; -0,3011 \pm 0,7323j;$
$\tilde{A}_{7MF}$	$-598,2927; -429,9411; -30,4287 \pm 4,6039j; -5,7131; -0,1665 \pm 0,8675j; -0,9758;$

onde  $\tilde{A}_{iMF} = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i G \tilde{C}_i$

O tempo necessário para obtenção deste controlador foi de 154 segundos.

### 5.7.7 CONTROLADOR DE ORDEM 1

A busca por um controlador de ordem 1 resultou em um controlador estático com a matriz de ganho de realimentação:

$$K = \begin{bmatrix} -1,6107 & 0,9803 & 3,6513 & 4,4381 & -2,8692 & -6,6458 & -4,2563 & -3,0578 \\ 1,1000 & -1,0134 & -2,2682 & -2,8180 & 3,4092 & 8,3359 & 5,8010 & 4,3680 \\ -0,4089 & 0,0967 & -1,5632 & 8,2167 & 44,9740 & 22,2691 & -37,1429 & 22,0367 \end{bmatrix}$$

Os pólos de MF do sistema são:

TAB.5.27: Pólos de MF para controlador estático, Caso 6

matriz	autovalores
$\tilde{A}_{1MF}$	$-770, 4760; -500, 7040; -39, 1185; -0, 4963 \pm 1, 6945j;$ $-0, 3850 \pm 2, 3243j; -0, 3261;$
$\tilde{A}_{2MF}$	$-746, 9462; -469, 8321; -38, 1316; -6, 0961;$ $-1, 500 \pm 1, 2151j; -0, 6971 \pm 0, 4671j;$
$\tilde{A}_{3MF}$	$-738, 3343; -527, 5901; -36, 0995; -12, 3786; -2, 4836;$ $-1, 8916; -0, 5560 \pm 0, 5913j;$
$\tilde{A}_{4MF}$	$-710, 0682; -627, 7959; -30, 2164; -18, 7867; -5, 1163;$ $-1, 1409; -0, 4091 \pm 0, 6010j;$
$\tilde{A}_{5MF}$	$-693, 7789 \pm 64, 5075j; -25, 0357 \pm 3, 0930j; -7, 3880;$ $-1, 0153; -0, 3424 \pm 0, 6300j;$
$\tilde{A}_{6MF}$	$-716, 8157 \pm 86, 6969j; -25, 1949; -22, 8647; -10, 6483;$ $-0, 9770; -0, 2694 \pm 0, 6851j;$
$\tilde{A}_{7MF}$	$-746, 1438 \pm 88, 8913j; -30, 8429; -13, 7198 \pm 3, 7276j$ $-1, 0297; -0, 1557 \pm 0, 7994j;$

onde  $\tilde{A}_{iMF} = \tilde{A}_i + \tilde{B}_i G \tilde{C}_i$

O tempo necessário para obtenção deste controlador foi de 198 segundos.

## 5.8 COMENTÁRIOS

Pode-se observar que todas as plantas possuem pólos instáveis e são  $\alpha$ -estabilizadas pelo método proposto. O fato de ter sido encontrado, em alguns exemplos um controlador estático no lugar do controlador da ordem desejada, não constitui problema ou falha na metodologia aplicada. A ordem do controlador é determinada pela restrição de posto no conjunto não-convexo, conforme definido na Expressão (3.6). Tal restrição é atendida para os controladores de ordem  $k$  e menores, permitindo assim que controladores estáticos façam parte de seu conjunto solução. Uma explicação do porquê do aparecimento dos controladores estáticos é fornecida logo a seguir.

Nos Exemplos 5.2 e 5.3 tem-se 3 plantas de terceira ordem que são  $\alpha$ -estabilizadas pela metodologia proposta. É importante salientar que, conforme demonstrado na Seção 2.3.3, mesmo para matrizes de ordem relativamente baixa o problema é de difícil solução. Sendo assim, justifica-se a utilização deste exemplo para mostrar a eficácia do método apresentado, apesar das matrizes de ordem 3 utilizadas.

No Exemplo 5.4, pode-se notar o aparecimento de uma linha nula na matriz  $Bc$  e uma coluna nula na matriz  $Cc$  do controlador. Tal fato pode ser explicado observando-se a forma como é calculada a matriz  $P$ , descrita na Seção 4.2.4. Observando-se as expressões (4.18), (4.21) e (4.23) é importante notar que, devido às restrições de posto do



controlador, algumas entradas da diagonal principal de  $D$  serão iguais a zero ou terão valores muito próximos dele. Porém, as entradas restantes são autovalores do sistema e, como tal, podem assumir quaisquer valores reais. Mais ainda, como as projeções no conjunto convexo utilizam minimização de traço de matriz, há uma tendência natural de que os autovalores em questão sejam de pequeno valor. Em conseqüência, em muitos casos alguns desses autovalores podem ser iguais a zero naturalmente (sem que tenham sido levados a este valor pela projeção no conjunto não-convexo). E sendo assim, pelas expressões (4.20), (4.22) e (4.24) pode ser notado que haverá o aparecimento de linhas e colunas nulas na matriz  $E$ , que será utilizada para cálculo de  $P$ . Essas linhas e colunas nulas poderão então, mesmo com todos os cálculos e algebrismos posteriores, refletir no controlador encontrado. A mesma explicação justifica o comportamento de alguns exemplos posteriores, algumas vezes com duas ou três linhas nulas nas matrizes do controlador e também o porquê do aparecimento de controladores estáticos em todos os casos. Note-se que extrapolando a situação, se todos os autovalores forem zero ou muito próximos disso, tem-se exatamente o aparecimento de um controlador estático.

É importante ressaltar que com o aumento da ordem das plantas que ocorre nos dois exemplos seguintes (5.5 e 5.6), a complexidade do problema aumenta consideravelmente, principalmente por se tratarem de sistemas gerados de forma aleatória. Conseqüentemente, há um aumento considerável no tempo computacional para solução do problema. Este tempo porém, é ainda bastante satisfatório, se comparado a outros métodos de solução de BMIs envolvendo o mesmo número de matrizes desta ordem.

O Exemplo 5.7 é muito importante para a validação do método proposto, por se tratar de um modelo real, mesmo que aproximado e contendo algumas simplificações. A dificuldade do problema pode ser avaliada pela quantidade de plantas a serem estabilizadas (7 plantas) e pela ordem das mesmas (ordem 8). E apesar da grande complexidade, o método se mostrou eficaz ao encontrar a solução pretendida, para controladores de diversas ordens.

Um outro fato que deve ser ressaltado para um entendimento completo da metodologia é que, em muitos casos, os autovalores do sistema em MF não estão muito próximos do valor de  $\alpha$ -estabilidade inicialmente arbitrado ( $\alpha = 0, 1$ ). Isto não significa que este valor não influêncie o resultado obtido. Ao observar o algoritmo conceitual para  $\alpha$ -estabilização simultânea, pode-se notar que existe uma constante,  $\alpha_{ini}$ , a ser definida logo no início do programa principal. Esta constante deve ser escolhida com base no valor de  $\alpha$  desejado para estabilidade, devendo ser maior que o mesmo. Assim, a metodologia é implemen-

tada inicialmente para este valor e, apenas ao final do processo, para iniciar o método das LMIs alternadas, é que o valor  $\alpha$ -estabilidade desejado é utilizado. Foi observado que este procedimento leva a melhores resultados do que usar apenas o valor de  $\alpha$  desejado, pois cria uma margem de segurança nas fases iniciais do algoritmo, obrigando o mesmo a trabalhar no interior do conjunto solução desejado, mais longe do seu valor limite ( $\alpha = 0, 1$ , no caso).

## 6 CONCLUSÃO

Este trabalho abordou o problema da  $\alpha$ -estabilização simultânea por controlador de ordem pré-fixada, por realimentação de saída, apresentando uma solução numérica com base no método das projeções alternadas. Este problema pode ser formulado de maneira equivalente como um problema de viabilidade de uma BMI, que é conhecido na literatura especializada pelo seu alto grau de complexidade e dificuldade, sendo considerado um problema aberto na teoria de sistemas de controle (BLONDEL & TSITSIKLIS, 1997). De fato, (BLONDEL & TSITSIKLIS, 1997) prova que o problema é “NP-hard” e não pode ser resolvido diretamente por algoritmos em tempo polinomial.

Muitos estudos já foram realizados sobre o assunto sob diferentes perspectivas teóricas e numéricas. Nos anos recentes, tentativas de formular o problema BMI em termos de LMIs têm sido realizadas, tendo em vista ser este último um problema de otimização convexo. Em consequência, este trabalho inicialmente foi concentrado na pesquisa da teoria de BMIs e LMIs, na tentativa de chegar a uma formulação para o problema BMI inicial em termos de LMIs.

O Capítulo 2 teve como objetivo principal mostrar que é possível formular um problema LMI equivalente ao BMI a ser inicialmente resolvido, apresentando as ferramentas teóricas necessárias para estabelecer a equivalência e mostrando de que forma o problema LMI resultante pode ser resolvido de maneira relativamente simples, devido à sua convexidade.

Porém, a dificuldade do problema de estabilização proposto originalmente não reside apenas na sua equivalência BMI, mas também no fato de que o controlador a ser encontrado é de ordem pré-fixada e menor que a da planta que compõe os sistemas a serem  $\alpha$ -estabilizados. Esta característica o torna ainda mais complexo, porque a ordem fixa do controlador destrói a convexidade do problema LMI equivalente. Para contornar esta dificuldade, foi utilizado o método das projeções alternadas, que através de uma seqüência de projeções que se alternam entre conjuntos de interesse, consegue obter um ponto na interseção dos mesmos. Este método tem sua convergência matematicamente garantida apenas para conjuntos convexos e que atendam às suas condições iniciais de utilização, mas também pode ser aplicado a problemas envolvendo conjuntos não-convexos, como o problema apresentado pela restrição de posto do controlador. Tal característica é ex-

tremamente útil, já que o ponto na interseção dos conjuntos, sendo um deles convexo e o outro não, pode usufruir de todas as possibilidades peculiares ao primeiro tipo, possibilitando desta forma, uma solução para a questão da não-convexidade então existente, além de atender a restrição de posto imposta pelo segundo tipo.

O Capítulo 3 foi dedicado a mostrar no que consiste o método das projeções alternadas, como ele pode ser aplicado a problemas formulados como LMIs (naturalmente convexos) e quais as peculiaridades de sua utilização com conjuntos não-convexos, assim como de que forma é possível tratar os mesmos matematicamente.

A etapa seguinte do trabalho foi entender a metodologia apresentada em (GRIGORIARDS & BERAN, 2000), proposta originalmente para sistemas monoplanta, para posteriormente adaptá-la para solução do problema de estabilização simultânea de várias plantas com um único controlador, objetivo maior desta pesquisa.

No Capítulo 4 foi apresentada a metodologia proposta em (GRIGORIARDS & BERAN, 2000), e também um algoritmo conceitual baseado na mesma. Implementado este algoritmo para uma única planta, os testes mostraram que a grande dificuldade de sua aplicação a problemas práticos reside na convergência do método das projeções alternadas quando aplicado a conjuntos convexos e não-convexos. Esta convergência não é garantida, sendo essencial uma heurística adequada na implementação do método, de forma que se iniciem as projeções a partir de um ponto inicial favorável. Porém, mesmo partindo de um ponto favorável, a convergência é difícil e muitas vezes lenta na prática, pois os testes também mostraram que para a implementação do algoritmo proposto é necessário que a restrição de posto seja atendida para valores elevados de precisão, requisito fundamental para que o problema monoplanta seja resolvido.

Ultrapassada a etapa do sistema monoplanta, o caminho natural a ser tomado era verificar de que maneira a metodologia aplicada a uma única planta poderia ser modificada para solucionar o problema de  $\alpha$ -estabilização simultânea proposto. A necessidade de modificação já era esperada, tendo em vista a dificuldade de convergência mencionada anteriormente. Com várias plantas em questão, a convergência deveria se dar não mais entre apenas dois conjuntos, mas entre vários, de acordo com o número de plantas a ser  $\alpha$ -estabilizado. Como o controlador deveria ser único, dependendo da abordagem utilizada, talvez fosse necessário buscar um único ponto na interseção dos diversos conjuntos envolvidos, dois para cada planta (um convexo e outro não-convexo), o que evidencia a complexidade do problema.

Com base nos estudos realizados nas fases iniciais do trabalho, verificando a equi-

valência entre o problema de estabilização simultânea proposto e um problema de viabilidade de uma BMI e também pelo estudo dos métodos clássicos de soluções destas desigualdades matriciais, verificou-se a possibilidade de utilizar um deles, o método de solução de BMIs por meio de LMIs alternadas, em conjunto com a metodologia apresentada em (GRIGORIARDS & BERAN, 2000) para sistemas monoplanta, para atingir o objetivo de  $\alpha$ -estabilização proposto para sistemas multiplanta. Assim, ainda no Capítulo 4 foi sugerido um novo algoritmo baseado numa metodologia que utiliza o valor de  $G$  que é encontrado ao final do algoritmo para sistemas monoplanta, como ponto de partida para o método de solução de BMIs supra-citado. Na nova metodologia apresentada para sistemas multiplanta, foi adotada uma abordagem de tratar cada planta separadamente, até o momento do cálculo de  $G$ , que contém as variáveis do controlador. Isso foi feito para não aumentar o grau de dificuldade para convergência no método das projeções alternadas, mantendo as sequências de projeções em questão restritas ainda a dois conjuntos (para cada planta) naquela fase do problema. Apenas após ser atingida a convergência entre os conjuntos convexo e não-convexo em cada uma das plantas, quando a não-convexidade já não está mais presente ao problema, todas as plantas passam a ser tratadas conjuntamente, a partir da alternância das LMIs em  $G$  e  $P$ , separadamente, na desigualdade (4.7). Mesmo assim, tal tratamento conjunto só ocorre para o cálculo de uma das variáveis da BMI inicial ( $G$ ). Para o cálculo da outra variável ( $P$ ), novamente as plantas são tratadas separadamente, durante toda a alternância de projeções.

O Capítulo 5 apresentou os resultados decorrentes da aplicação do método aqui proposto para  $\alpha$ -estabilização a problemas acadêmicos e também a modelos baseados em sistemas reais.

Com base nos resultados apresentados, principalmente observando-se os resultados do Capítulo 5, pode-se concluir que os objetivos propostos foram alcançados. Através da nova metodologia proposta foi possível resolver diversos problemas, muitos com um grau de complexidade relativamente alto, como sistemas MIMO compostos por várias plantas e gerados de maneira aleatória. A aleatoriedade das plantas é um fator complicador, tendo em vista que as mesmas normalmente terão pouca ou nenhuma correlação.

A solução do exemplo do helicóptero, apesar de se tratar de um modelo simplificado, é um indicativo importante da eficiência do método, tendo em vista que o mesmo envolve várias plantas de ordem 8, além de ser um modelo baseado em um sistema real.

## 6.1 CONTRIBUIÇÕES

A apresentação de uma metodologia para solução de problemas de  $\alpha$ -estabilização simultânea, que são não-convexos e que possuem grande motivação prática na área de controle, principalmente em sistemas militares, é a grande contribuição a ser considerada. Principalmente pelo fato de tratar de problemas envolvendo sistemas MIMO com relativa simplicidade e em tempo reduzido, pode ser considerado que o algoritmo apresenta um bom desempenho no que se refere ao tempo de processamento gasto na solução dos diversos problemas apresentados, conforme evidenciado no Capítulo 5.

Este trabalho tem ainda como contribuição a apresentação de uma metodologia que pode ser utilizada para fornecer um ponto de partida favorável para a solução de BMIs por LMIs alternadas. Conforme exposto na Seção 2.3, a teoria de BMIs é complexa e ainda pouco explorada e a metodologia em questão mostrou-se eficiente para resolver as BMIs apresentadas pelos casos práticos expostos.

## 6.2 PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS

Para continuação deste trabalho são apresentadas as seguintes sugestões:

- Implementação de melhorias no algoritmo na tentativa de solucionar problemas de ordem mais elevada, tendo em vista que os testes realizados mostraram que o mesmo não fornece bons resultados para tais problemas. Um trabalho sugerido é analisar o método proposto e sugerir modificações que possam levar à solução de problemas para sistemas de ordem mais elevada.
- Em alguns casos, notou-se que o algoritmo estava muito próximo de uma solução para o problema, devido a um valor de  $t_f$  muito próximo de zero, mas o problema ou se mantinha próximo de uma solução por muito tempo até encontrá-la, ou não conseguia chegar à mesma. Nestes casos, talvez outros métodos de otimização clássicos possam ser utilizados em conjunto com a metodologia proposta para acelerar a convergência ou resolver os problemas em que a solução não foi encontrada mas estava muito próxima.
- Ainda em relação aos problemas em que o algoritmo se aproximou de uma solução desejada mas não conseguiu atingi-la, uma linearização pode ser tentada para alcançar o resultado desejado. Assim, após a obtenção dos valores iniciais de  $G$  e de  $K$ , estes valores poderiam ser considerados fixos ( $K_0$  e  $G_0$ ) e, a partir daí, as BMIs

implementadas nas funções *Calcula G* e *Calcula Pauxiliar* poderiam ser linearizadas, utilizando-se os valores fixos  $K_0$ ,  $G_0$  e novas variáveis *deltaP* e *deltaK* para as BMIs em questão.

- A metodologia proposta se concentrou apenas na solução de problemas de  $\alpha$ -estabilidade. Como perspectiva de continuação deste trabalho, podem ser adicionados à metodologia em questão outros requisitos de desempenho dos sistemas, como novas restrições que situem os pólos de MF em regiões de estabilidade que atendam a outros parâmetros de desempenho, como amortecimento e caráter oscilatório das respostas a serem obtidas.
- Uma outra sugestão de continuação deste trabalho é de uma análise matemática completa e formal da convergência do algoritmo gerado pelo método aqui proposto.
- Apesar da facilidade de implementação dos métodos das projeções alternadas, algumas vezes a convergência desejada pode não ser atingida com a sua utilização. Sendo assim, implementações utilizando soluções alternativas são desejáveis. Uma possibilidade a ser estudada é o desenvolvimento de uma metodologia que utilize polinômios de Hermite no lugar do método das projeções alternadas.

## 7 APÊNDICE A: DESCRIÇÃO DO MODELO SIMPLIFICADO DE UM HELICÓPTERO

### 7.1 INTRODUÇÃO

As explicações a seguir apresentadas sobre os comandos e o funcionamento do helicóptero foram retiradas de (ADES, 1994) e têm por finalidade apenas ilustrar o modelo matemático a ser estudado, justificando-se deste modo as simplificações por ventura existentes.

TAB.7.1: Correspondência entre termos

Correspondência entre termos referentes ao movimento do helicóptero		
francês	inglês	português
Tangage	Pitch	Caturro ou Arfagem
Roulis	Roll	Balanço ou Rolagem
Lacet	Heading	Rumo

### 7.2 OS MOVIMENTOS DO HELICÓPTERO

A tabela abaixo mostra os movimentos de translação e rotação do helicóptero. Na figura 7.1 encontram-se ilustrados os eixos de referência ligados ao helicóptero, considerando-se positivos os movimentos no sentido referencial apresentado. O movimento longitudinal é aquele que ocorre quando o aparelho se desloca para frente, mantendo a altitude constante(eixo OX). O movimento lateral é aquele que ocorre sobre o eixo OY, isto é, o aparelho se desloca para a direita ou esquerda do piloto. O movimento normal ou vertical é o do eixo OZ.

Quanto aos movimentos de rotação pode-se dizer que o de arfagem é aquele em que a frente do helicóptero inclina-se para cima ou para baixo, sendo positivo quando gira-se o eixo OZ para OX de acordo com a figura 7.1. O movimento de rolagem é o visto por um observador externo de frente para o aparelho, quando este gira no sentido horário ou anti-horário, sendo positivo no sentido de OY para OZ. Finalmente a mudança de rumo ocorre quando o helicóptero gira no plano horizontal, sendo positivo no sentido de OX para OY.



TAB.7.2: Os Movimentos do helicóptero

Movimentos do helicóptero	
de translação	de rotação
Longitudinal	arfagem
Normal(vertical)	Rolagem
Lateral	Rumo

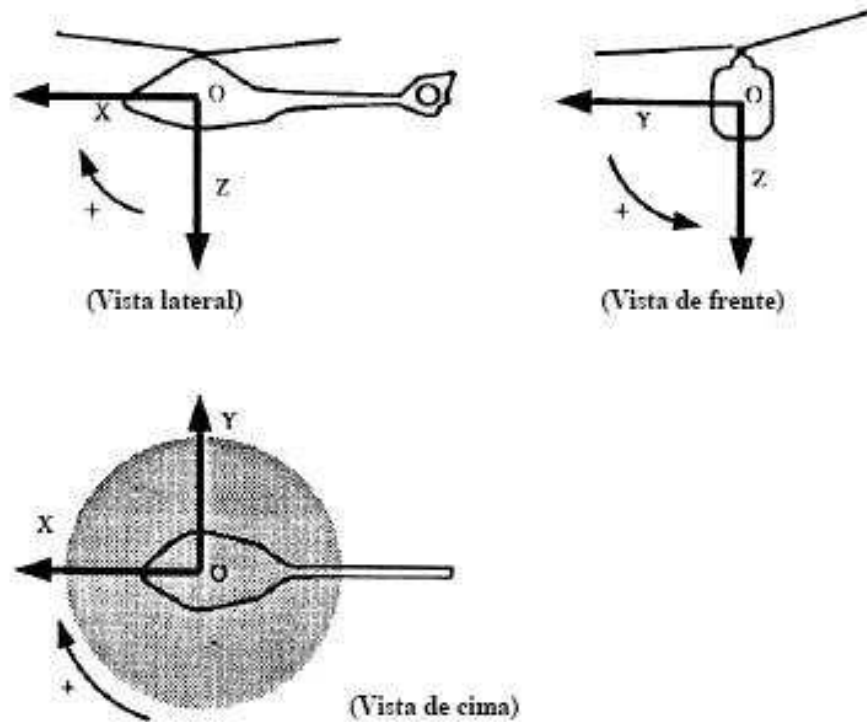


FIG.7.1: Referência utilizada pelo helicóptero

### 7.3 O VÔO DO HELICÓPTERO

A fim de simplificar a análise do vôo do helicóptero, considera-se que o eixo do rotor principal passa pelo centro de gravidade ( $G$ ) do aparelho. Em vôo, o helicóptero está sujeito a três forças principais, isto é:

- Seu peso  $\vec{P}$ , aplicado sobre o ponto  $G$ .
- A força  $\vec{F}_N$ , gerada pelo rotor principal.

- $\vec{F}_X$  provocada no vôo de translação pela resistência do ar sobre a estrutura do aparelho. Supõe-se por motivos de simplificação que esta força também estará aplicada sobre o centro de gravidade G.

A Figura 7.1 ilustra as forças aplicadas sobre o helicóptero em vôo. Para que o helicóptero esteja em equilíbrio, torna-se necessário que a resultante  $\vec{R}$  entre  $\vec{P}$  e  $\vec{F}_X$  seja igual e oposta a  $\vec{F}_N$ . Sendo nula a resultante total de forças, o vôo do helicóptero estabiliza-se. Neste caso, o aparelho estará imóvel ou em translação (movimento retilíneo uniforme). Alterações em direção ou em intensidade de  $\vec{F}_N$  resultará na quebra do equilíbrio supra-citado, alterando o movimento por ventura existente. A intensidade de  $\vec{F}_N$  varia em função da potência do rotor principal.

Para pilotar o helicóptero, o piloto dispõe do manche de pás coletivas e do manche de pás cíclicas e ainda dos pedais de “rumo”, cujo fundamento será descrito adiante.

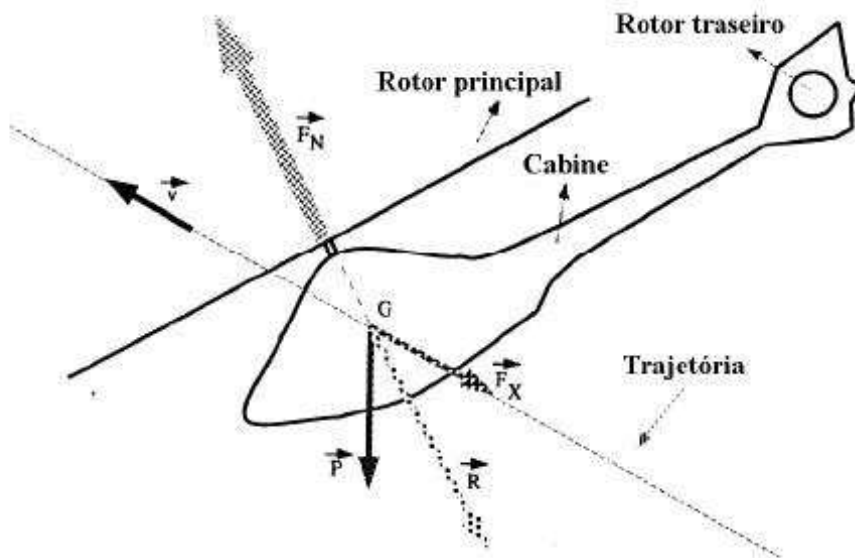


FIG.7.2: Forças aplicadas sobre o helicóptero em vôo

Em vôo estacionário, caso o vento seja nulo, as únicas forças aplicadas ao aparelho seriam o peso e a força de sustentação gerada pelo rotor principal  $\vec{F}_N$ . Como o helicóptero encontra-se em vôo estacionário, a resultante destas forças será nula. A Figura 7.3 ilustra o helicóptero em vôo estacionário.

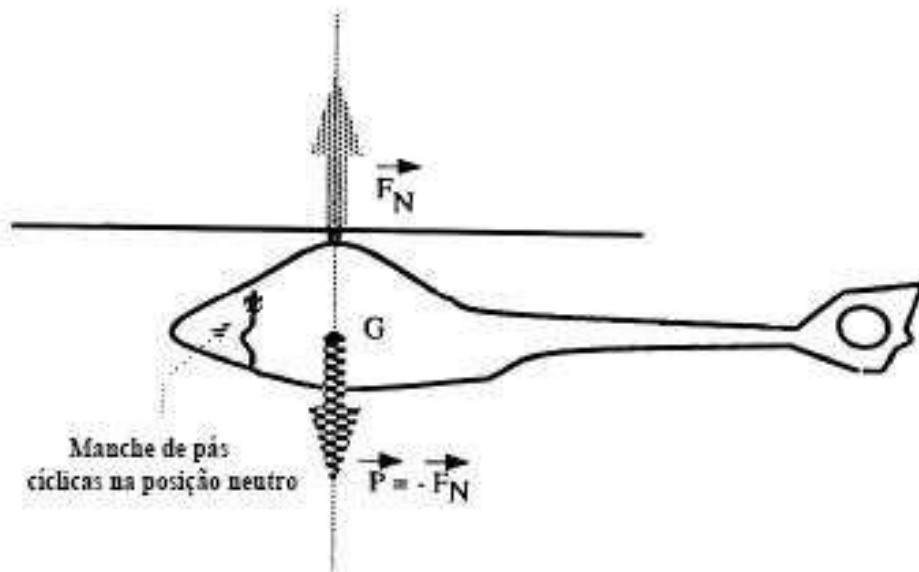


FIG.7.3: O vôo estacionário

#### 7.4 O VÔO VERTICAL (ASCENDENTE OU DESCENDENTE)

O vôo vertical é obtido, a partir do vôo estacionário, com o acionamento do manche de pás coletivas. De maneira simplificada pode-se dizer que um aumento do passo das pás estará associado a um aumento da potência do rotor no sentido de manter constante a velocidade de rotação do mesmo. Assim, um deslocamento do manche de pás coletivas tendente a aproximá-lo do piloto provoca um aumento gradual do passo das pás do rotor principal e também um aumento da potência do mesmo rotor. Deste modo, a força de sustentação gerada pelo rotor  $\vec{F}_N$  torna-se superior a  $\vec{P}$ , impondo conseqüentemente uma velocidade normal (vertical)  $\vec{V}_Z$  ascendente ao helicóptero. O contrário ocorrerá, caso o manche de pás coletivas seja empurrado pelo piloto no sentido de afastá-lo, isto é, o passo das pás do rotor principal diminuirá, provocando uma diminuição em intensidade de  $\vec{F}_N$ , rompendo o equilíbrio e gerando uma resultante na mesma direção e sentido do peso. Assim o aparelho adquirirá uma velocidade normal descendente. A Figura 7.4 mostra o vôo ascendente e descendente do helicóptero.

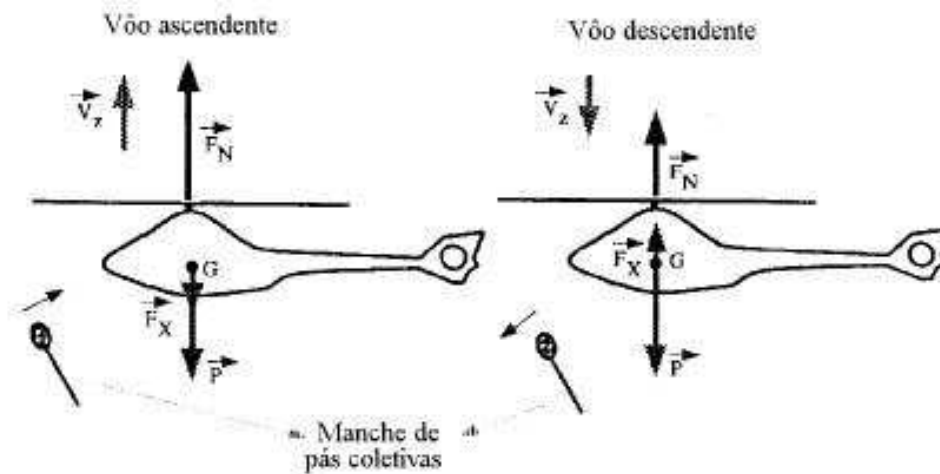


FIG.7.4: O vôo ascendente e descendente

## 7.5 O VÔO DE TRANSLAÇÃO (LONGITUDINAL E LATERAL)

O vôo de translação é obtido, a partir do vôo estacionário, com o acionamento do manche de pás cíclicas. O deslocamento deste manche provoca uma inclinação proporcional e na mesma direção do eixo do rotor principal. A força  $\vec{F}_N$  se decompõe então em duas, ou seja,  $\vec{F}_h$  que assegura um movimento longitudinal ou lateral e  $\vec{F}_s$  que mantém a sustentação do aparelho. A Figura 7.5 apresenta o vôo de translação longitudinal e lateral.

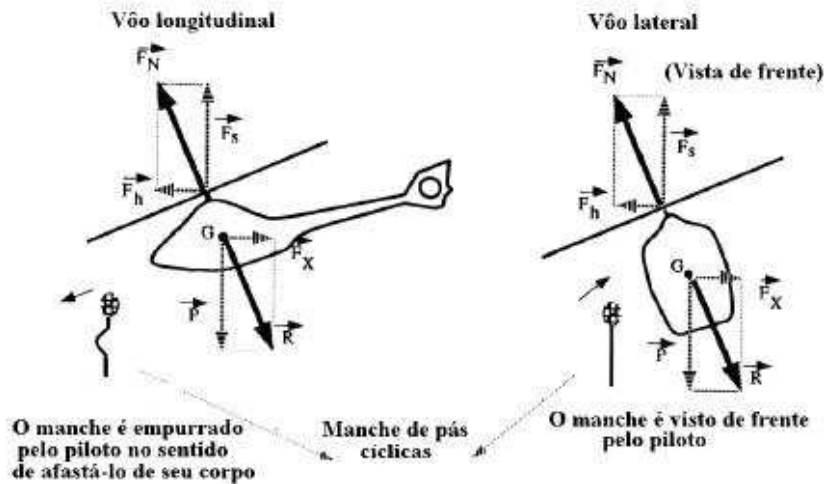


FIG.7.5: O vôo de translação longitudinal e lateral

## 7.6 A FINALIDADE DO ROTOR TRASEIRO

Com o helicóptero em vôo estacionário, pode-se dizer que o rotor principal está gerando um torque sobre seu eixo fazendo girá-lo. Este torque, representado por um conjugado, provocaria pela terceira lei de Newton uma reação igual em módulo, mas em sentido oposto sobre a cabine do helicóptero. Deste modo, enquanto as pás girariam num determinado sentido, a cabine teria o mesmo movimento em sentido oposto. Assim, surge a necessidade do rotor traseiro gerar uma força, provocando um torque contrário sobre a cabine de modo a estabilizá-la.

Em termos de torques a cabine estaria estabilizada, mas agora o rotor traseiro estaria gerando uma força no plano horizontal, o que certamente provocaria uma deriva lateral do aparelho. A fim de sanar tal problema, inclina-se levemente o rotor principal para o lado, gerando uma força em sentido contrário àquela do rotor traseiro, de maneira que a resultante no plano horizontal seja nula. A Figura 7.6 ilustra as explicações citadas acima.

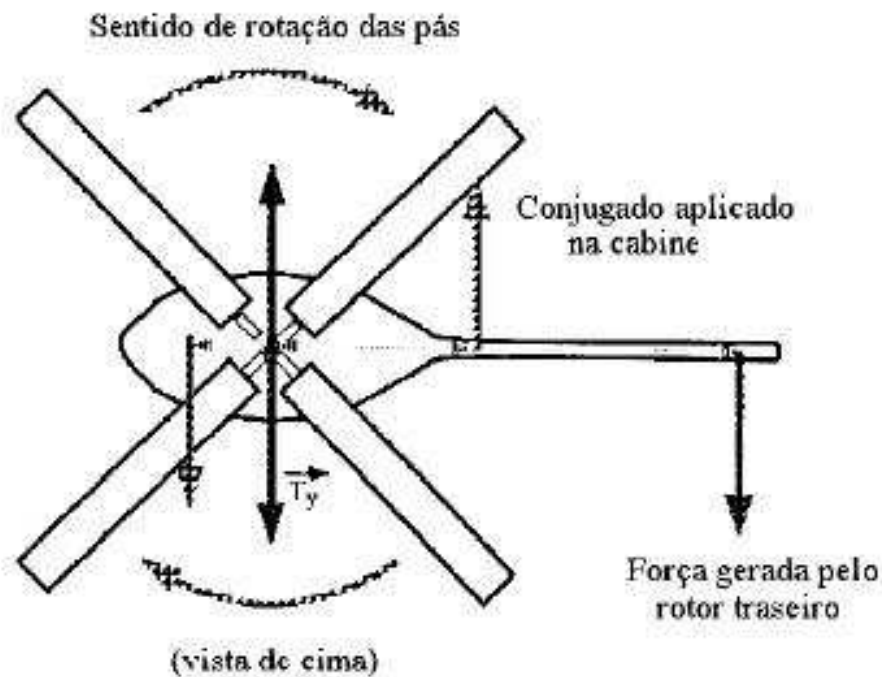


FIG.7.6: O rotor traseiro

## 7.7 O MOVIMENTO DE RUMO

A partir do voo estacionário, o “rumo” é obtido com o acionamento de um dos dois pedais. Este comando cria uma variação de potência do rotor traseiro, e por consequência um movimento de rotação no plano horizontal da cabine em torno de seu centro de gravidade.

## 7.8 EXEMPLOS DE MOVIMENTOS ACLOPADOS

Neste item, descreve-se algumas das características do comportamento do helicóptero, permitindo avaliar a dificuldade de pilotar o aparelho e obter movimentos precisos. Alguns exemplos de movimentos aclopados são:

- Acoplamento entre o movimento de “rumo” e o movimento lateral: Quando um comando de “rumo” é aplicado, o equilíbrio das forças provocadas pelo rotor traseiro

e pela inclinação do rotor principal é rompido. Assim, o aparelho adquire uma velocidade lateral.

- Acoplamento entre o movimento normal e o movimento “rolagem/arfagem”: Para adquirir um movimento de transição longitudinal ou lateral, um comando de pás cíclicas deverá ser aplicado, inclinando o rotor para frente (“arfagem”) ou para o lado (“rolagem”). Esta inclinação provoca uma diminuição da componente de sustentação gerando uma velocidade normal.
- Acoplamento entre o movimento normal e o movimento de “rumo”: Para aumentar a velocidade normal, aumenta-se o passo das pás coletivas, isto é, a incidência das pás do rotor principal e conseqüentemente a potência do rotor. Este aumento do torque do rotor principal provocará o rompimento do equilíbrio dos torques com o rotor traseiro, conseqüentemente gerando um movimento de “rumo”.

Após os exemplos citados, torna-se clara a existência no helicóptero de fortes acoplamentos de movimentos.

## 7.9 O MODELO MATEMÁTICO DISPONÍVEL

A partir de determinados ensaios e cálculos teóricos foi possível obter um modelo não-linear para o helicóptero, restrito a determinadas condições de vôo. Este modelo foi então linearizado para as velocidades longitudinais de 0 até 300 Km/h, de 50 em 50 Km/h. Na linearização destes sete modelos foi considerado que o helicóptero encontrava-se estabilizado em determinada altitude, sujeitando-se a pequenos movimentos em torno destas velocidades longitudinais. Os modelos são multivariáveis com 8 estados, 3 entradas e 8 saídas, conforme será descrito a seguir. A figura mostra uma representação dos modelos linearizados disponíveis, fornecidos pelo CERT (Centre d’Etudes et Recherches de Toulouse - França).

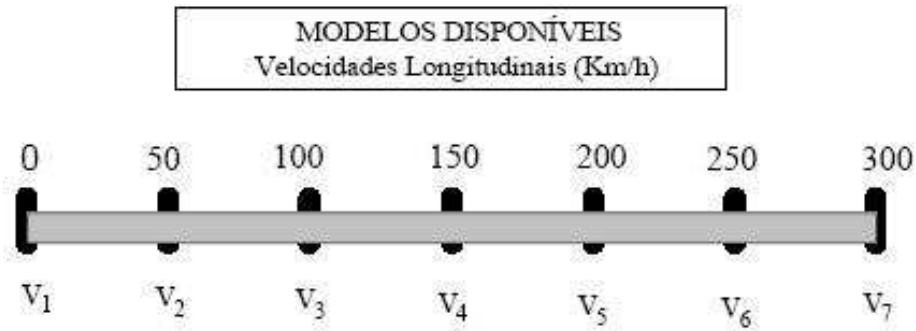


FIG.7.7: Representação dos modelos disponíveis linearizados nas velocidades apresentadas

Os modelos supra-citados encontram-se sob a forma de equações de estado da maneira seguinte:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (7.1)$$

onde A e B dependem da velocidade longitudinal. Os estados do modelo e as entradas  $u(t)$  são descritos nas tabelas a seguir:

TAB.7.3: Dados referentes aos estados do modelo

Estado	Símbolo	Descrição	Unidade
$x_1$	u	Velocidade Longitudinal	m/s
$x_2$	$V_Z$	Velocidade Vertical	m/s
$x_3$	q	Velocidade de Arfagem	graus/s
$x_4$	$\theta$	Ângulo de Arfagem	graus
$x_5$	v	Velocidade Lateral	m/s
$x_6$	p	Velocidade de Rolagem	graus/s
$x_7$	r	Rumo	graus/s
$x_8$	$\phi$	Ângulo de Rolagem	graus



TAB.7.4: Dados referentes às entradas do modelo

Estado	Símbolo	Descrição	Unidade
$u_1$	$\theta_2$	Pás Cíclica Longitudinal	graus
$u_2$	$\theta_1$	Pás Cíclica Lateral	graus
$u_3$	$\theta_r$	Pás rotor traseiro	graus

## 8 APÊNDICE B: VALORES DAS MATRIZES REFERENTES À REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS DAS PLANTAS A SEREM ESTABILIZADAS

### 8.1 MATRIZES PARA O SISTEMA DO CASO 1

As plantas  $(A_i, B_i, C_i)$  consideradas são:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} 0,4110 & 0,2306 & 0,9781 \\ 0,7211 & 0,1848 & 0,9356 \\ 0,7308 & 0,8728 & 0,0974 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0,9354 & 0,3231 \\ 0,1556 & 0,6045 \\ 0,7070 & 0,2358 \end{bmatrix} \\
 C_1 &= \begin{bmatrix} 0,1672 & 0,5805 & 0,4173 \\ 0,5027 & 0,4318 & 0,3101 \end{bmatrix} \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} 0,2438 & 0,1541 & 0,1491 \\ 0,9712 & 0,5186 & 0,5034 \\ 0,5141 & 0,7931 & 0,6895 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0,5819 & 0,0291 \\ 0,8581 & 0,5137 \\ 0,5169 & 0,4879 \end{bmatrix} \\
 C_2 &= \begin{bmatrix} 0,3707 & 0,0576 & 0,5271 \\ 0,5079 & 0,9425 & 0,8845 \end{bmatrix} \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} 0,9231 & 0,5070 & 0,1449 \\ 0,5832 & 0,7966 & 0,9927 \\ 0,9875 & 0,6413 & 0,7770 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0,7426 & 0,4909 \\ 0,4802 & 0,5231 \\ 0,0606 & 0,8582 \end{bmatrix} \\
 C_3 &= \begin{bmatrix} 0,7336 & 0,7107 & 0,7230 \\ 0,0866 & 0,5180 & 0,8932 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

### 8.2 MATRIZES PARA O SISTEMA DO CASO 2

As plantas  $(A_i, B_i, C_i)$  consideradas são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,7660 & 0,9058 & 0,8980 \\ 0,8977 & 0,1786 & 0,0294 \\ 0,9668 & 0,9785 & 0,2820 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0,3352 & 0,5013 & 0,8906 \\ 0,5839 & 0,4175 & 0,5134 \\ 0,9132 & 0,7995 & 0,3897 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= \begin{bmatrix} 0,2028 & 0,4002 & 0,0485 \\ 0,2751 & 0,7023 & 0,7775 \\ 0,4815 & 0,3214 & 0,5534 \end{bmatrix} \\
A_2 &= \begin{bmatrix} 0,1879 & 0,9977 & 0,1484 \\ 0,6088 & 0,0168 & 0,6214 \\ 0,2094 & 0,4396 & 0,7544 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0,9306 & 0,7276 & 0,8889 \\ 0,2827 & 0,9146 & 0,5950 \\ 0,7699 & 0,1061 & 0,0121 \end{bmatrix} \\
C_2 &= \begin{bmatrix} 0,0677 & 0,4609 & 0,6957 \\ 0,4962 & 0,7800 & 0,9851 \\ 0,8361 & 0,4917 & 0,3532 \end{bmatrix} \\
A_3 &= \begin{bmatrix} 0,2806 & 0,1817 & 0,7233 \\ 0,5272 & 0,7793 & 0,0453 \\ 0,3124 & 0,8095 & 0,6133 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0,2383 & 0,8132 & 0,6823 \\ 0,1236 & 0,7633 & 0,6248 \\ 0,8808 & 0,8104 & 0,3681 \end{bmatrix} \\
C_3 &= \begin{bmatrix} 0,6220 & 0,4891 & 0,8344 \\ 0,5159 & 0,7315 & 0,0109 \\ 0,8150 & 0,7106 & 0,0484 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

### 8.3 MATRIZES PARA O SISTEMA DO CASO 3

As plantas  $(A_i, B_i, C_i)$  consideradas são:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \begin{bmatrix} -0,7036 & 0,3654 & 0,6739 & 0,3603 \\ 0,4850 & 0,1400 & 0,9994 & 0,5485 \\ 0,1146 & 0,5668 & 0,9616 & 0,2618 \\ 0,6648 & 0,8230 & 0,0589 & 0,5973 \end{bmatrix} \\
B_1 &= \begin{bmatrix} 0,0493 & 0,7505 & 0,8030 & 0,6020 \\ 0,5710 & 0,7400 & 0,08393 & 0,2536 \\ 0,7008 & 0,4319 & 0,9455 & 0,8734 \\ 0,9623 & 0,6343 & 0,9159 & 0,5134 \end{bmatrix} \\
C_1 &= \begin{bmatrix} 0,7326 & 0,5534 & 0,6802 & 0,4344 \\ 0,4222 & 0,2920 & 0,0534 & 0,5624 \\ 0,9614 & 0,8580 & 0,3566 & 0,6166 \\ 0,0720 & 0,3357 & 0,4983 & 0,1133 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \begin{bmatrix} 0,8982 & 0,6700 & 0,5368 & 0,4091 \\ 0,7545 & 0,2009 & 0,0595 & 0,4740 \\ 0,7911 & 0,2731 & 0,0890 & 0,9090 \\ 0,8149 & 0,6262 & 0,2713 & 0,5962 \end{bmatrix} \\
B_2 &= \begin{bmatrix} 0,3289 & 0,8295 & 0,8121 & 0,4249 \\ 0,4782 & 0,9561 & 0,6101 & 0,3756 \\ 0,5972 & 0,5955 & 0,7015 & 0,1661 \\ 0,1614 & 0,0287 & 0,0922 & 0,8331 \end{bmatrix} \\
C_2 &= \begin{bmatrix} 0,8386 & 0,8699 & 0,9517 & 0,1879 \\ 0,4516 & 0,76943 & 0,6401 & 0,4906 \\ 0,95660 & 0,4442 & 0,2473 & 0,4093 \\ 0,1471 & 0,6206 & 0,3527 & 0,4635 \end{bmatrix} \\
A_3 &= \begin{bmatrix} 0,6109 & 0,17502 & 0,5060 & 0,3417 \\ 0,0712 & 0,6210 & 0,4648 & 0,4018 \\ 0,3143 & 0,2459 & 0,5414 & 0,3077 \\ 0,6084 & 0,5873 & 0,9423 & 0,4116 \end{bmatrix} \\
B_3 &= \begin{bmatrix} 0,2859 & 0,3062 & 0,0147 & 0,2618 \\ 0,3941 & 0,1122 & 0,6640 & 0,7085 \\ 0,5030 & 0,4433 & 0,7241 & 0,7838 \\ 0,7220 & 0,4668 & 0,2816 & 0,9861 \end{bmatrix} \\
C_3 &= \begin{bmatrix} 0,4733 & 0,8289 & 0,7181 & 0,0877 \\ 0,9028 & 0,1663 & 0,5692 & 0,4435 \\ 0,4510 & 0,3939 & 0,4608 & 0,3663 \\ 0,8045 & 0,5207 & 0,4453 & 0,3025 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

#### 8.4 MATRIZES PARA O SISTEMA DO CASO 4

As plantas  $(A_i, B_i, C_i)$  consideradas são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,9501 & 0,7621 & 0,6154 & 0,4057 & 0,0579 \\ 0,2311 & 0,4565 & 0,7919 & 0,9355 & 0,3529 \\ 0,6068 & 0,0185 & 0,9218 & 0,9169 & 0,8132 \\ 0,4860 & 0,8214 & 0,7382 & 0,4103 & 0,0099 \\ 0,8913 & 0,4447 & 0,1763 & 0,8936 & 0,1389 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
B_1 = \begin{bmatrix} 0,2028 & 0,0152 & 0,4186 & 0,8381 & 0,5028 \\ 0,1987 & 0,7468 & 0,8462 & 0,0196 & 0,7095 \\ 0,6038 & 0,4451 & 0,5251 & 0,6813 & 0,4289 \\ 0,2722 & 0,9318 & 0,2026 & 0,3795 & 0,3046 \\ 0,1988 & 0,4660 & 0,6721 & 0,8318 & 0,1896 \end{bmatrix} \\
C_1 = \begin{bmatrix} 0,1934 & 0,6979 & 0,4965 & 0,6602 & 0,7271 \\ 0,6822 & 0,3784 & 0,8998 & 0,3420 & 0,3093 \\ 0,3028 & 0,8600 & 0,8216 & 0,2897 & 0,8385 \\ 0,5417 & 0,8536 & 0,6449 & 0,3412 & 0,5681 \\ 0,1509 & 0,5936 & 0,8180 & 0,5341 & 0,3704 \end{bmatrix} \\
A_2 = \begin{bmatrix} 0,7027 & 0,7948 & 0,9797 & 0,1365 & 0,6614 \\ 0,5466 & 0,9568 & 0,2714 & 0,0117 & 0,2844 \\ 0,4449 & 0,5226 & 0,2523 & 0,8939 & 0,4692 \\ 0,6946 & 0,8801 & 0,8757 & 0,1991 & 0,0648 \\ 0,6213 & 0,1729 & 0,7373 & 0,2987 & 0,9883 \end{bmatrix} \\
B_2 = \begin{bmatrix} 0,5828 & 0,2259 & 0,2091 & 0,5678 & 0,4154 \\ 0,4235 & 0,5798 & 0,3798 & 0,7942 & 0,3050 \\ 0,5155 & 0,7604 & 0,7833 & 0,0592 & 0,8744 \\ 0,3339 & 0,5298 & 0,6808 & 0,6029 & 0,0150 \\ 0,4329 & 0,6405 & 0,4611 & 0,0503 & 0,7679 \end{bmatrix} \\
C_2 = \begin{bmatrix} 0,9708 & 0,2140 & 0,4119 & 0,6833 & 0,2071 \\ 0,9901 & 0,6435 & 0,7446 & 0,2125 & 0,6072 \\ 0,7889 & 0,3200 & 0,2679 & 0,8392 & 0,6299 \\ 0,4386 & 0,9601 & 0,4399 & 0,6288 & 0,3705 \\ 0,4983 & 0,7266 & 0,9334 & 0,1338 & 0,5751 \end{bmatrix} \\
A_3 = \begin{bmatrix} 0,4514 & 0,3840 & 0,6085 & 0,0576 & 0,0841 \\ 0,0439 & 0,6831 & 0,0157 & 0,3676 & 0,4543 \\ 0,0272 & 0,0928 & 0,0163 & 0,6314 & 0,4418 \\ 0,3127 & 0,0353 & 0,1901 & 0,7176 & 0,3532 \\ 0,0129 & 0,6124 & 0,5869 & 0,6927 & 0,1536 \end{bmatrix}
\end{array}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0,6756 & 0,1210 & 0,2548 & 0,2319 & 0,1909 \\ 0,6992 & 0,4507 & 0,8656 & 0,2393 & 0,8439 \\ 0,7275 & 0,7159 & 0,2323 & 0,0497 & 0,1739 \\ 0,4784 & 0,8928 & 0,8049 & 0,0784 & 0,1708 \\ 0,5548 & 0,2731 & 0,9084 & 0,6408 & 0,9943 \\ 0,4398 & 0,5915 & 0,9342 & 0,6458 & 0,1370 \\ 0,3400 & 0,1197 & 0,2644 & 0,9669 & 0,8187 \\ 0,3142 & 0,0381 & 0,1603 & 0,6649 & 0,4302 \\ 0,3651 & 0,4586 & 0,8728 & 0,8704 & 0,8903 \\ 0,3932 & 0,8699 & 0,2379 & 0,0099 & 0,7349 \end{bmatrix}$$

## 8.5 MATRIZES PARA O SISTEMA DO CASO 5

As plantas  $(A_i, B_i, C_i)$  consideradas são:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,6390 & 0,6081 & 0,1034 & 0,1500 & 0,7340 & 0,6412 \\ 0,6690 & 0,1760 & 0,1573 & 0,3844 & 0,4109 & 0,01620 \\ 0,7721 & 0,0020 & 0,4075 & 0,3110 & 0,39980 & 0,8368 \\ 0,3798 & 0,7902 & 0,4077 & 0,1685 & 0,5055 & 0,8035 \\ 0,4416 & 0,5136 & 0,0527 & 0,8966 & 0,1693 & 0,6978 \\ 0,4830 & 0,2132 & 0,9418 & 0,3227 & 0,5247 & 0,4619 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0,0826 & 0,8753 & 0,6159 & 0,5152 & 0,1302 & 0,4546 \\ 0,8207 & 0,8352 & 0,6619 & 0,6059 & 0,2543 & 0,9050 \\ 0,1930 & 0,3331 & 0,6166 & 0,9667 & 0,8030 & 0,2821 \\ 0,4453 & 0,8807 & 0,6851 & 0,8221 & 0,6678 & 0,0650 \\ 0,0129 & 0,4797 & 0,5101 & 0,3177 & 0,0136 & 0,4766 \\ 0,3087 & 0,5608 & 0,7140 & 0,5877 & 0,5616 & 0,9837 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0,9223 & 0,5418 & 0,0155 & 0,3311 & 0,8022 & 0,9425 \\ 0,5612 & 0,0068 & 0,8908 & 0,5041 & 0,4710 & 0,7701 \\ 0,6523 & 0,4513 & 0,7617 & 0,5646 & 0,2027 & 0,7374 \\ 0,7727 & 0,1957 & 0,9070 & 0,7672 & 0,5796 & 0,8663 \\ 0,1062 & 0,7871 & 0,7586 & 0,7799 & 0,6665 & 0,9909 \\ 0,0011 & 0,6186 & 0,3807 & 0,4841 & 0,6768 & 0,5039 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \begin{bmatrix} 0,6291 & 0,2188 & 0,2248 & 0,3134 & 0,3431 & 0,4856 \\ 0,7926 & 0,1055 & 0,9089 & 0,2311 & 0,5630 & 0,9522 \\ 0,4486 & 0,1414 & 0,0073 & 0,4161 & 0,1189 & 0,2319 \\ 0,5243 & 0,4570 & 0,5887 & 0,2988 & 0,1690 & 0,4786 \\ 0,1715 & 0,7881 & 0,5421 & 0,6724 & 0,2789 & 0,5265 \\ 0,1307 & 0,2811 & 0,6535 & 0,9382 & 0,5568 & 0,7927 \end{bmatrix} \\
B_2 &= \begin{bmatrix} 0,19301 & 0,8133 & 0,5945 & 0,4396 & 0,2916 & 0,2584 \\ 0,9096 & 0,9238 & 0,6155 & 0,7010 & 0,0974 & 0,0429 \\ 0,9222 & 0,1990 & 0,0034 & 0,6097 & 0,3974 & 0,0059 \\ 0,0133 & 0,6743 & 0,9820 & 0,2999 & 0,3333 & 0,5744 \\ 0,7675 & 0,9271 & 0,8995 & 0,8560 & 0,9442 & 0,7439 \\ 0,9473 & 0,3438 & 0,6927 & 0,1121 & 0,8385 & 0,8068 \end{bmatrix} \\
C_2 &= \begin{bmatrix} 0,6376 & 0,9302 & 0,2168 & 0,3066 & 0,1661 & 0,7129 \\ 0,2513 & 0,3099 & 0,6518 & 0,7207 & 0,9114 & 0,5490 \\ 0,1443 & 0,2688 & 0,0528 & 0,9544 & 0,1363 & 0,9413 \\ 0,6515 & 0,5364 & 0,2293 & 0,1311 & 0,6170 & 0,3299 \\ 0,9461 & 0,1633 & 0,6674 & 0,0683 & 0,2690 & 0,7045 \\ 0,8159 & 0,2110 & 0,3109 & 0,1252 & 0,2207 & 0,9434 \end{bmatrix} \\
A_3 &= \begin{bmatrix} 0,5816 & 0,9562 & 0,2886 & 0,0550 & 0,0074 & 0,9684 \\ 0,8801 & 0,1962 & 0,9711 & 0,5998 & 0,7888 & 0,1557 \\ 0,7496 & 0,7762 & 0,9505 & 0,3931 & 0,0178 & 0,1629 \\ 0,3796 & 0,6133 & 0,2280 & 0,2154 & 0,8779 & 0,3134 \\ 0,7256 & 0,1623 & 0,9585 & 0,1824 & 0,3525 & 0,0294 \\ 0,1628 & 0,0310 & 0,6798 & 0,0767 & 0,7221 & 0,3576 \end{bmatrix} \\
B_3 &= \begin{bmatrix} 0,0272 & 0,3100 & 0,9275 & 0,8445 & 0,4796 & 0,9171 \\ 0,7937 & 0,1348 & 0,3911 & 0,8791 & 0,4960 & 0,1233 \\ 0,9992 & 0,2233 & 0,5113 & 0,1870 & 0,2875 & 0,0134 \\ 0,1102 & 0,3965 & 0,0929 & 0,9913 & 0,0609 & 0,3697 \\ 0,6226 & 0,1351 & 0,0217 & 0,7120 & 0,2625 & 0,6986 \\ 0,1326 & 0,2410 & 0,1595 & 0,8714 & 0,1863 & 0,8893 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0,5938 & 0,6499 & 0,2376 & 0,5459 & 0,9705 & 0,3580 \\ 0,1567 & 0,0850 & 0,1957 & 0,8480 & 0,4869 & 0,9382 \\ 0,3167 & 0,7688 & 0,2632 & 0,8021 & 0,8175 & 0,4877 \\ 0,2334 & 0,9697 & 0,7138 & 0,6683 & 0,6416 & 0,0910 \\ 0,0084 & 0,7148 & 0,9776 & 0,6710 & 0,3063 & 0,6738 \\ 0,3969 & 0,7820 & 0,6371 & 0,8206 & 0,6609 & 0,5149 \end{bmatrix}$$

## 8.6 CASO 6: MATRIZES PARA O MODELO SIMPLIFICADO DO HELICÓPTERO

A representação do modelo no espaço de estados em relação a cada ponto de operação, obtida de (SAMBLANCAT, 1991) é:

- Ponto de operação 1:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0,0257 & 0,0097 & 0,3280 & -9,800 & -0,0068 & 0,1920 & 0,0324 & 0 \\ 0,0032 & -0,2750 & -0,0061 & -0,3610 & -0,0008 & 0,0314 & -0,5850 & -0,5740 \\ 0,0358 & -0,0038 & -0,9570 & 0 & -0,0320 & -0,2640 & -0,0062 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9980 & 0 & 0 & 0 & -0,0582 & 0 \\ 0,0084 & 0,0040 & 0,1850 & -0,0210 & -0,0379 & -0,3270 & 0,1020 & 9,7800 \\ -0,1690 & 0,0023 & 1,4400 & 0 & -0,2330 & -5,400 & 0,0337 & 0 \\ -0,0225 & -0,0063 & 0,2040 & 0 & -0,0039 & -0,6310 & -0,2650 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0021 & 0 & 0 & 1 & 0,0364 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 10,600 & -0,7180 & 0,3150 \\ 0,526 & -0,0362 & -0,3660 \\ -14,9000 & 2,3100 & -0,8160 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,7190 & 10,6000 & -4,2500 \\ -13,1000 & 84,4000 & -3,7100 \\ -1,6100 & 10,2000 & 6,8100 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ponto de operação 2:

$$A_2 = \begin{bmatrix} -0,0330 & 0,0141 & -0,4340 & -9,7900 & -0,0004 & 0,2110 & 0,0612 & 0 \\ -0,2290 & -0,4510 & 14,0000 & -0,4920 & 0,0134 & 0,1440 & -0,4690 & -0,1750 \\ 0,00678 & 0,0180 & -1,3000 & 0 & -0,0267 & -0,2670 & 0,0234 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0,0174 & 0 \\ -0,0103 & -0,0010 & 0,2320 & -0,0086 & -0,0815 & 0,2330 & -13,6000 & 9,7900 \\ -0,0553 & -0,1700 & 1,2500 & 0 & -0,2040 & -5,5500 & 0,0498 & 0 \\ 0,0116 & -0,0261 & 0,1330 & 0 & 0,0049 & -0,6250 & -0,4420 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0009 & 0 & 0 & 1 & 0,0497 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 10,0000 & -1,0500 & 0,1980 \\ 6,3300 & 0,2230 & -0,5130 \\ -15,6000 & 2,4700 & -0,9330 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,9950 & -10,5000 & -3,9500 \\ -12,9000 & -84,2000 & -3,2400 \\ -1,4300 & -10,1000 & 6,2900 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ponto de operação 3:

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0,0218 & -0,0147 & 0,6180 & -9,8100 & 0,0006 & 0,2340 & 0,0130 & 0 \\ -0,1270 & -0,7350 & 27,9000 & 0,0410 & 0,0110 & 0,3390 & -0,4440 & -0,1310 \\ 0,0052 & -0,0503 & -1,3000 & 0 & -0,0233 & -0,2650 & 0,0748 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0,0127 & 0 \\ -0,0041 & -0,0036 & 0,2310 & 0,0005 & -0,1310 & -0,7000 & -27,4000 & 9,8100 \\ 0,0289 & -0,1740 & 1,0700 & 0 & -0,1650 & -5,5900 & 0,1440 & 0 \\ 0,0153 & -0,0230 & 0,0757 & 0 & 0,0298 & -0,5860 & -0,7070 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0001 & 0 & 0 & 1 & -0,00471 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 10,2000 & -1,3500 & 0,2410 \\ 18,5000 & -0,1980 & -0,5440 \\ -16,4000 & 2,5700 & -0,9140 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1,1400 & -10,1000 & -4,4600 \\ -10,7000 & -83,4000 & -3,4800 \\ -1,1300 & -9,8900 & -9,8900 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ponto de operação 4:

$$A_4 = \begin{bmatrix} -0,0347 & 0,0011 & 1,2500 & -9,8100 & 0,0016 & 0,2340 & -0,0046 & 0 \\ -0,0411 & -0,8580 & 41,6000 & 0,1650 & 0,0132 & 0,5760 & -0,5120 & -0,1570 \\ 0,0300 & -0,0031 & -1,6300 & 0 & -0,0130 & -0,2370 & 0,0078 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0,0155 & 0 \\ -0,0031 & -0,0026 & 0,2250 & 0,0026 & -0,1770 & -1,3100 & -41,2000 & 9,8000 \\ 0,0330 & -0,1510 & 0,9990 & 0 & -0,1570 & -5,4800 & 0,0931 & 0 \\ 0,0137 & -0,0250 & 0,0367 & 0 & 0,0412 & -0,5390 & -0,9370 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0003 & 0 & 0 & 1 & -0,0173 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} 10,1000 & -1,4200 & 0,3490 \\ 33,0000 & -0,4740 & -0,5870 \\ -15,8000 & 2,5900 & -0,9530 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1,0500 & -10,1000 & -5,1200 \\ -8,6100 & -83,2000 & -3,8300 \\ -0,5700 & -9,7500 & 8,0800 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ponto de operação 5:

$$A_5 = \begin{bmatrix} -0,0434 & 0,0116 & 2,6200 & -9,8000 & 0,0012 & 0,2100 & -0,0305 & 0 \\ 0,0049 & -0,9760 & 55,2000 & 0,3720 & 0,0127 & 0,8290 & -0,5990 & -0,2210 \\ 0,0479 & 0,0136 & -2,0300 & 0 & -0,0115 & -0,2360 & -0,0177 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0,0220 & 0 \\ -0,0047 & 0,0008 & 0,2110 & 0,0082 & -0,2250 & -2,6600 & -54,9000 & 9,8000 \\ 0,0307 & -0,1340 & 0,9220 & 0 & -0,1650 & -5,2400 & 0,0382 & 0 \\ 0,0157 & -0,0385 & 0,0128 & 0 & 0,0504 & -0,4650 & -1,1900 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0008 & 0 & 0 & 1 & -0,0385 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_5 = \begin{bmatrix} 9,4700 & -1,3000 & 0,3980 \\ 47,7000 & -0,6790 & -0,6600 \\ -16,4000 & 2,5700 & -1,0400 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,9000 & -10,2000 & -5,5200 \\ -6,4500 & -83,1000 & -4,0000 \\ 0,7650 & -9,6900 & 8,7400 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ponto de operação 6:

$$A_6 = \begin{bmatrix} -0,0545 & 0,0276 & 4,8200 & -9,7900 & -0,0003 & 0,1640 & -0,0936 & 0 \\ 0,0451 & -1,0700 & 68,7000 & 0,6250 & 0,0154 & 1,1700 & -0,6960 & -0,3020 \\ 0,0689 & -0,0284 & -2,5100 & 0 & -0,0117 & -0,2320 & -0,0447 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0,0303 & 0 \\ -0,0072 & 0,00561 & 0,1940 & 0,0190 & -0,2790 & 4,8800 & -68,6000 & 9,7800 \\ 0,0291 & -0,1250 & 0,8360 & 0 & -0,1870 & -4,9000 & -0,0340 & 0 \\ 0,0211 & -0,0654 & 0,0279 & 0 & 0,0601 & -0,3540 & -1,4700 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0019 & 0 & 0 & 1 & -0,0643 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_6 = \begin{bmatrix} 8,0900 & -1,0200 & 0,3270 \\ 62,9000 & -0,8050 & -0,7840 \\ -17,0000 & 2,5000 & -1,2000 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,7830 & -10,50 & 5,7800 \\ -4,0100 & -83,5000 & 4,0900 \\ 3,5100 & -9,7700 & 9,1600 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Ponto de operação 7:

$$A_7 = \begin{bmatrix} -0,0670 & 0,0349 & 9,1100 & -9,7500 & -0,0034 & 0,1250 & -0,2630 & 0 \\ 0,0657 & -1,1600 & 82,0000 & 1,0500 & 0,0188 & 1,6300 & -0,8810 & -0,3830 \\ 0,0867 & -0,0427 & -3,0200 & 0 & -0,0130 & -0,2360 & -0,0612 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9990 & 0 & 0 & 0 & -0,0388 & 0 \\ -0,0104 & 0,0130 & 0,1710 & 0,0409 & -0,3470 & -9,2800 & -81,9000 & 9,7400 \\ 0,0252 & -0,1160 & 0,7590 & 0 & -0,2230 & -4,5100 & -0,0759 & 0 \\ 0,0289 & -0,1100 & 0,0935 & 0 & 0,0766 & -0,2030 & -1,8700 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0042 & 0 & 0 & 1 & -0,1080 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_7 = \begin{bmatrix} 7,0900 & -0,6140 & 0,0197 \\ 78,4000 & -0,8170 & -1,0100 \\ -18,0000 & 2,3900 & -1,5500 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0,9820 & -11,3000 & -5,9500 \\ -1,7100 & -84,9000 & -4,1700 \\ 8,4500 & -10,1000 & 9,4400 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 9 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADES, R. **Síntese de Controle Robusto Paramétrico - Otimização de um Critério Combinando Estabilidade e Desempenho**. Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, 1994.
- APKARIAN, P. e P.GAHINET. A Convex Characterization of Gain Scheduled  $H_\infty$  Controllers. **IEEE Trans. Automat. Control**, págs. 40:853–864, 1995.
- BERAN, E. **Induced Norm Control Toolbox(INCT)-Users Manual**. [online]. 1995. Disponível: <http://www.iau.dtu.dk/Staff/ebb/INCT>.
- BLONDEL, V. e TSITSIKLIS, J. N. NP-hardness of Some Linear Control Design Problems. **SIAM J. Control Optim.**, 35(6):2118–2127, November 1997.
- BOYD, S. e DATORRO, J. Alternating Projections. **Stanford University**, 2003.
- CHENEY, W. e GOLDSTEIN, A. A. Proximity Maps for Convex Sets. **Proc. Amer. Math. Soc.**, págs. 12:448–450, 1959.
- COMBETTES, P. L. Signal Recovery by Best Feasible Approximation. **IEEE Transactions on Image Processing**, (2):2:269–271, 1993.
- DAVID, J. e DE MOOR, B. the opposite of Analytic Centers for Solving minimum Rank Problems in Control and Identification. in **Proc. 32nd Conference on Decision and Control**, 1993.
- E.SCHMITENDORF, W. e HOLLOT, C. V. Simultaneous Stabilization via Linear State Feedback. **Trans on Automatic Control**, 34(9):1001–1005, 1989.
- G. ZHU, K. M. G. e SKELTON, R. E. Covariance Control Design for The Hubble Space Telescope. **J. Guidance Control Dynam.**, págs. 18:230–236, 1996.
- GAHINET, P. e NEMIROVSKII, A. General Purpose LMI Solver with Benchmarks. in **proc. 32nd Conference Decision Control, san Antonio, TX**, 1993.
- GAHINET, P. e NEMIROVSKII, A. **LMI Control Toolbox**. The Mathworks, Inc., Natick, MA, 1995.
- GHAOUI, L. E. e CAHINET, P. Rank Minimization under LMI Constraints: A Framework for Output Feedback Problems. in **Proc. European Control Conference**, págs. 1176–1179, 1993.
- GHAOUI, L. E. e NICULESCU, S.-L. **Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control**. SIAM, 2000.
- GRIGORIARDS, K. e BERAN, E. Alternating Projections Algorithms for linear Matrix Inequalities Problems with Rank Constraints. In **Advances in Linear Matrix Inequality Methods in Control**. SIAM, 2000.



- H. BAUSCHKE, P. L. C. e LUKE, D. R. Phase Retrieval, Error Reduction Algorithm and Fienup Variants: A View from Convex Optimization. **Journal of The Optical Society Of America**, (7):19, 2002.
- H. TUAN, S. H. e TUY, H. D.C. Optimization Approach to Robust Control: Feasibility Problems. **Technical report 9601, nagoya University, Japan**, 1996.
- HIGHAM, N. Computing The nearest Symmetric Positive Semidefinite Matrix. **Linear Algebra Appl**, págs. 103:103–118, 1988.
- HIGHAM, N. Computing a nearest Symmetric Correlation Matrix-a problem form Finance. **IMA Journal of Numerical Analysis**, (3):22:329–343, 2002.
- HORISBERGER, H. P. e BÉLANGER, P. R. Regulators for Linear, Time Invariants Plants with Uncertain Parameters. **IEEE Trans. Automatic Control**, págs. AC–21:705–708, 1982.
- HORN, R. A. e JOHNSON, C. R. Matrix Analysis. **Cambridge University Press**, 1989.
- IWASAKI, T. e SKELTON, R. All Controllers for The General  $H_\infty$  Control Problem: LMI Existence Conditions and State Space Formulas. **Automatica**, págs. 30:1307–1317, 1994.
- IWASAKI, T. e SKELTON, R. Parametrization of all Stabilizing Controllers via Quadratic Lyapunov Functions. **J. Optim. Theory Appl.**, págs. 85:291–308, 1995.
- K. J. HUNT, J. C. KALKKUHLE, H. F. e JOHANSEN, T. A. Constructive Empirical Modelling of Longitudinal Vehicle Dynamics Using Local Model Networks. **Control Eng. Practice**, 4(2):167–178, 1996.
- L. EL GHAOU, F. O. e RAMI, M. A. A Cone Complementary Linearization Algorithm for Static Output Feedback and related Problems. **IEEE Trans. Automat. Control**, págs. 42:1171–1176, 1997.
- L. G. GUBIN, B. T. P. e RAIK, E. V. The Method of Projections for Finding the Common Point of Convex Sets. **USSR Comput. Math. Phys.**, págs. 7:1–24, 1967.
- MESBAHI, M. E. e PAPAVALASSILOPOULOS, G. P. On The Rank Minimization Problem over a positive Semi-definite Linear matrix Inequality. **IEEE Trans. Automat. Control**, págs. 42:239–243, 1997.
- NESTEROV, Y. e NEMIROVSKII, A. **Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming: Theory and Applications**. SIAM, Philadelphia, 1994.
- PEREZ, J. M. G. T. **Controle Preditivo Robusto com Realimentação de Saída**. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, 2006.
- PETERSEN, P. I. A procedure for Simultaneously Stabilizing a Collect of Single Input Linear Systems Using Nonlinear State Feedback. **Automatica**, 23:33–40, 1989.

- P.GAHINET e APKARIAN, P. A Linear matrix Inequality Approach to  $H_\infty$  Control. **Internat. J. Robust Nonlinear Control**, págs. 4:421–448, 1994.
- PYATNITSKI, E. S. e SKORODINSKII, V. I. Numerical Methods of Lyapunov Function Construction and their application to The Absolute Stability Problem. **Syst. Control Letters**, págs. 2(2):130–135, 1982.
- R. ORSI, U. H. e MOORE, J. **A Newton-like Method for Solving Rank Constrained Linear Matrix Inequalities**. To appear in *Automatica*, 2005.
- R.E. SKELTON, T. I. e GRIGORIARDS, K. **A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design**. Taylor & Francis, London, 1998.
- S. BOYD, L. EL GHAOU, E. F. e BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory**. SIAM, Philadelphia, 1994.
- SAFONOV, M. G. Controller Synthesis via Bilinear Matrix Inequalities. **American Control Conference**, págs. 45–49, 1994.
- SALES, D. e CORRÊA, G. On The Simultaneous Stabilization By Static Output Feedback Problem. **IEEE International Symposium on Computer**, September 2002.
- SAMBLANCAT, C. **Commande Robuste Multivariable Applications a L'helicoptere**. Tese de Doutorado, Ecole Nationale Superieure de L'Aeronautique et de L'Espace-ENSAE, Toulouse, 1991.
- SCHERER, C. e WEILAND, S. **Linear Matrix Inequalities in Control**. 2004.
- T. A. JOHANSEN, K. J. HUNT, P. J. G. e FRITZ, H. Off-Equilibrium Linearisation and Design of Gain-Scheduled Control with Application to Vehicle Speed Control. **Control Eng. Practice**, 6(2):167–180, 1998.
- TOKER, O. e OSBAY, H. On The NP-hardness of Solving Bilinear Matrix Inequalities and Simultaneous Stabilization with Static output Feedback. **in: Proc of The American Control Conf., IEEE Press, Piscataway, NJ**, 1995.
- VANANTWERP, J. G. **Globally Optimal Robust Control for systems with non-linear Time-Varying Perturbations**. Tese de Mestrado, University of Illinois, Urbana, Illinois, 1997.
- VANDENBERGHE, L. e BOYD, S. Stanford University, CA. **SP: Software for Semidefinite Programming. Users Guide**. [online]. 1994. Disponível: <http://www.stanford.edu/Boyd/SP.html>.
- VANDENBERGHE, L. e BOYD, S. A Primal-Dual Potential reduction Method for Problems Involving Matrix Inequalities. **Math. Programming Ser. B**, págs. 69:205–236, 1995.
- VANDENBERGHE, L. e BOYD, S. **Semidefinite Programming**. SIAM, 1996.
- WANG, Y. e HUNT, K. J. Simultaneous Stabilization and Strong Simultaneous Stabilization of r-tuple Plants with D Stability - a Constrained Optimisation Approach. **IEEE AC**, 1999.

ZHAO, Q. e JIANG, J. Reliable State Feedback Control System Design Against Actuator Failures. **Automatica**, 34(10):1267–1272, 1998.