

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

1ºTen JOÃO FÁBIO SOARES DOS SANTOS

**PROBLEMA DE CONTROLE H_2/H_∞ - ESTUDO COMPARATIVO ENTRE
AS TÉCNICAS EBPE/CGO E LMI**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Roberto Ades - Dr. PUC-Rio

Co-Orientador: Prof. Paulo César Pellanda - Dr. ENSAE

Rio de Janeiro

2005

c2005

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Praça General Tibúrcio, 80 – Praia Vermelha

Rio de Janeiro - RJ CEP: 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmear ou adotar qualquer forma de arquivamento.

São permitidas a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do autor e dos orientadores.

CDD 629.8312 Santos, João Fábio Soares dos

S237 Problema de Controle H_2 / H_∞ - Estudo Comparativo entre as Técnicas EBPE / CGO e LMI. / João Fábio Soares dos Santos. – Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2005.

131p. : il., graf., tab.

Dissertação: (mestrado) - Instituto Militar de Engenharia – Rio de Janeiro, 2005.

1. Engenharia Elétrica, 2. Controle Robusto, 3. Problema de Controle H_2 / H_∞ .

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

JOÃO FÁBIO SOARES DOS SANTOS – 1º TEN QEM ELE

**PROBLEMA DE CONTROLE H_2 / H_∞ - ESTUDO COMPARATIVO ENTRE
AS TÉCNICAS EBPE / CGO E LMI**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Roberto Ades - Dr. PUC-Rio

Co-Orientador: Prof. Paulo César Pellanda - Dr. ENSAE

Aprovada em 04 de agosto de 2005, pela seguinte Banca Examinadora:

Prof. Roberto Ades, Dr. PUC-Rio do IME – Presidente

Prof. Paulo César Pellanda, Dr. ENSAE do IME

Prof. Marcos Azevedo da Silveira, Dr. UPS da PUC-Rio

Prof. Geraldo Magela Pinheiro Gomes, Dr. ENSAE do IME

Rio de Janeiro

2005

Aos Meus Pais, João e Amália, pelo Amor e Educação.
À Minha Esposa, Andréia, pelo Amor e Compreensão.
À Minha Filha, Ana Clara, uma Benção de Deus, a Alegria
do Lar.

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais e irmãos, por todo apoio, atenção e pelo investimento em educação, auxiliando para meu crescimento moral e intelectual e, pelo amor doado de forma inesgotável.

À minha esposa pela fiel e agradável companhia, carinho e amor que culminaram com o nascimento de minha querida filha e por compreender a enorme importância da realização deste trabalho.

Aos professores que participaram de minha formação. Em especial, ao meu professor orientador Roberto Ades e professor co-orientador Paulo César Pellanda pela amizade, compreensão, disponibilidade, apoio e orientação prestada durante este período de trabalho.

Aos amigos pelo incentivo, em especial aos companheiros de curso Ricardo, Jacy, Eduardo, Gomes, Sivollela, Gilmar e Orlando pela longa e agradável jornada de trabalho e aos companheiros do CTEEx pelo apoio.

Ao Exército Brasileiro e em especial ao Departamento de Engenharia Elétrica do IME pela minha formação profissional.

“A maior sabedoria que existe é a de conhecer-se!”

GALILEO GALILEI

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	9
LISTA DE TABELAS	10
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS	11
1 INTRODUÇÃO	16
1.1 Motivação e Posicionamento	16
1.2 Objetivos e Escopo	21
2 SUPORTE TEÓRICO	22
2.1 Notação adotada	22
2.2 Controlabilidade e Observabilidade	24
2.3 Estabilidade segundo Lyapunov	26
2.4 Cálculo da Norma H_2	29
2.5 Cálculo da Norma H_∞	32
2.6 Redução de Ordem de Modelos	37
3 PROBLEMA DE CONTROLE H_2/H_∞	43
3.1 Introdução	43
3.2 Problema de Controle ótimo H_2	45
3.2.1 O problema do servomecanismo	45
3.2.2 Solução do problema de controle ótimo H_2	50
3.3 Problema de Controle ótimo H_∞	53
3.3.1 O critério de robustez em estabilidade	53
3.3.2 Solução para um problema de controle ótimo H_∞	56
3.4 Métodos de Resolução EBPE / CGO	59
3.4.1 O problema de programação não linear	61
3.4.2 Implementação computacional do problema de controle H_2/H_∞	63

3.4.3	O Método EBPE	66
3.4.4	O Método CGO	69
3.5	Desigualdades matriciais lineares na solução de problemas de controle	73
3.5.1	Análises H_2 e H_∞	77
3.5.2	Síntese de controladores	78
4	EXEMPLOS DE PROBLEMA DE CONTROLE H_2/H_∞	86
4.1	Aplicação das técnicas EBPE / CGO e LMI em um exemplo acadêmico	89
4.1.1	Resolução do problema de controle ótimo H_2	90
4.1.2	Resolução do problema de controle ótimo H_∞	91
4.1.3	Resolução do problema de controle H_2 / H_∞	92
4.2	Aplicação das técnicas EBPE / CGO e LMI em um modelo de míssil	96
4.2.1	Conceitos básicos	96
4.2.2	Modelo não-linear de um míssil	99
4.2.3	Modelo linear do míssil	101
4.2.4	Resolução do problema de controle ótimo H_2	103
4.2.5	Resolução do problema de controle ótimo H_∞	104
4.2.6	Resolução do problema de controle H_2 / H_∞	110
5	CONCLUSÕES E SUGESTÕES	116
5.1	Conclusões	116
5.2	Sugestões	118
6	ANEXOS	120
6.1	ANEXO 1: Complemento de Schur	121
6.2	ANEXO 2: Informações sobre o exemplo do modelo de míssil	122
6.3	ANEXO 3: Algoritmos computacionais de interesse	124
7	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	129

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG.2.1	Fluxograma do algoritmo de bisseção para o cálculo da norma H_∞	35
FIG.3.1	Sistema realimentado	45
FIG.3.2	Sistema realimentado simplificado	53
FIG.3.3	Diagrama em blocos do processo de otimização	64
FIG.3.4	Estrutura de síntese	78
FIG.4.1	Sistema de controle realimentado com canais de saída H_∞ e H_2	86
FIG.4.2	Diagramas de Bode relativos ao controlador intermediário V_{S-L1}	95
FIG.4.3	Diagramas de Bode relativos ao controlador intermediário V_{S-L4}	95
FIG.4.4	Esquema simplificado do míssil	97
FIG.4.5	Caracterização dos movimentos de arfagem, derivação e rolagem	98
FIG.4.6	Diagramas de Bode relativos ao controlador intermediário V_{Mhi-L1}	106
FIG.4.7	Diagramas de Bode relativos ao controlador intermediário V_{Mhi-L8}	106
FIG.4.8	Diagramas de Bode relativos ao controlador intermediário $V_{Mhi-BO1}$	108
FIG.4.9	Diagramas de Bode relativos ao controlador intermediário $V_{Mhi-BO3}$	108
FIG.4.10	Diagramas de Bode relativos ao controlador intermediário V_{M-L1}	112
FIG.4.11	Diagramas de Bode relativos ao controlador intermediário V_{M-L7}	112
FIG.4.12	Diagramas de Bode relativos ao controlador intermediário V_{M-BO1}	113

LISTA DE TABELAS

TAB.4.1	Resultados do problema de controle ótimo H_2 em (SALES e CORRÊA, 1997)	90
TAB.4.2	Resultados do problema de controle ótimo H_∞ em (SALES e CORRÊA, 1997)	91
TAB.4.3	Resultados do problema de controle H_2/H_∞ em (SALES e CORRÊA, 1997)	93
TAB.4.4	Resultados do problema de controle ótimo H_2 no modelo linearizado do míssil	103
TAB.4.5	Resultados do problema de controle ótimo H_∞ (EBPE) no modelo do míssil	105
TAB.4.6	Resultados do problema de controle ótimo H_∞ (CGO) no modelo do míssil	107
TAB.4.7	Resultados do problema de controle ótimo H_∞ no modelo linearizado do míssil	109
TAB.4.8	Resultados do problema de controle H_2/H_∞ (EBPE) no modelo do míssil	111
TAB.4.9	Resultado do problema de controle H_2/H_∞ (CGO) no modelo do míssil	111
TAB.4.10	Resultados do problema de controle H_2/H_∞ no modelo linearizado do míssil	114

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

ABREVIATURAS

AN	-	analítico.
BFGS	-	Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno.
BMI	-	bilinear matrix inequality.
CGO	-	conjunto gerador otimizado.
EBPE	-	expansão em base pré-estabelecida.
FT	-	função de transferência.
FTMA (FTMF)	-	função de transferência em malha aberta (fechada).
LIT	-	linear e invariante no tempo.
LMI	-	linear matrix inequality.
LQR (LQG)	-	linear quadratic regulator (gaussian).
MIMO	-	multiple-input multiple-output.
SISO	-	single-input single-output.

SÍMBOLOS

$:=$	-	por definição.
J	-	$\sqrt{-1}$
I	-	matriz identidade de ordem compatível com a expressão matemática.
$\mathbb{R} (\mathbb{C})$	-	conjunto dos números reais (complexos).
$\mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$	-	conjunto dos vetores reais (complexos) de dimensão n .
$\mathbb{R}^{n \times m} (\mathbb{C}^{n \times m})$	-	conjunto das matrizes reais (complexas) de dimensões $n \times m$.
$\mathbb{R}_+ (\mathbb{C}_+^o)$	-	conjunto dos números reais não negativos (estritamente positivos).
$\mathbb{C}_+ (\mathbb{C}_+^o)$	-	conjunto dos números complexos com parte real em $\mathbb{R}_+ (\mathbb{C}_+^o)$.

$\mathbb{Z}_+ (\mathbb{Z}_+^o)$	-	conjunto dos números inteiros não negativos (estritamente positivos).
$[X]$	-	matriz X de ordem n .
$X^T (X^{-1})$	-	matriz transposta (inversa) de X .
$\text{tr}[X]$	-	traço da matriz X .
$\det(X)$	-	determinante da matriz X .
$ b $	-	valor absoluto do número real b ou módulo do complexo b .
$\text{Re}(a)$	-	parte real do número complexo a .
a^*	-	conjugado do número complexo a .
$\hat{\alpha}(\hat{\alpha}_x^z)$	-	ângulo α em graus (entre os eixos x e z).
$\ \cdot\ $	-	norma euclidiana de vetores no \mathbb{R}^n .
\underline{x}	-	vetor $x \in \mathbb{R}^n$.
$\nabla F(\underline{x})$	-	gradiente da função F no ponto \underline{x} .
$\partial F(\underline{x})$	-	subdiferencial da função F no ponto \underline{x} .
S	-	variável complexa representativa de sistemas a tempo contínuo.
$\lambda_{\max}(X)$	-	máximo autovalor de X .
$\lambda_i(X)$	-	i -ésimo autovalor de X .
$\underline{\lambda}(X) [\bar{\lambda}(X)]$	-	mínimo [máximo] autovalor de X .
$\underline{\sigma}(X) [\bar{\sigma}(X)]$	-	mínimo [máximo] valor singular de X .
$\sigma_i^H(X)$	-	i -ésimo valor singular de Hankel de X .
$G^{\sim}(s)$	-	$G^T(-s)$
$G^*(j\omega)$	-	$G^T(-j\omega)$
S	-	conjunto das matrizes com elementos reais-rationais, próprios e estáveis.
R_p	-	conjunto das matrizes com elementos reais-rationais e próprios em \mathbb{R} .

L_2	-	espaço das matrizes com elementos quadraticamente integráveis sobre o eixo imaginário.
$H_2^+ (H_2^-)$	-	subespaço do L_2 cujos elementos são funções analíticas em $\square_+^o (\square_-^o)$.
L_∞	-	espaço das matrizes com elementos limitados sobre o eixo imaginário.
$H_\infty^+ (H_\infty^-)$	-	subespaço do L_∞ cujos elementos são funções analíticas em $\square_+^o (\square_-^o)$.
$\ G(s)\ _2$	-	norma L_2 ou H_2 da matriz ou função de transferência $G(s)$.
$\ G(s)\ _\infty$	-	norma L_∞ ou H_∞ da matriz ou função de transferência $G(s)$.
L	-	transformada de laplace.
L_o	-	gramiano de observabilidade do par (C, A) .
L_c	-	gramiano de controlabilidade do par (A, B) .
$\text{diag}(a_1, \dots, a_n)$		matriz diagonal formada pelos elementos a_1, \dots, a_n .
$\max(\cdot, \cdot)$	-	máximo entre os argumentos.
$\min_{x \in Y} J(x)$	-	determinar $z \in Y$ tal que $J(z) \leq J(x)$ para todo $x \in Y$.
$\langle \cdot, \cdot \rangle_2$	-	produto interno no L_2 .

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo o estudo do problema de controle ótimo H_2 / H_∞ e de sua solução através das técnicas EBPE / CGO e LMI. Estes métodos são comparados através de suas aplicações em exemplos de sistemas dinâmicos retirados da literatura de sistemas de controle.

A norma H_2 é normalmente utilizada para especificar critérios de desempenho, enquanto que a norma H_∞ pode ser utilizada para representar critérios de robustez em estabilidade. Portanto, o problema de controle H_2 / H_∞ tem como objetivo o projeto de controladores que proporcionem, em malha fechada, um compromisso entre os critérios de desempenho e de margem de estabilidade.

As técnicas EBPE / CGO se baseiam na construção de controladores por meio de expansão em séries de funções de transferência racionais. As ordens dos controladores calculados para o problema crescem a medida que convergem para sua solução ótima. Nesses métodos, são utilizadas técnicas de otimização via programação não-linear. Na técnica LMI, os controladores são calculados através das técnicas de otimização convexa, uma vez que ela trata de um problema linear sob restrições do tipo desigualdade matricial linear. A ordem do controlador é a mesma da planta de síntese. Ao longo da dissertação é apresentado o suporte teórico necessário para a compreensão desses métodos.

Os resultados dos dois métodos são comparados sob diversos aspectos, tais como: a proximidade da solução obtida nos problemas com relação a solução ótima, a observação da ordem e da característica quanto a estabilidade dos controladores e condicionamento numérico da solução.

ABSTRACT

The objective of this work is to study the H_2 / H_∞ optimal control problem and its solution via EBPE / CGO and LMI techniques. These methods are compared by applying them in dynamical system examples appearing in the control system literature.

The H_2 norm is generally used to specify performance criteria, whereas the H_∞ norm may be used to represent robust stability criteria. Therefore, the main goal of the H_2 / H_∞ control problem is to synthesize controllers that yield a trade off between performance and stability margin in closed-loop.

In the EBPE / CGO techniques, controllers are constructed by expanding rational transfer functions in series. The controllers order increases as the algorithm converge on its optimal solution. In those methods, nonlinear optimization techniques are employed. In the LMI technique, once the problem is linear under linear matrix inequality constraints, controllers are computed through convex optimization techniques. The controller order is the same of the synthesis plant. The theoretical support of those techniques is also provided.

The results of both methods are compared considering several aspects such as: proximity to the optimal solution, controllers order and stability, and numerical conditioning of the solution.

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO E POSICIONAMENTO

O primeiro sistema de controle que se tem notícia foi implementado por James Watt no século XVIII. Tratava-se de um controlador centrífugo para o ajuste de velocidade de uma máquina a vapor.

Em 1892, Lyapunov apresentou dois métodos para se determinar a estabilidade de sistemas dinâmicos descritos por meio de equações diferenciais ordinárias.

Em 1922, Minorsky utilizou equações diferenciais como ferramenta para representar sistemas. Minorsky demonstrou a estabilidade destes sistemas e aplicou este conhecimento no projeto de controladores automáticos para pilotar navios.

Em 1932, Nyquist desenvolveu um procedimento para determinar a estabilidade de sistemas em malha fechada com base no diagrama polar da resposta em frequência do sistema em malha aberta. Tal procedimento é conhecido como critério de estabilidade de Nyquist.

Durante as décadas de 40 e 50 surgiu a Teoria de Controle Clássico. Neste período foram desenvolvidos estudos no domínio da frequência focados em sistemas monovariáveis ou SISO (uma entrada e uma saída).

As técnicas de controle clássico permitem a análise e o projeto de sistemas de controle estáveis em malha fechada a partir da função de transferência por meio de procedimentos de tentativa e erro.

Dentre algumas ferramentas utilizadas pela teoria de controle clássico para o projeto de sistemas de controle encontram-se: a resposta em frequência, o lugar das raízes, o critério de estabilidade de Nyquist, o critério de estabilidade de Routh e o diagrama de Nichols.

Um sistema de controle pode ser razoavelmente projetado por tentativa e erro com o auxílio do traçado de diagramas de Bode, atendendo indiretamente algumas especificações de desempenho. Compensadores de avanço, de atraso e de avanço-atraso de fase, conforme conveniência, aplicados em série com a planta podem ser projetados com esta finalidade.

A estabilidade de um sistema de controle Linear e Invariante no Tempo (LIT) é garantida pela observação das margens de fase e de ganho, considerando os conceitos de fase mínima e não-mínima. A estabilidade também é garantida pela aplicação do método do lugar das raízes desenvolvido por Evans no final dos anos 50. Nos casos em que o sistema é não-linear ou, linear e variante no tempo, tais critérios de estabilidade não são aplicáveis. Para tais casos, utiliza-se o segundo método ou método direto de Lyapunov com o objetivo de analisar a estabilidade do sistema em estudo. Este método não requer o uso de equações diferenciais para sua implementação e também pode ser aplicado, naturalmente, na determinação da estabilidade de sistemas LIT.

Na década de 60, o surgimento de computadores digitais com alta velocidade de processamento tornou possível a análise, no domínio do tempo, de sistemas complexos (multivariáveis). A fim de tratar a complexidade de sistemas modernos e atender às rigorosas exigências impostas pelas aplicações industriais, surgiram as técnicas de projeto baseadas na teoria de controle moderno. Os estudos desenvolvidos a partir dessa década culminaram com a modelagem da planta sob a representação em espaço de estados. São então apresentadas as formas canônicas e os conceitos de controlabilidade e observabilidade introduzidos por Kalman, bem como as técnicas de alocação de pólos por Ackermann.

Devido à complexidade dos sistemas multivariáveis, os projetos passam a ser desenvolvidos a partir da minimização de uma função custo, que representa um índice de desempenho para a planta.

Na década de 70 surgiram as técnicas de controle ótimo representadas, no domínio do tempo, pelos métodos LQR “Regulador Linear Quadrático” e LQG “Gaussiana Linear Quadrática” (ANDERSON, 1989) e, no domínio da frequência, pelo método H_2 (SILVEIRA e CORRÊA, 1992). O controle nos métodos LQR e LQG é feito por realimentação de estados. No caso específico do método LQG, são considerados os sinais de ruído e perturbação aplicados ao sistema e o controle é realizado por realimentação dos estados estimados com o auxílio do filtro de Kalman.

No problema de controle ótimo H_2 , o objetivo é a minimização de um índice de desempenho baseado na norma H_2 de funções de transferência. Em (SILVEIRA e CORRÊA, 1992) desenvolve-se o problema de controle ótimo H_2 para o servomecanismo. Nesse artigo, o problema considerado possui solução analítica.

Nas implementações desses métodos considerava-se que a planta estaria bem representada por um modelo, dito modelo nominal. O controlador calculado atendia às especificações de desempenho para o modelo nominal de maneira ótima. No que diz respeito à modelagem de plantas, não se levava em conta a possibilidade da planta ter seu modelo modificado em função de perturbações e distúrbios.

Em aplicações práticas, observou-se que o comportamento da planta se alterava do previsto nominal ao longo do tempo. Esses erros de modelagem, considerados como perturbações, surgiam em função de dinâmicas ignoradas, tempos de retardo, modos de alta frequência desconsiderados, não-linearidades desprezadas, variações paramétricas ou mesmo, por falhas nos sensores e atuadores. Em consequência, o desempenho da planta se deteriorava, podendo até mesmo se tornar instável.

A teoria de controle robusto surgiu na década de 80 envolvendo o conceito de robustez em estabilidade. Representa um marco para os estudos de sistemas de controle, tendo em vista que a planta não pode ser perfeitamente representada através de um modelo matemático simples. O objetivo principal é a estabilização da planta representada por uma classe de modelos e não mais por somente um modelo nominal. Esta classe de modelos passa a considerar as perturbações e distúrbios que atingem o modelo nominal.

As ferramentas para enfrentar o problema de controle robusto encontram espaço em aplicações sujeitas a variações do ponto de operação. Como exemplo, pode-se citar os sistemas voltados para aplicações militares, onde enquadram-se os aviões de combate, foguetes e mísseis. As especificações de robustez em estabilidade são de extrema importância para garantir a estabilidade de um sistema de controle que esteja submetido a perturbações.

O teorema do pequeno ganho desenvolvido em (DESOER, 1975) trata da análise de estabilidade baseada em condições de pequeno ganho. A aplicação deste teorema fornece resultados em que a estabilidade é garantida perante uma perturbação limitada em norma.

Dada uma classe de modelos incertos Π com perturbações já inseridas e um conjunto de objetivos de desempenho, sendo $P \in \Pi$ o modelo nominal e C o controlador, diz-se que o sistema realimentado a malha fechada possui: (ZHOU et alii, 1996)

Estabilidade nominal: Se C estabiliza internamente o modelo nominal P .

Desempenho nominal: Se o sistema (P, C) satisfaz os objetivos de desempenho.

Robustez em estabilidade: Se todas as plantas em Π são estabilizadas internamente por C .

Robustez em desempenho: Se $\forall \bar{P} \in \Pi$, o sistema (\bar{P}, C) satisfaz os objetivos de desempenho.

As Equações Algébricas de Riccati (ARE), desenvolvidas nos anos 80, tornaram-se uma ferramenta matemática indispensável para aplicações em controle robusto. Segundo WILLEMS (1971), as ARE fazem parte, na verdade, de um conjunto de desigualdades matriciais transformadas em simples inequações através da aplicação do complemento de Schur. Trata-se, portanto, de um caso particular deste conjunto de desigualdades matriciais denominado Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs, do inglês *Linear Matrix Inequalities*).

A teoria de controle robusto possibilitou, através das ARE, a resolução do problema de controle ótimo H_∞ (DOYLE, 1989), cujo objetivo é a maximização da margem de estabilidade pela minimização da norma H_∞ . Este problema originou-se devido às limitações do problema de controle ótimo H_2 em relação aos distúrbios que surgem no modelo adotado. O problema de Nehari é um problema de controle ótimo H_∞ com solução analítica, em que minimiza-se a norma H_∞ a partir da aproximação de uma função instável por uma estável.

No final dos anos 80 surgiu o interesse em calcular o controlador que resulta na minimização da norma H_2 de uma função de transferência, representando um critério de desempenho, sujeito a uma restrição na norma H_∞ de outra função de transferência, representando um critério de robustez em estabilidade. Este problema fornece como resultado um custo sub-ótimo H_2 e é denominado “Problema de Controle H_2 / H_∞ ”, objeto de estudo desta dissertação.

Nota-se, na resolução deste problema, que em geral o controlador que minimiza, sem restrições, a função custo H_2 também eleva consideravelmente a função custo H_∞ definida na restrição e, de forma inversa, o controlador que minimiza a referida função custo H_∞ também eleva a função custo H_2 . Ou seja, um melhor desempenho ocorre geralmente em detrimento da robustez em estabilidade e vice-versa. Fica claro a existência de um compromisso entre o custo H_2 e o custo H_∞ na abordagem apresentada pelo problema de controle H_2 / H_∞ .

Devido às dificuldades algébricas, ainda não se encontrou, de fato, uma solução analítica para o problema original de controle H_2 / H_∞ . Este problema quando modificado, apresenta em diversos casos, soluções semi-analíticas, ou seja, um desenvolvimento de forma analítica, seguido da aplicação de algoritmos numéricos que processam soluções em um número finito de iterações.

Das várias técnicas para resolução do problema de controle H_2/H_∞ , serão abordadas nesta dissertação os métodos EBPE (Expansão em Base Pré-Estabelecida) e CGO (Conjunto Gerador Otimizado), apresentado em (ADES, 1999), bem como o método por LMI, discutido em (BOYD et alii, 1994), (APKARIAN et alii, 2000) e (PELLANDA, 2001).

No método EBPE, o controlador é representado pela expansão de uma série truncada de funções de transferência, cujos coeficientes são as variáveis de projeto. A série completa dessas funções forma uma base para o espaço solução dos controladores. Através de algoritmos de otimização, as variáveis de projeto são alteradas a cada iteração. Nessas iterações são determinadas direções de busca a partir do gradiente da função objetivo. Neste caso, o problema estudado é convexo, ou seja, a minimização resulta na convergência para o valor mínimo global.

No método CGO, o ajuste dos coeficientes da série é realizado simultaneamente com a escolha das FT que participarão da série truncada. O controlador é calculado considerando os pressupostos do teorema de Runge (CHURCHILL, 1960), onde o espaço H_2^+ pode ser expandido por termos da forma $(s+a)^{-1}$ com $a \geq 0$. As variáveis de projeto, neste caso, passam a atuar tanto nos zeros, como no caso EBPE, quanto nos pólos da FT. O problema apresentado desta forma é não convexo e o resultado recai numa série de mínimos locais, não sendo garantida a otimalidade da solução encontrada.

No método LMI, o problema de controle H_2/H_∞ se baseia na minimização de uma função linear, constituída por variáveis de decisão inerentes ao problema, sujeito a restrições na forma de LMI, que representam especificações nas normas H_2 e H_∞ . O problema assim tratado é convexo, o que permite a convergência para o valor mínimo global, conforme já mencionado.

O assunto proposto nesta dissertação encontra motivação na possibilidade de realizar um estudo comparativo entre os métodos EBPE / CGO e LMI para resolução do problema de controle H_2/H_∞ .

1.2 OBJETIVOS E ESCOPO

O trabalho proposto tem por finalidade realizar um estudo comparativo referente ao Problema de Controle H_2 / H_∞ a partir das metodologias EBPE / CGO e LMI. Nesse estudo serão discutidas as limitações de cada uma das técnicas, bem como suas vantagens e desvantagens.

A dissertação está organizada em 4 capítulos, além desta introdução. Os capítulos abordam os seguintes temas:

- O Capítulo 2 traz para o leitor o suporte teórico desta dissertação, tratando inclusive do cálculo das normas H_2 e H_∞ .
- O Capítulo 3 inicia com o desenvolvimento das soluções dos problemas de controle ótimo H_2 e de controle ótimo H_∞ , além de uma introdução ao objeto tema desta dissertação. Em seguida, são apresentados os conceitos relativos aos métodos EBPE / CGO e LMI para resolução do problema de controle H_2 / H_∞ .
- O Capítulo 4 apresenta um exemplo acadêmico e o modelo não-linearizado de um míssil onde são propostos problemas de controle ótimo H_2 , H_∞ e H_2 / H_∞ . Esses problemas são solucionados pela aplicação das técnicas EBPE / CGO (ADES, 1999) e pela aplicação da técnica LMI (BOYD et alii, 1994). Os resultados obtidos são comparados de forma qualitativa e quantitativa.
- O Capítulo 5 explicita as conclusões finais alcançadas no fechamento do Capítulo 4 e apresenta algumas sugestões para trabalhos futuros.

2 SUPORTE TEÓRICO

2.1 NOTAÇÃO ADOTADA

Para facilitar a leitura desta dissertação sugere-se a familiarização com a Lista de Abreviaturas e Símbolos.

A notação $X > 0$ ($X < 0$) indica que uma determinada matriz simétrica X é **positiva definida** (**negativa definida**), ou seja, quando $X = X^T$ e $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, todos os autovalores de X são números reais estritamente maiores (menores) que zero. A notação $X \geq 0$ ($X \leq 0$) indica que a matriz X é **positiva semi-definida** (**negativa semi-definida**), ou seja, quando $X = X^T$ e $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$, todos os autovalores de X são números reais positivos (negativos) ou nulos. Uma matriz X é hermitiana quando $X = X^*$.

Por R_p designa-se o conjunto das matrizes cujos elementos são funções reais-rationais e próprias em \mathbb{R} .

Representa-se por H_p , com $P \geq 1$, os espaços de Hardy (ZHOU, 1998, p. 48). Nesta dissertação estudam-se especificamente os espaços H_2 e H_∞ , cuja motivação é a busca de um melhor desempenho e manutenção da estabilidade de sistemas de controle. Sendo assim, seguem abaixo algumas definições a respeito desse tema.

Seja L_2 o espaço de Hilbert das matrizes cujos elementos são funções quadraticamente integráveis sobre o eixo imaginário. Este espaço é composto por matrizes de funções complexas F tais que a desigualdade 2.1 é satisfeita:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}[F^*(j\omega) F(j\omega)] d\omega < \infty \quad (2.1)$$

Dado $F, G \in L_2$, o produto interno deste espaço é definido como:

$$\langle F, G \rangle := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}[F^*(j\omega) G(j\omega)] d\omega \quad (2.2)$$

A norma induzida pelo produto interno é dada por:

$$\|F\|_2 := \sqrt{\langle F, F \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}[F^*(j\omega) F(j\omega)] d\omega} \quad (2.3)$$

Denota-se por H_2^+ (H_2^-) o subespaço de matrizes em L_2 , analíticas em σ_+^o (σ_-^o), quadraticamente integráveis nas retas $a + j\omega$ com $\omega \in \mathbb{R}$ para todo $a > 0$ ($a < 0$). A norma H_2 é representada por (FRANCIS, 1987):

$$\|F\|_2^2 := \sup_{a>0(a<0)} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}[F^*(a + j\omega) F(a + j\omega)] d\omega \right\} \quad (2.4)$$

Para $F \in L_2$, denota-se a projeção ortogonal de F em H_2^+ (H_2^-) por $[F]_+$ ($[F]_-$). Observa-se que F pode ser decomposta em: $F(s) = [F(s)]_+ + [F(s)]_-$. O subespaço de H_2^+ (H_2^-), dado por RH_2^+ (RH_2^-), é formado pelas matrizes cujos elementos são funções reais-rationais, estritamente próprias e estáveis (instáveis) sem pólos sobre o eixo imaginário. Seguindo este raciocínio, por ADES (1999) obtém-se:

$$\|F(s)\|_2^2 = \|[F(s)]_+\|_2^2 + \|[F(s)]_-\|_2^2 \quad (2.5)$$

O espaço L_2 pode ser representado, no domínio do tempo, por um isomorfismo isométrico denominado por l_2 . A aplicação da transformada de Laplace no espaço l_2 gera o espaço L_2 , da mesma forma que a aplicação de sua inversa em L_2 gera l_2 . Assim, a

transformada de Laplace bilateral implica um isomorfismo isométrico entre os domínios do tempo e da frequência. Desse isomorfismo são obtidas as “relações de Parseval”, conforme (ZHOU, 1998, p. 49). Essas relações serão aplicadas para o cálculo da norma H_2 na Seção 2.4 mais adiante.

Por L_∞ denota-se o espaço de Banach das matrizes cujos elementos são funções essencialmente limitadas sobre o eixo imaginário. Denota-se por H_∞^+ (H_∞^-) o subespaço de matrizes em L_∞ , analíticas e limitadas em \mathbb{C}_+ (\mathbb{C}_-), equipadas com a norma:

$$\|F\|_\infty := \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}\{F(j\omega)\} \quad (2.6)$$

2.2 CONTROLABILIDADE E OBSERVABILIDADE

Considere um sistema LIT, representado sob a forma de espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A\underline{x} + B\underline{w} \\ \underline{z} &= C\underline{x} + D\underline{w} \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde o estado $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, a entrada $\underline{w} \in \mathbb{R}^p$ e a saída $\underline{z} \in \mathbb{R}^q$ com $n, p, q \in \mathbb{C}_+$. As matrizes A , B , C e D possuem dimensões em conformidade com os vetores \underline{x} , \underline{w} e \underline{z} , isto é, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{q \times p}$. A matriz (função) de transferência obtida a partir das EQ 2.7 pode ser representada por:

$$P_{zw}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] := C(sI - A)^{-1}B + D \quad (2.8)$$

No sistema dinâmico LIT descrito pelas EQ 2.7, o par (A,B) é dito controlável se, para o estado inicial $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$, considerando um dado tempo $t_u > 0$ e o estado final \underline{x}_u , existir um sinal de entrada $\underline{w}(t)$ tal que $\underline{x}(t)$ satisfaça a $\underline{x}(t_u) = \underline{x}_u$. Caso contrário, o sistema é dito não controlável. A controlabilidade para um sistema pode ser verificada através de critérios algébricos ou geométricos.

No sistema dinâmico LIT descrito pelas EQ 2.7, o par (C,A) é dito observável se, para um dado tempo $t_u > 0$, o estado inicial $\underline{x}(0) = \underline{x}_0$ pode ser determinado a partir da observação do sinal de saída $\underline{z}(t)$ no intervalo finito de $0 \leq t \leq t_u$. Caso contrário, o sistema é dito não observável.

Os Teoremas 2.1 e 2.2 a seguir encontram-se enunciados em (ZHOU, 1998) e apresentam afirmações que dizem respeito, respectivamente, aos conceitos de controlabilidade e de observabilidade. Esses conceitos são aplicados na técnica de redução da ordem de modelos via realização balanceada, apresentada mais adiante, na Seção 2.6 deste capítulo.

Teorema 2.1 Considere o sistema LIT definido pelas EQ 2.7. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. (A,B) é controlável.
2. A matriz $L_c(t) = \int_0^\infty e^{A\tau} B B^* e^{A^*\tau} d\tau$ é positiva definida para qualquer $t > 0$.
3. A matriz de controlabilidade: $C = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B]$ tem posto linha completo n.
4. A matriz $[A - \lambda I \quad B]$ tem posto linha completo para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.
5. Dado que λ e x são, respectivamente, autovalor e um correspondente autovetor à esquerda de A, isto é, $(x^* A = x^* \lambda)$ então $x^* B \neq 0$.

Teorema 2.2 Considere o sistema LIT definido pelas EQ 2.7. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. (C,A) é observável.
2. A matriz $L_o(t) = \int_0^\infty e^{A^*\tau} C^* C e^{A\tau} d\tau$ é positiva definida para qualquer $t > 0$.

3. A matriz de observabilidade: $O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$ tem posto coluna completo n.
4. A matriz $\begin{bmatrix} A - \lambda I \\ C \end{bmatrix}$ tem posto coluna completo para todo $\lambda \in \mathbb{C}$.
5. Dado que λ e x são, respectivamente, autovalor e um correspondente autovetor à direita de A, isto é, $(A x = \lambda x)$ então $C x \neq 0$.

2.3 ESTABILIDADE SEGUNDO LYAPUNOV

Para a análise de sistemas lineares e síntese de controladores são aplicados testes de estabilidade, controlabilidade e observabilidade. Estes testes podem ser realizados de forma indireta. A fim de determinar essas características de sistemas lineares torna-se útil a aplicação da teoria de Lyapunov.

Em sistemas LIT, a estabilidade assintótica pode ser investigada através de uma simples equação. Considere o sistema contínuo:

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) \quad (2.9)$$

A condição necessária e suficiente para se obter a estabilidade assintótica na EQ 2.9 é determinada pelo fato da matriz A ter todos seus autovalores com parte real negativa, isto é, situados no semiplano s da esquerda. O único estado de equilíbrio, para o sistema da EQ 2.9, encontra-se na origem em $\underline{x}(t) = \underline{0}$.

Considere $L > 0$ uma matriz hermitiana e $V(\underline{x})$ a função de Lyapunov quadrática dada por:

$$V(\underline{x}) = \underline{x}^* L \underline{x} \quad (2.10)$$

Derivando $V(\underline{x})$ da EQ 2.10 em relação ao tempo ao longo de qualquer trajetória de $\underline{x}(t)$, encontra-se:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(\underline{x}) &= \underline{\dot{x}}^* L \underline{x} + \underline{x}^* L \dot{\underline{x}} \\
 &= (A \underline{x})^* L \underline{x} + \underline{x}^* L A \underline{x} \\
 &= \underline{x}^* A^* L \underline{x} + \underline{x}^* L A \underline{x} \\
 &= \underline{x}^* (A^* L + L A) \underline{x}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Como $V(\underline{x}) \geq 0$, para se obter a estabilidade assintótica no sistema dado pela EQ 2.9 basta que $\dot{V}(\underline{x}) < 0$, donde pela EQ 2.11:

$$A^* L + L A < 0 \tag{2.12}$$

A expressão da inequação dada por EQ 2.12 é denominada desigualdade de Lyapunov em L. Trata-se da primeira formulação de um problema em LMI. Pela desigualdade EQ 2.12 e definindo $Q > 0$, obtém-se a seguinte equação de Lyapunov:

$$A^* L + L A = -Q \tag{2.13}$$

Por CHEN (1970, p. 343), a matriz $Q = Q^* > 0$ na EQ 2.13 implica $\dot{V}(\underline{x}) = -\underline{x}^* Q \underline{x} < 0$, isto é, $V(\underline{x})$ decresce com o tempo ao longo da trajetória dada pela EQ 2.9. Assim, $V(\underline{x}) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Além disso, tem-se $V(\underline{x}) = 0$ somente no estado de equilíbrio dado por $\underline{x} = \underline{0}$. Logo, se as matrizes L e Q na EQ 2.13 forem positivas definidas, toda trajetória dada pela EQ 2.9 se aproximará do vetor nulo quando $t \rightarrow \infty$.

Por CHEN (1970, p. 341), o sistema representado pela EQ 2.9 é assintoticamente estável se e somente se para alguma matriz $Q = Q^* > 0$, a equação de Lyapunov dada por EQ 2.13 apresenta uma única solução dada por $L = L^* > 0$. Conforme (ZHOU, 1998, p. 106), a EQ 2.13 apresenta solução única dada por $L = L^* > 0$ se e somente se $\lambda_i(A) + \lambda_j^*(A) \neq 0, \forall i, j \in \square_+$, sendo A uma matriz conhecida do sistema dado pela EQ 2.9.

Algumas observações serão feitas relacionando a estabilidade do sistema da EQ 2.9 com a solução L da equação de Lyapunov na EQ 2.13, levando em consideração os conceitos de controlabilidade e observabilidade. Tais observações encontram-se descritas em (ZHOU, 1998, p. 106) e serão aqui reproduzidas através dos Lemas 2.1 e 2.2 a seguir.

Lema 2.1 Considere o sistema da EQ 2.9 estável. As seguintes afirmações são válidas:

1. $L = \int_0^{\infty} e^{A^*t} Q e^{At} dt$ é a solução da EQ 2.13.
2. $L > 0$ se $Q > 0$ e $L \geq 0$ se $Q \geq 0$.
3. Se $Q \geq 0$, então (Q,A) é observável se e somente se $L > 0$.

A equação de Lyapunov EQ 2.13 é obtida a partir da aplicação da derivada em relação ao tempo em L no item 1 do Lema 2.1. A derivada em relação ao tempo de L_0 , extraída do item 2 do Teorema 2.2, considerando o sistema da EQ 2.7 estável, dá como resultado a equação de Lyapunov EQ 2.15.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} e^{A^*t} C^* C e^{At} dt &= \left[e^{A^*t} C^* C e^{At} \right]_0^{\infty} = 0 - C^* C \\ &= A^* \int_0^{\infty} e^{A^*t} C^* C e^{At} dt + \int_0^{\infty} e^{A^*t} C^* C e^{At} dt A \end{aligned} \quad (2.14)$$

Da EQ 2.14, obtém-se: $A^* L_0 + L_0 A + C^* C = 0$ (2.15)

Além disso, do Teorema 2.2 e considerando o Lema 2.1, dado o sistema estável da EQ 2.9, o par (C,A) é observável se e somente se a solução L_0 da equação de Lyapunov EQ 2.15 for positiva definida.

De forma dual, a derivada em relação ao tempo de L_c , extraída do item 2 do Teorema 2.1, resulta na equação de Lyapunov EQ 2.17.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} e^{At} B B^* e^{A^*t} dt &= \left[e^{At} B B^* e^{A^*t} \right]_0^{\infty} = 0 - B B^* \\ &= A \int_0^{\infty} e^{At} B B^* e^{A^*t} dt + \int_0^{\infty} e^{At} B B^* e^{A^*t} dt A^* \end{aligned} \quad (2.16)$$

Da EQ 2.16, obtém-se:
$$A L_c + L_c A^* + B B^* = 0 \quad (2.17)$$

Além disso, do Teorema 2.1 e considerando o Lema 2.1, dado o sistema estável da EQ 2.9, o par (A,B) é controlável se e somente se a solução L_c da equação de Lyapunov EQ 2.17 for positiva definida.

As soluções $L_o > 0$ da EQ 2.15 e $L_c > 0$ da EQ 2.17 são denominadas, respectivamente, por Gramianos de Observabilidade e de Controlabilidade.

Enfim, a estabilidade do sistema dado pela EQ 2.9 é garantida se existir a solução $L_o > 0$ ou $L_c > 0$ da equação de Lyapunov. O Lema 2.2, a seguir, apresenta as condições para as quais é possível garantir a estabilidade do referido sistema, dada a solução L da equação de Lyapunov EQ 2.13. A demonstração deste lema encontra-se em (ZHOU, 1998, p. 107).

Lema 2.2 Considere L a solução da equação de Lyapunov EQ 2.13. As seguintes afirmações são válidas:

1. $\text{Re} \lambda_i(A) \leq 0$ se $L > 0$ e $Q \geq 0$.
2. O sistema dado pela EQ 2.9 é estável se $L > 0$ e $Q > 0$.
3. O sistema dado pela EQ 2.9 é estável se e somente se $L \geq 0$, $Q \geq 0$ e (Q,A) é tal que um sistema com matriz dinâmica dada por $A + XQ$ é estável para algum valor de X .

2.4 CÁLCULO DA NORMA H_2

Considere o sistema linear $P_{zw}(s)$ definido pela EQ 2.8. A norma L_2 de $P_{zw}(s)$ é dada por:

$$\|P_{zw}(s)\|_2 := \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}\{P_{zw}^*(j\omega)P_{zw}(j\omega)\} d\omega} \quad (2.18)$$

A norma L_2 é finita caso cada elemento da matriz (função) de transferência $P_{zw}(s)$ não apresente pólos no eixo imaginário e estes elementos sejam estritamente próprios, isto é, $P_{zw}(\infty) = [0]$ ou $D = [0]$. Um caminho alternativo para cálculo da norma L_2 se dá pela aplicação de uma integral em linha fechada. A partir da EQ 2.3 e supondo $P_{zw}(s)$ uma matriz de transferência estritamente própria, chega-se:

$$\|P_{zw}(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi j} \oint \text{tr}\{P_{zw}^-(s)P_{zw}(s)\} ds \quad (2.19)$$

onde a EQ 2.19 apresenta uma integral em linha fechada ao longo do eixo imaginário e em torno de um semicírculo de raio infinito que envolve o semiplano s da esquerda. O valor da integral sobre o semicírculo é igual a zero, pois $P_{zw}(s)$ é estritamente própria. Conforme o teorema dos resíduos (CHURCHILL, 1960), $\|P_{zw}(s)\|_2^2$ tem o mesmo valor que a soma dos resíduos de $P_{zw}^-(s)P_{zw}(s)$ nos pólos envolvidos pela trajetória definida pela EQ 2.19.

Pelo teorema de Parseval, conforme (NAGRATH, 1983, p. 678), observa-se que $\|P_{zw}(s)\|_2 = \|p_{zw}(t)\|_2$, o que permite representar a norma H_2 de $P_{zw}(s)$ no domínio do tempo por:

$$\|p_{zw}\|_2 = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}\{p_{zw}^*(t)p_{zw}(t)\} dt} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}\{p_{zw}(t)p_{zw}^*(t)\} dt} \quad (2.20)$$

onde $p_{zw}(t)$ representa a resposta ao impulso do sistema dado pela EQ 2.7.

Considerando o sistema estável da EQ 2.7, é possível determinar $p_{zw}(t)$ por meio da transformada de Laplace inversa aplicada em $P_{zw}(s)$:

$$P_{zw}(t) = L^{-1}(P_{zw}(s)) = \begin{cases} Ce^{At} B, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

Do item 2, respectivamente, dos Teoremas 2.2 e 2.1 e aplicando a EQ 2.21 na EQ 2.20, obtém-se:

$$\begin{aligned} \|P_{zw}(s)\|_2^2 &= \int_0^\infty \text{tr}[B^* e^{A^* t} C^* C e^{At} B] dt = \int_0^\infty \text{tr}[C e^{At} B B^* e^{A^* t} C^*] dt \\ &= \text{tr} \left[B^* \left(\int_0^\infty e^{A^* t} C^* C e^{At} dt \right) B \right] = \text{tr} \left[C \left(\int_0^\infty e^{At} B B^* e^{A^* t} dt \right) C^* \right] \\ &= \text{tr} [B^* L_o B] = \text{tr} [C L_c C^*] \end{aligned} \quad (2.22)$$

Em (GAHINET, 1995), encontra-se uma forma de calcular a norma H_2 por meio de um problema de minimização com o uso de LMI como restrição, de modo que:

$$\|P_{zw}(s)\|_2^2 = \min_{L_o, v^2} [\text{tr}(B^* L_o B)] \quad (2.23)$$

$$\text{sujeito a: } A^* L_o + L_o A + C^* C < 0$$

$$\text{tr}(B^* L_o B) < v^2$$

$$\|P_{zw}(s)\|_2^2 = \min_{L_c, v^2} [\text{tr}(C L_c C^*)] \quad (2.24)$$

$$\text{sujeito a: } A L_c + L_c A^* + B B^* < 0$$

$$\text{tr}(C L_c C^*) < v^2$$

Assim, a solução para $\|P_{zw}(s)\|_2^2$ é dada pelo valor mínimo global de um problema de otimização com restrição em LMI. Para facilitar a montagem de um algoritmo, o problema dado pela EQ 2.24 é transformado no problema apresentado pela EQ 2.25. Pela aplicação do complemento de Schur (ver ANEXO 1) na EQ 2.26, obtém-se a variável escalar F tal que $F > C L_c C^*$, sendo a matriz simétrica e variável $L_c > 0$.

$$\|P_{zw}(s)\|_2^2 = \min_{L_c, v^2} [\text{tr}(F)] \quad (2.25)$$

$$\text{sujeito a: } AL_c + L_cA^* + BB^* < 0$$

$$\text{tr}(F) < v^2$$

$$\begin{bmatrix} F & CL_c \\ L_cC^* & L_c \end{bmatrix} > 0 \quad (2.26)$$

De forma dual, o problema dado pela EQ 2.23 é transformado no problema apresentado pela EQ 2.27. Pela aplicação do complemento de Schur na EQ 2.28, obtém-se a variável escalar F tal que $F > B^*L_oB$, sendo a matriz simétrica e variável $L_o > 0$.

$$\|P_{zw}(s)\|_2^2 = \min_{L_o, v^2} [\text{tr}(F)] \quad (2.27)$$

$$\text{sujeito a: } A^*L_o + L_oA + C^*C < 0$$

$$\text{tr}(F) < v^2$$

$$\begin{bmatrix} F & B^*L_o \\ L_oB & L_o \end{bmatrix} > 0 \quad (2.28)$$

Para ambos os casos obtém-se um problema de minimização convexo desde que o traço de F seja linear nas variáveis de decisão (entradas livres de L_c e F ou L_o e F).

2.5 CÁLCULO DA NORMA H_∞

A definição da norma H_∞ é dada por:

$$\|P_{zw}(s)\|_\infty := \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}[P_{zw}(j\omega)] \quad (2.29)$$

onde o operador $\bar{\sigma}(\cdot)$ indica o máximo valor singular. No caso de uma função de transferência SISO, a interpretação para a norma H_∞ de $P_{zw}(s)$ é a distância no plano complexo da origem ao ponto mais afastado do traçado de $P_{zw}(j\omega)$ no diagrama de Nyquist. Também pode ser representada pelo valor de pico do diagrama de Bode de $|P_{zw}(j\omega)|$.

É possível estimar $\|P_{zw}\|_\infty$ por um conjunto de frequências $\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M)$ com $M \in \mathbb{N}_+$. Neste caso, uma estimativa para $\|P_{zw}\|_\infty$ é dada por:

$$\|P_{zw}\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq M} \bar{\sigma}(P_{zw}(j\omega_k)) \quad (2.30)$$

Uma desvantagem encontrada neste método é a imprecisão da estimativa. Além disso, não deve ser raro o caso de existência de um pico no diagrama de Bode entre duas frequências arbitrárias quaisquer, gerando-se um erro grosseiro.

Tendo em vista o estabelecimento de limitantes para o cálculo da norma H_∞ de uma FT, torna-se interessante mencionar conceitos relativos ao cálculo da norma de Hankel e de seus valores singulares. Estes limitantes são empregados no algoritmo de bisseção de intervalos, a ser visto mais adiante. Além disso, este assunto também diz respeito à redução de ordem de modelos, ferramenta indispensável a ser utilizada nos exemplos do Capítulo 4.

Os valores singulares de Hankel e sua norma para um dado sistema estável da EQ 2.7, onde a função (matriz) de transferência é estritamente própria, podem ser calculados respectivamente por:

$$\sigma_i^H[A] := \sqrt{\lambda_i(L_c L_o)} \quad (2.31)$$

$$\|P_{zw}(s)\|_H := \lambda_{\max}^{1/2}(L_c L_o) \quad (2.32)$$

O Lema 2.3 descrito em (ZHOU et alii, 1996) e apresentado a seguir, cuja demonstração encontra-se em (ADES, 1999, p. 15), apresenta subsídios para o cálculo da norma H_∞ .

Lema 2.3 Considere uma realização de $P_{zw}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \in \text{RL}_\infty$, um escalar $\gamma > 0$ e a matriz

Hamiltoniana $H := \left[\begin{array}{cc} A + BR^{-1}D^*C & BR^{-1}B \\ -C^*(I + DR^{-1}D^*)C & -(A + BR^{-1}D^*C)^* \end{array} \right]$, onde $R = \gamma^2 I - D^*D$. As seguintes

afirmações são equivalentes:

1. $\|P_{zw}\|_\infty < \gamma$.
2. $\bar{\sigma}(D) < \gamma$ e H não possui autovalores sobre o eixo imaginário.

Conhecida uma realização de $P_{zw}(s)$ na EQ 2.8 e fixando um valor $\gamma > 0$, é possível garantir que a norma H_∞ de $P_{zw}(s)$ seja inferior a γ , se o máximo valor singular da matriz D for menor que γ e na matriz Hamiltoniana H não forem encontrados autovalores sobre o eixo imaginário.

De acordo com SAMBLANCAT (1991), é possível determinar, respectivamente, um limitante inferior γ_{\min} e outro superior γ_{\max} para $\|P_{zw}(s)\|_\infty$ por meio das seguintes equações:

$$\gamma_{\min} = \max \left\{ \bar{\sigma}(D), \|P_{zw}(s)\|_H \right\} \leq \|P_{zw}(s)\|_\infty \quad (2.33)$$

$$\gamma_{\max} = \bar{\sigma}(D) + 2(\sigma_1^H + \sigma_2^H + \dots + \sigma_N^H) \geq \|P_{zw}(s)\|_\infty \quad (2.34)$$

onde são levados em conta somente os N valores singulares distintos de Hankel. A FIG. 2.1 apresenta o fluxograma do algoritmo para o cálculo da norma H_∞ .

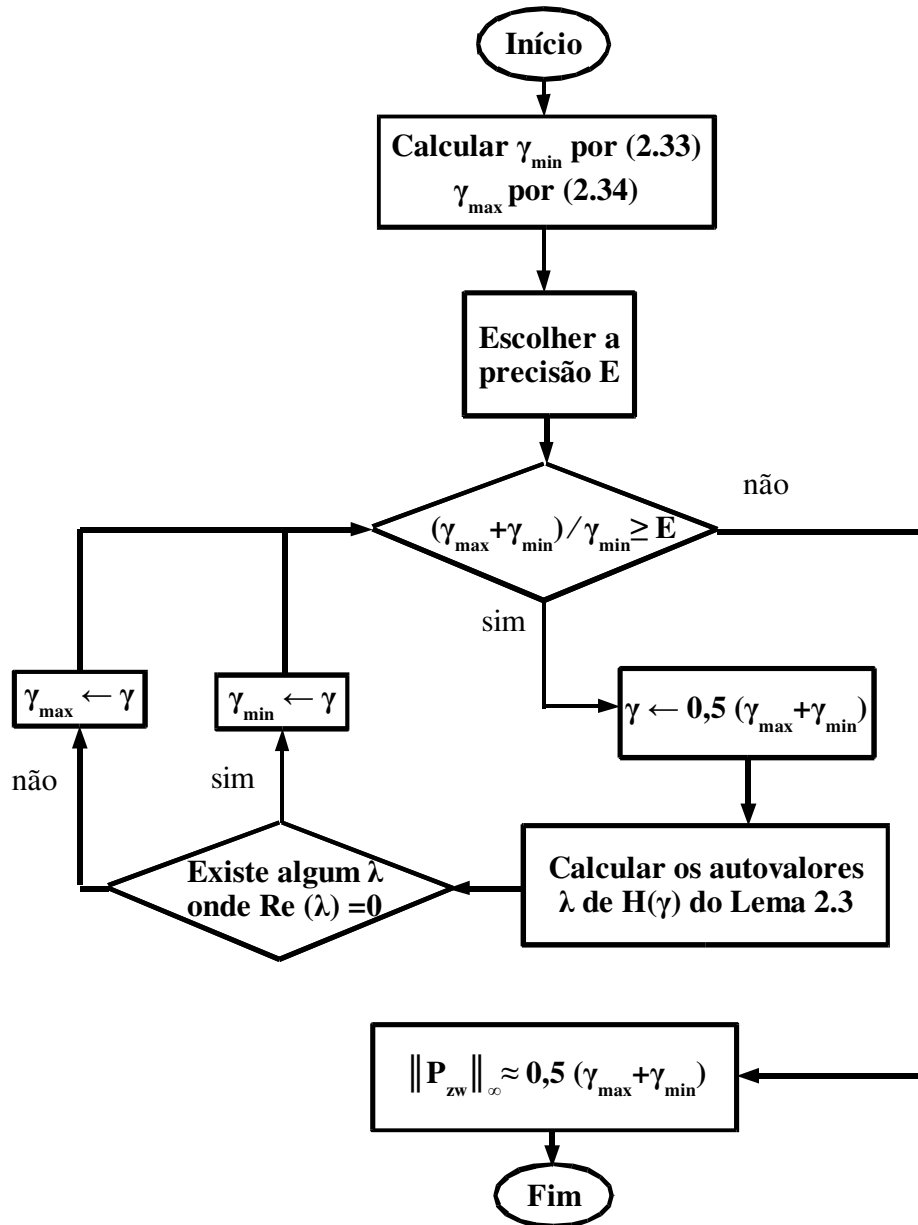


FIG. 2.1 Fluxograma do algoritmo de bisseção para o cálculo da norma H_{∞} .

A frequência exata onde ocorre o valor de pico do diagrama de Bode para uma função de transferência SISO pode ser calculada pelo Lema 2.4, reproduzido a seguir, conforme descrito em (ADES, 1999). Este cálculo é de fundamental importância pois viabiliza o cálculo de um subgradiente, a ser discutido posteriormente, que por sua vez permite a utilização de um método numérico de otimização da classe quase Newton nos métodos EBPE e CGO.

Lema 2.4 Considere $\hat{\omega}_0$ a frequência em que ocorre o supremo na EQ 2.29. Escolhe-se uma precisão E para a determinação da norma H_∞ da FT $P_{zw}(s)$ e em seguida executa-se o algoritmo mostrado na FIG. 2.1. Representa-se por $\gamma_{\min f}$ e $\gamma_{\max f}$ os valores finais de γ_{\min} e γ_{\max} gerados, respectivamente. Uma aproximação ω_0 de $\hat{\omega}_0$ é obtida por uma das seguintes fórmulas:

$$\omega_0 = |j\omega_0| = \left| \lambda \left[H \left(\frac{\gamma_{\min f} + \gamma_{\max f}}{2} \right) \right] \right| \quad (2.35)$$

$$\omega_0 = |j\omega_0| = \left| \lambda [H(\gamma_{\min f})] \right| \quad (2.36)$$

onde $\lambda[\cdot]$ representa o autovalor do argumento sobre o eixo imaginário. Caso o mencionado autovalor não exista na EQ 2.35, utiliza-se a fórmula da EQ 2.36. Além disso, quando $E \rightarrow 0 \Rightarrow \omega_0 \rightarrow \hat{\omega}_0$.

O Lema 2.5 a seguir, desenvolvido em (OLIVEIRA, 1999), apresenta uma forma de cálculo da norma H_∞ com uso de equações de Riccati e LMIs, através de comparação entre um índice γ e a matriz simétrica positiva definida L . Neste caso, o valor mínimo resultante da comparação é o valor da norma H_∞ .

Lema 2.5 Considere uma realização de $P_{zw}(s)$ da EQ 2.8. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $\|P_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$.
2. $\bar{\sigma}(D) < \gamma$ e existe uma matriz $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L = L^* > 0$ de modo que:

$$A^*L + LA + (LB + C^*D)(\gamma^2 I - D^*D)^{-1}(B^*L + D^*C) + C^*C = 0 \quad (2.37)$$

3. $\bar{\sigma}(D) < \gamma$ e existe uma matriz $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $L = L^* > 0$ de modo que:

$$AL + LA^* + (LC^* + BD^*)(\gamma^2 I - DD^*)^{-1}(CL + DB^*) + BB^* = 0 \quad (2.38)$$

4. Existe uma matriz $L = L^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $L > 0$, de modo que:

$$\begin{bmatrix} A^*L+LA & LB & C^* \\ B^*L & -\gamma^2I & D^* \\ C & D & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.39)$$

5. Existe uma matriz $L = L^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $L > 0$, de modo que:

$$\begin{bmatrix} AL+LA^* & B & LC^* \\ B^* & -I & D^* \\ CL & D & -\gamma^2I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.40)$$

A norma H_∞ pode ser calculada segundo este lema das seguintes formas:

$$\begin{aligned} \|P_{zw}(s)\|_\infty &= \min_L \gamma \\ \text{sujeito a } &\begin{bmatrix} A^*L+LA & LB & C^* \\ B^*L & -\gamma I & D^* \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \\ &L > 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \|P_{zw}(s)\|_\infty &= \min_L \gamma \\ \text{sujeito a } &\begin{bmatrix} AL+LA^* & B & LC^* \\ B^* & -\gamma I & D^* \\ CL & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \\ &L > 0 \end{aligned} \quad (2.42)$$

2.6 REDUÇÃO DE ORDEM DE MODELOS

A análise e síntese de controladores para sistemas dinâmicos torna-se mais fácil após a redução de ordem do modelo utilizado. A redução permite também maior facilidade na

implementação prática dos controladores obtidos. Considera-se, nesta seção, o método para redução de ordem por realização balanceada.

O problema aqui discutido pode ser enunciado da seguinte forma: dado um modelo $P_{zw}(s)$ de ordem n , deseja-se encontrar um modelo $\widehat{G}_{zw}(s)$ de ordem reduzida $g < n$ tal que:

$$\|P_{zw} - \widehat{G}_{zw}\|_{\infty} = \inf_{\text{ordem}(G_{zw})=g} \|P_{zw} - G_{zw}\|_{\infty} \quad (2.43)$$

Considerando a realização da EQ 2.8, a realização mínima é encontrada pelo cancelamento de pólos e zeros idênticos.

De acordo com (ZHOU, 1998, p. 107), considere uma realização do sistema $P_{zw}(s)$ conforme a EQ 2.8, não necessariamente estável, e uma matriz simétrica L_c tal que:

$$L_c = L_c^* = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

com P não-singular, em conformidade com a equação de Lyapunov (EQ 2.17), onde as matrizes A , B , C e D são particionadas de maneira compatível com L_c como:

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right] \quad (2.45)$$

De acordo com ZHOU (1998), $\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right]$ é também uma realização de $P_{zw}(s)$. Além

disso, se A_{11} possui todos os autovalores com parte real negativa, o sistema obtido por esta realização é estável e o par (A_{11}, B_1) é controlável.

De forma dual, de acordo com (ZHOU, 1998, p. 108), considere uma realização do sistema $P_{zw}(s)$ conforme a EQ 2.8, não necessariamente estável, e uma matriz simétrica L_o tal que:

$$L_o = L_o^* = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

com S não-singular, em conformidade com a equação de Lyapunov (EQ 2.15), onde as matrizes A , B , C e D estão, analogamente à realização da EQ 2.45, particionadas de maneira compatível com L_o . Desta forma, de acordo com ZHOU (1998), $\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right]$ é também uma realização de $P_{zw}(s)$ e, por dualidade, se A_{11} possui todos os autovalores com parte real negativa o sistema obtido por esta realização é estável e o par (C_1, A_{11}) é observável.

Para se obter uma realização mínima, basta que sejam eliminados os estados não controláveis e os não observáveis de uma realização não mínima, isto é, deve-se eliminar todos os estados referentes ao bloco diagonal nulo nos gramianos de controlabilidade da EQ 2.44 e de observabilidade da EQ 2.46. A aplicação desses resultados gera um modelo com ordem inferior cuja realização é mínima. A resposta em frequência permanece inalterada.

Uma vez obtida a realização mínima, caso seja de interesse reduzir a ordem desse modelo, é possível eliminar os estados “pouco controláveis” e “pouco observáveis”. Para isso, deve-se levar em conta simultaneamente os gramianos L_c e L_o , o que motiva a introdução do conceito de realização balanceada. Assim, uma aproximação de $P_{zw}(s)$ poderá ser obtida via realização balanceada, através da eliminação dos estados pouco observáveis e pouco controláveis.

Considere uma transformação de similaridade T , onde T é uma matriz não-singular de modo que: $\hat{x} = T x$. A partir desta transformação obtém-se a seguinte realização de $P_{zw}(s)$:

$$P_{zw}(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} TAT^{-1} & TB \\ \hline CT^{-1} & D \end{array} \right] \quad (2.47)$$

Pré-multiplicando e pós-multiplicando, respectivamente, por T e T^* a expressão dada pela EQ 2.17 encontra-se o novo gramiano de controlabilidade:

$$\begin{aligned} T(AL_c + L_cA^* + BB^*)T^* &= 0 \\ T AL_c T^* + T L_c A^* T^* + T B B^* T^* &= 0 \\ T A T^{-1} T L_c T^* + T L_c T^* (T^*)^{-1} A^* T^* + T B B^* T^* &= 0 \\ \hat{A} T L_c T^* + T L_c T^* \hat{A}^* + \hat{B} \hat{B}^* &= 0 \\ \hat{A} \hat{L}_c + \hat{L}_c \hat{A}^* + \hat{B} \hat{B}^* &= 0 \\ \text{Assim} \quad \hat{L}_c &= T L_c T^* \end{aligned} \quad (2.48)$$

Por analogia, gera-se o novo gramiano de observabilidade pré-multiplicando e pós-multiplicando a expressão dada pela EQ 2.15, respectivamente, por $(T^{-1})^*$ e T^{-1} , de modo que:

$$\hat{L}_o = (T^{-1})^* L_o T^{-1} \quad (2.49)$$

$$\text{Como} \quad \hat{L}_c \hat{L}_o = T L_c L_o T^{-1} \quad (2.50)$$

pode-se observar que os autovalores do produto dos gramianos são invariantes com relação a transformação de similaridade. Isoladamente, estes gramianos não são invariantes conforme mostra a EQ 2.48 e a EQ 2.49. É possível determinar uma matriz particular T que diagonaliza $L_c L_o$ através de transformação de similaridade:

$$T L_c L_o T^{-1} = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (2.51)$$

Embora os autovetores de $L_c L_o$ não sejam únicos, no caso de realização mínima, pode-se escolher T de modo que:

$$\hat{L}_c = T L_c T^* = \Sigma \quad (2.52)$$

$$\hat{L}_o = (T^{-1})^* L_o T^{-1} = \Sigma \quad (2.53)$$

onde $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^H, \sigma_2^H, \dots, \sigma_n^H)$ e $\Sigma^2 = \Lambda$. Nomeia-se esta realização com os gramianos de controlabilidade e observabilidade $\hat{L}_c = \hat{L}_o = \Sigma$ de realização balanceada. Os números escalares $\sigma_1^H \geq \sigma_2^H \geq \dots \geq \sigma_N^H \geq 0$ são denominados valores singulares de Hankel do sistema, conforme a EQ 2.31.

O Teorema 2.3 a seguir diz respeito ao cálculo de uma realização balanceada e encontra-se demonstrado em (ZHOU, 1998, p. 120). Este teorema apresenta a base teórica para a técnica de redução de ordem de modelos via realização balanceada.

Teorema 2.3 Considere uma realização balanceada de $P_{zw}(s) \in RH_\infty$ dada por:

$$P_{zw}(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right], \text{ onde o gramiano é dado por: } \Sigma = \text{diag}(\Sigma_1, \Sigma_2)$$

com: $\hat{L}_c = \hat{L}_o$

$$\Sigma_1 = \text{diag}(\sigma_1^H I_{s_1}, \sigma_2^H I_{s_2}, \dots, \sigma_r^H I_{s_r}) \quad (2.54)$$

$$\Sigma_2 = \text{diag}(\sigma_{r+1}^H I_{s_{r+1}}, \sigma_{r+2}^H I_{s_{r+2}}, \dots, \sigma_N^H I_{s_N}) \quad (2.55)$$

$$\sigma_1^H \geq \sigma_2^H \geq \dots \geq \sigma_N^H \geq 0 \quad (2.56)$$

onde σ_i^H tem multiplicidade s_i , $i = 1, 2, \dots, N$ e $s_1 + s_2 + \dots + s_N = n$. O sistema truncado na EQ 2.57 é balanceado e assintoticamente estável.

$$G_{zw}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right] \quad (2.57)$$

$$\text{Assim} \quad \left\| P_{zw}(s) - G_{zw}(s) \right\|_\infty \leq 2(\sigma_{r+1}^H + \sigma_{r+2}^H + \dots + \sigma_N^H) \quad (2.58)$$

Sendo a igualdade encontrada em $r = N - 1$, dada por:

$$\left\| P_{zw}(s) - \check{G}_{zw}(s) \right\|_{\infty} = 2\sigma_N^H \quad (2.59)$$

De acordo com o Teorema 2.3, o modelo de ordem reduzida gera um erro dado por $\varepsilon = \left\| P_{zw}(s) - G_{zw}(s) \right\|_{\infty}$. Por inspeção da EQ 2.58 observa-se um limitante superior para o valor de ε . O erro então varia entre zero e o limitante superior. O valor do limitante do erro aumenta com o número de estados eliminados. No caso da eliminação de somente um estado, a EQ 2.59 mostra que o erro será dado pelo dobro do menor valor singular de Hankel.

3 PROBLEMA DE CONTROLE H_2/H_∞

3.1 INTRODUÇÃO

Durante a década de 70 desenvolveu-se o problema de controle ótimo H_2 , a fim de melhorar o desempenho dos sistemas de controle. Limitações existentes em relação aos distúrbios que surgem no modelo adotado conduziram às condições em que se considera o pior caso, surgindo neste contexto a abordagem da norma H_∞ , com vista a garantir a estabilidade do sistema.

O estudo em que se considera ao mesmo tempo a satisfação de objetivos de desempenho com robustez em estabilidade recai no denominado “Problema de Controle H_2/H_∞ ”, onde se leva em conta simultaneamente as normas H_2 e H_∞ . De forma mais específica, o problema tratado é o de minimização da norma H_2 (critério de desempenho) de uma matriz (função) de transferência sujeita à restrição na norma H_∞ aplicada em outra matriz (função) de transferência escolhida de forma conveniente para garantir a robustez em estabilidade.

O formato padrão, a ser estudado detalhadamente nas Seções 3.2 e 3.3 e utilizado para resolução dos problemas de controle H_2/H_∞ no Capítulo 4 desta dissertação, é dado por:

$$\begin{aligned} \min_{K(s) \in RH_\infty^+} J_2(K(s)) &= \|A(s) + B(s)K(s)\|_2^2 & (3.1) \\ \text{sujeito a } J_\infty(K(s)) &= \|C(s)K(s) + D(s)\|_\infty \leq \gamma \end{aligned}$$

onde

$$\gamma \geq \gamma_0 = \inf_{K(s) \in RH_\infty^+} \|C(s)K(s) + D(s)\|_\infty$$

O desenvolvimento dos métodos EBPE e CGO para o cálculo de soluções aproximadas do problema de controle H_2/H_∞ , apresentados na Seção 3.4 deste capítulo, são baseados no método

de Galerkin que consiste em, fornecida uma base para o espaço solução do problema original, calcular a solução projetada no subespaço gerado pelos “n” primeiros vetores, a partir do ajuste de seus coeficientes na série truncada. Surge deste modo, um novo formato para o problema original da EQ 3.1 que passa a ser denominado problema aproximado. Neste novo formato, o espaço solução passa a ser de dimensão finita e limitado à expansão dos vetores que o compõem. A medida que o número de vetores na série truncada aumenta, a solução deste novo problema converge para a solução do problema original, conforme (ADES, 1999). Isto significa que os espaços solução gerados de dimensão finita são subespaços do problema original e que a medida que o número de vetores aumenta, esses espaços se expandem tendendo ao espaço solução do problema original. O problema aproximado, abordado neste trabalho, consiste na adaptação do método de Galerkin a partir da EQ 3.1 como segue:

$$\underset{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}}{\text{minimizar}} \quad J_2(\mathbf{K}) \quad (3.2)$$

$$\text{sujeito a:} \quad J_\infty(\mathbf{K}) \leq \gamma$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}(s) = \sum_{m=0}^{n-1} \alpha_m F_m(s) ; \mathbf{K} \in \Omega$$

onde a base truncada é formada pelas funções: $F_0(s), F_1(s), \dots, F_{n-1}(s)$ e as variáveis de projeto do problema de minimização da EQ 3.2 são $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$ com $n \in \mathbb{R}_+^0$. O resultado apresentado em (ADES, 1999), mostra que este novo problema de otimização da EQ 3.2 permanece estritamente convexo. Suas restrições formam conjuntos fechados e convexos.

3.2 PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO H_2

3.2.1 O PROBLEMA DO SERVOMECANISMO

O problema discutido nesta seção foi tratado em (SILVEIRA e CORRÊA, 1992). Na FIG. 3.1 apresenta-se o diagrama do sistema considerado. As equações que relacionam os vários sinais são:

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & \bar{P}_1 \\ P_2 & \bar{P}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(s) \\ w(s) \end{bmatrix} \text{ e } u(s) = C \begin{bmatrix} r(s) \\ y(s) - v(s) \end{bmatrix} + k(s) \quad (3.3)$$

$$C = [C_1 \quad -C_2] \quad (3.4)$$

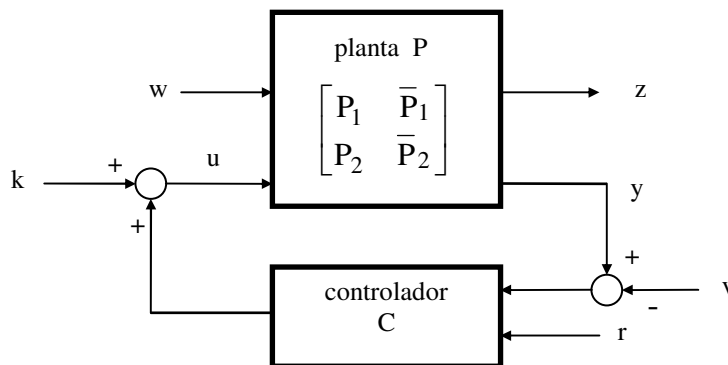


FIG. 3.1 Sistema realimentado.

onde os sinais r , u , z , y , w , k e v designam, respectivamente, o sinal de referência, a entrada da planta, a saída controlada, o sinal de medida, um distúrbio na planta, um distúrbio de entrada e o ruído do sensor de medida. Cada elemento da planta P e do controlador C são funções de transferência reais-rationais, próprias e com coeficientes constantes, isto é, C_1 , C_2 , P_1 , P_2 , \bar{P}_1 e $\bar{P}_2 \in R_p$.

O objetivo deste problema é encontrar todos os controladores C tais que a planta P seja estabilizada internamente, a saída controlada z rastreie assintoticamente o sinal de referência r e os sinais de distúrbios w e v sejam rejeitados assintoticamente em z . Para facilitar o desenvolvimento, o sinal k somente será considerado no que diz respeito à estabilidade. Na realidade, pode-se considerá-lo implicitamente por meio do distúrbio w .

A partir do sistema em malha fechada, utilizando as EQ 3.3 e EQ 3.4, e com o objetivo de tornar as FTs afins em uma variável L , utiliza-se a seguinte mudança de variável introduzida por (ZAMES, 1981) e obtida através do cálculo para o sistema em malha fechada:

$$L := (I + C_2 P_2)^{-1} \text{ sendo } (I + C_2 P_2) \text{ bipr\u00f3pria} \quad (3.5)$$

A matriz de transfer\u00eancia em malha fechada do sistema realimentado da FIG. 3.1 \u00e9 obtida, a partir de manipula\u00e7\u00e3o alg\u00e9brica das EQ 3.3 e EQ 3.5. Para facilitar sua representa\u00e7\u00e3o omite-se a depend\u00eancia em “ s ”, obtendo desta forma:

$$\begin{bmatrix} z \\ u \\ y \end{bmatrix} = F(P, C) \begin{bmatrix} r \\ w \\ k \\ v \end{bmatrix}$$

onde

$$F(P, C) = \begin{bmatrix} P_1 L C_1 & \bar{P}_1 - P_1 L C_2 \bar{P}_2 & P_1 (I - L C_2 P_2) & P_1 L C_2 \\ L C_1 & -L C_2 \bar{P}_2 & (I - L C_2 P_2) & L C_2 \\ P_2 L C_1 & \bar{P}_2 - P_2 L C_2 \bar{P}_2 & P_2 (I - L C_2 P_2) & P_2 L C_2 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Conforme (SILVEIRA e CORR\u00caA, 1992), o erro e imposto ao servomecanismo devido aos problemas de rastreamento assint\u00f3tico e rejei\u00e7\u00e3o de dist\u00fcrbios \u00e9 dado por:

$$e = r - z = (I - P_1 L C_1) r - (\bar{P}_1 - P_1 L C_2 \bar{P}_2) w - (P_1 L C_2) v \quad (3.7)$$

Da EQ 3.6 com $P \in R_p$, a matriz de transferência $F(P,C)$ é estável se e somente se $\det(I + C_2(\infty)P_2(\infty)) \neq 0$ e se todos os seus elementos são funções reais-rationais, próprias e sem pólos no semiplano s da direita e sobre o eixo imaginário, ou seja, se $F(P,C)$ pertence ao conjunto S . Se $F(P,C) \notin S$, isto é, P possui pólos no semiplano s da direita então o problema de encontrar C tal que $F(P,C)$ seja estável fica reduzido ao de escolher $L \in S$ de modo que os pólos instáveis de P sejam cancelados, através da aplicação de fatoração coprima na matriz de transferência com os elementos pertencentes ao conjunto S . A fatoração coprima em questão é aplicada em P_2 do seguinte modo:

$$P_2 = N_2 D_2^{-1} = \tilde{D}_2^{-1} \tilde{N}_2 \quad (3.8)$$

Pela identidade de Bezout generalizada existem $X_0, Y_0, \tilde{X}_0, \tilde{Y}_0$ em S , tais que (VIDYASAGAR, 1985):

$$\begin{bmatrix} Y_0 & X_0 \\ -\tilde{N}_2 & \tilde{D}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_2 & -\tilde{X}_0 \\ N_2 & \tilde{Y}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_2 & -\tilde{X}_0 \\ N_2 & \tilde{Y}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_0 & X_0 \\ -\tilde{N}_2 & \tilde{D}_2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Da EQ 3.8 e da identidade dada pela EQ 3.9 obtém-se o conjunto de controladores que estabilizam $F(P,C)$, dado pela EQ 3.10, e todos os valores de $L \in S$ da EQ 3.5 tais que os elementos de $F(P,C)$ pertençam a S :

$$[C_1 \quad C_2] = (Y_0 + K\tilde{N}_2)^{-1} [R \quad (X_0 - K\tilde{D}_2)] \quad (3.10)$$

onde as variáveis K e R são livres e devem, necessariamente, pertencer a S . Outra condição necessária é que $D_2(Y_0 + K\tilde{N}_2)$ seja biprópria, onde $(X_0, Y_0) \in S \times S$ é uma solução particular da Identidade de Bezout.

Conhecido os valores de $L \in S$ tais que os elementos de $F(P,C)$ pertencem a S , torna-se possível a obtenção de uma nova matriz de transferência, dada pela EQ 3.11, por meio da aplicação de uma parametrização. O procedimento detalhado para obtenção tanto dos

controladores estabilizantes da EQ 3.10 quanto da matriz de transferência em questão encontra-se desenvolvido em (SILVEIRA e CORRÊA, 1992):

$$\begin{bmatrix} z \\ u \\ y \end{bmatrix} = F(R, K) \begin{bmatrix} r \\ w \\ k \\ v \end{bmatrix}$$

$$F(R, K) = \begin{bmatrix} Q_a R & Q_a K Q_b + Q_c & Q_a (Y_0 + K \tilde{N}_2) & Q_a (X_0 - K \tilde{D}_2) \\ D_2 R & -(\tilde{X}_0 - D_2 K) Q_b & D_2 (Y_0 + K \tilde{N}_2) & D_2 (X_0 - K \tilde{D}_2) \\ N_2 R & (\tilde{Y}_0 + N_2 K) Q_b & N_2 (Y_0 + K \tilde{N}_2) & N_2 (X_0 - K \tilde{D}_2) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

onde Q_a, Q_b e Q_c são dados, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} Q_a &:= P_1 D_2 \\ Q_b &:= \tilde{D}_2 \bar{P}_2 \\ Q_c &= \bar{P}_1 - P_1 D_2 X_0 \bar{P}_2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Os objetivos a serem alcançados são: rastrear assintoticamente, através do sinal de saída z , o sinal de referência r e rejeitar assintoticamente os sinais de distúrbio w e de ruído v para o sinal de saída z . Pela EQ 3.11, a resolução dos problemas de rastreamento assintótico e de rejeição assintótica parte, respectivamente, de R e K .

A matriz $F(R, K)$ pode ser reparametrizada por parâmetros livres como K_1 e K_2 , ambos necessariamente pertencentes ao conjunto S . O uso de controladores com dois graus de liberdade possibilita a separação dos problemas de rastreamento assintótico e de rejeição de distúrbios e ruídos. O primeiro relaciona-se ao parâmetro $R(K_1)$, enquanto o segundo a $K(K_2)$. Para facilitar a notação, utiliza-se as seguintes mudanças de variáveis, conhecidas como parâmetros de Youla:

$$Q_1 := L C_1 \text{ e } Q_2 := L C_2 \quad (3.13)$$

A resolução de um problema de controle ótimo H_2 depende essencialmente dos objetivos de desempenho que o sistema deve satisfazer. Para tanto, define-se um funcional de custo quadrático composto por um somatório de termos, cada qual representando um determinado objetivo de desempenho.

Conforme (SILVEIRA e CORRÊA, 1992), um possível funcional de custo quadrático é obtido por meio do erro e na EQ 3.7, em função dos parâmetros de Youla dados pelas EQ 3.13. O referido funcional é dado por:

$$J_{eu} = \frac{1}{2\pi} \text{tr} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [(I - P_1 Q_1) \phi_r (I - P_1 Q_1)^* + (\bar{P}_1 - P_1 Q_2 \bar{P}_2) \phi_w (\bar{P}_1 - P_1 Q_2 \bar{P}_2)^* + (P_1 Q_2) \phi_v (P_1 Q_2)^* + \rho_u Q_1 \phi_r Q_1^* + \rho_u (Q_2 \bar{P}_2) \phi_w (Q_2 \bar{P}_2)^* + \rho_u Q_2 \phi_v Q_2^*] \Big|_{s=j\omega} d\omega \right\} \quad (3.14)$$

onde ϕ_r , ϕ_w e ϕ_v são funções reais-rationais, para-hermitianas, estritamente próprias e não negativas definidas e representam filtros em caso de sinais determinísticos ou ainda, densidades espectrais em caso de sinais estocásticos de r , w e v , respectivamente. Os três primeiros termos de J_{eu} penalizam os erros de rastreamento causado por r e de rejeição causados por w e v . Os três últimos evitam a saturação da entrada u da planta, a partir de r , w e v .

O funcional de custo também pode ser definido em função de K_i com $i = 1, 2$. Desta forma, os problemas de controle ótimo H_2 resultantes são:

$$\min_{K_i \in S} J_i(K_i) \quad (3.15)$$

Nesta dissertação o funcional de custo utilizado para resolução de problemas pelos métodos EBPE e CGO será o mesmo que em (ADES, 1999). Esse funcional, $J_2(K)$, será reproduzido a seguir, tendo em vista a comparação com os resultados a serem obtidos a partir do método LMI.

$$J_2(K) = J_w^N(K) + \rho_k J_k^N(K) + \rho_v J_v^N(K) \quad (3.16)$$

com

$$J_w^N(\mathbf{K}) = \left\| (Q_c + Q_a \mathbf{K} Q_b) \phi_{we} \right\|_2^2 + \rho_w^u \left\| (\tilde{X}_0 - D_2 \mathbf{K}) Q_b \phi_{we} \right\|_2^2$$

$$J_k^N(\mathbf{K}) = \left\| Q_a (Y_0 + \mathbf{K} \tilde{N}_2) \phi_{ke} \right\|_2^2 + \rho_k^u \left\| D_2 (Y_0 + \mathbf{K} \tilde{N}_2) \phi_{ke} \right\|_2^2$$

$$J_v^N(\mathbf{K}) = \left\| Q_a (X_0 - \mathbf{K} \tilde{D}_2) \phi_{ve} \right\|_2^2 + \rho_v^u \left\| D_2 (X_0 - \mathbf{K} \tilde{D}_2) \phi_{ve} \right\|_2^2$$

onde $\phi_{\alpha e}$ é o fator espectral estável de ϕ_α ($\alpha = w, k, v$). Além disso, ρ_w^u , ρ_k^u e ρ_v^u são constantes pertencentes a \mathbb{R}_+ .

Para facilitar o cálculo da norma H_2 , o funcional de custo dado pela EQ 3.16 pode ser reagrupado, conforme a EQ 3.1, do seguinte modo:

$$J_2(\mathbf{K}(s)) = \left\| A(s) + B(s) \mathbf{K}(s) \right\|_2^2 \quad (3.17)$$

onde $A(s)$ e $B(s)$ resultam da aplicação do produto interno e suas propriedades nos termos da EQ 3.16.

3.2.2 SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO H_2

Conforme a EQ 3.17, o problema de controle ótimo H_2 recai no formato $\left\| A + B \mathbf{K} \right\|_2^2$, já omitida a dependência em “s”, onde A é uma função real-racional, estritamente própria e estável e B é uma função real-racional, biprópria e estável. A partir do desenvolvimento da EQ 3.18, obtém-se o formato mais adequado para manipulação na EQ 3.19:

$$J_2(\mathbf{K}) = \left\| A + B \mathbf{K} \right\|_2^2 = \langle A + B \mathbf{K}, A + B \mathbf{K} \rangle_2 \quad (3.18)$$

$$= \langle A, A \rangle_2 + 2 \langle A, B \mathbf{K} \rangle_2 + \langle B \mathbf{K}, B \mathbf{K} \rangle_2$$

$$= \langle A, A \rangle_2 + 2 \langle B^* A, \mathbf{K} \rangle_2 + \langle B^* B \mathbf{K}, \mathbf{K} \rangle_2 \quad (3.19)$$

Para dar continuidade no desenvolvimento desta solução torna-se necessário definir a operação de fatoração espectral. Considere uma função $U = B^*B$, positiva definida em $j\omega$, biprópria e pára-hermitiana ($U^* = U$). A fatoração espectral consiste na seguinte operação:

$$U = B^*B = \phi^*\phi \quad (3.20)$$

onde ϕ (ϕ^*) é uma função real-racional, biprópria com pólos e zeros estáveis (instáveis).

Retornando ao problema de controle ótimo H_2 e fazendo $K = 0$ na EQ 3.18, encontra-se:

$$J(0) = \|A\|_2^2 = \langle A, A \rangle_2 \quad (3.21)$$

o que permite escrever a partir da EQ 3.19 e da EQ 3.20:

$$\|A + BK\|_2^2 = J(0) + 2\langle B^*A, K \rangle_2 + \langle \phi^*\phi K, K \rangle_2 \quad (3.22)$$

$$= J(0) + 2\langle (\phi^*)^{-1}B^*A, \phi K \rangle_2 + \langle \phi K, \phi K \rangle_2$$

$$= J(0) + 2\langle [(\phi^*)^{-1}B^*A]_+ + [(\phi^*)^{-1}B^*A]_-, \phi K \rangle_2 + \langle \phi K, \phi K \rangle_2$$

$$= J(0) + 2\langle [(\phi^*)^{-1}B^*A]_+, \phi K \rangle_2 + 2\langle [(\phi^*)^{-1}B^*A]_-, \phi K \rangle_2 + \langle \phi K, \phi K \rangle_2 \quad (3.23)$$

O terceiro termo da EQ 3.23 é nulo, pois ϕK é estável, não contribuindo portanto na solução do problema considerado. Anulando o terceiro termo e fazendo as seguintes mudanças de variáveis na EQ 3.23, obtém-se:

$$b := [(\phi^*)^{-1}\Delta]_+ \quad \text{onde: } \Delta := B^*A \quad (3.24)$$

Substituindo a EQ 3.24 na EQ 3.23 chega-se a um novo formato para a EQ 3.23, dado pela EQ 3.25:

$$\|A + BK\|_2^2 = J(0) + 2\langle b, \phi K \rangle_2 + \langle \phi K, \phi K \rangle_2 \quad (3.25)$$

Na EQ 3.25 adicionam-se termos, sem que haja prejuízo na equação original, gerando a EQ 3.26:

$$\begin{aligned} \|A + BK\|_2^2 &= \langle b, b \rangle_2 + 2\langle b, \phi K \rangle_2 + \langle \phi K, \phi K \rangle_2 + J(0) - \langle b, b \rangle_2 \\ &= \|b + \phi K\|_2^2 + J(0) - \|b\|_2^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

A análise da EQ 3.26 permite concluir que a minimização desta em relação a K significa o mesmo que minimizar somente o primeiro termo, por ser este o único dependente de K . Assim, para se obter o valor mínimo da EQ 3.26, basta somar o resultado da minimização do primeiro termo aos valores dos termos restantes da equação. Supondo que a minimização do primeiro termo resulte no valor nulo, então torna-se possível determinar o parâmetro livre K ótimo, por:

$$K_{OT} = (-\phi^{-1})b \quad (3.27)$$

O custo ótimo, neste caso, é obtido substituindo-se a igualdade dada pela EQ 3.27 na EQ 3.26, o que resulta em:

$$J(K_{OT}) = \|A + BK_{OT}\|_2^2 = J(0) - \|b\|_2^2 \quad (3.28)$$

Conclui-se que o problema de controle ótimo H_2 assim definido possui solução analítica conforme mencionado no Capítulo 1 e cujo desenvolvimento foi realizado nesta seção.

3.3 PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO H_∞

3.3.1 O CRITÉRIO DE ROBUSTEZ EM ESTABILIDADE

O critério de robustez em estabilidade pode ser desenvolvido conforme as diversas configurações em que as perturbações não estruturadas aparecem nos sistemas. Dentre estas configurações, enquadram-se as perturbações não estruturadas do tipo aditivas, multiplicativas e nos fatores coprimos, conforme (ZHOU, 1998, p. 141). Nesta seção desenvolve-se o critério para sistemas, mediante a atuação de perturbações aditivas não estruturadas, desenvolvido em (ADES, 1999), e utilizado nesta dissertação para comparação de resultados no Capítulo 4.

Considere uma simplificação da FIG. 3.1, dada pela FIG. 3.2, mantido os dados referentes aos sinais de entrada e de saída, onde o controlador é dado por $K_a(s)$. A planta P na, FIG. 3.2, pertence a uma classe de modelos Π e está sujeita a atuação de perturbações não-estruturadas. A classe de modelos em questão, onde δ é a margem de estabilidade, é definida por:

$$\Pi(P^N, \delta) := \{ P = P^N + \Delta : \Delta \in S, \|\Delta\|_\infty < \delta \} \quad (3.29)$$

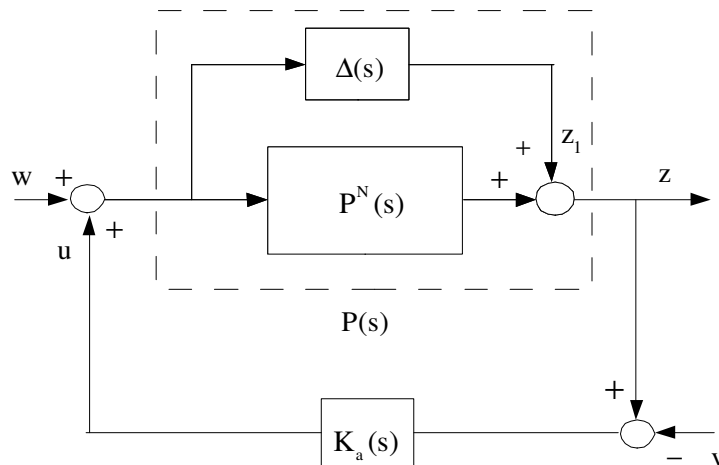


FIG. 3.2 Sistema realimentado simplificado.

Elimina-se nesta seção a dependência da variável “s”, uma vez que o domínio pode ser deduzido considerando-se o contexto. Por inspeção da FIG. 3.2, obtém-se as seguintes equações algébricas:

$$z = P w + P u \quad (3.30)$$

$$u = -K_a v + K_a z \quad (3.31)$$

Substituindo z da EQ 3.30 na EQ 3.31, obtém-se:

$$\begin{aligned} u &= -K_a v + K_a P w + K_a P u \\ [I - K_a P] u &= -K_a v + K_a P w \\ u &= [I + (-K_a) P]^{-1} (-K_a) v + [I + (-K_a) P]^{-1} K_a P w \end{aligned} \quad (3.32)$$

Substituindo $(-K_a)$ por K na EQ 3.32, encontra-se:

$$u = [I + K P]^{-1} K v - [I + K P]^{-1} K P w \quad (3.33)$$

Da EQ 3.33, obtém-se a função de transferência $F_{uv}(K)$ da matriz dada pela EQ 3.11, onde aplica-se o critério de robustez em estabilidade:

$$F_{uv}(K) = [I + K P]^{-1} K = K [I + P K]^{-1} \quad (3.34)$$

De acordo com (CORRÊA, 1992), considerando o controlador K_a e a planta nominal P^N na FIG. 3.2, ambos pertencentes a R_p e $N^N, D^N \in S$ os fatores coprimos de P^N tais que: $P^N = N^N (D^N)^{-1}$, o sistema em malha fechada (P, K_a) é estável para todo $P \in \Pi(P^N, \delta)$, sendo δ um escalar tal que $\delta > 0$, se e somente se K_a for dado conforme a EQ 3.10 para algum $K \in S$ na EQ 3.10, tal que $\|F_{uv}(K)\|_\infty \leq \frac{1}{\delta}$ na matriz dada pela EQ 3.11.

Do ponto-de-vista dado pelo Teorema 8.4 em (ZHOU, 1998, p. 142), considerando a classe de modelos dada pela EQ 3.29 e sendo K o controlador estabilizante obtido na EQ 3.34 para a planta nominal P^N , o sistema em malha fechada da FIG. 3.2 é bem posto e internamente estável para todo $\|\Delta\|_\infty < \delta$ se e somente se $\|F_{uv}(K)\|_\infty = \|K[I+PK]^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\delta}$.

Esses conceitos são aplicados na resolução do problema de controle ótimo H_∞ para o exemplo do míssil no Capítulo 4.

Para o caso de perturbações multiplicativas não estruturadas, a classe de modelos é dada por:

$$\Pi(P^N, \delta) := \{ P = (I + \Delta)P^N : \Delta \in S, \|\Delta\|_\infty < \delta \} \quad (3.35)$$

De acordo com o Teorema 8.5 em (ZHOU, 1998, p. 143), considerando a classe de modelos dada pela EQ 3.35 e sendo K o controlador estabilizante para a planta nominal P^N , o sistema em malha fechada é bem posto e internamente estável para todo $\Delta \in RH_\infty$ com $\|\Delta\|_\infty < \delta$ se e somente se $\|F_{uv}(K)\|_\infty = \|I - [I + PK]^{-1}\|_\infty \leq \frac{1}{\delta}$.

Por inspeção da EQ 3.11, a FT que relaciona o sinal de ruído do sensor de medida “v” com o sinal de saída controlada “u” é da forma $CK + D$, onde $K \in RH_\infty^+$ e C, D são funções reais-rationais e próprias. Assim, da mesma forma como foi possível gerar a EQ 3.17 para resolução do problema de controle ótimo H_2 , também é possível solucionar o problema de controle ótimo H_∞ através do funcional de custo:

$$J_\infty(K(s)) = \|C(s)K(s) + D(s)\|_\infty \quad (3.36)$$

3.3.2 SOLUÇÃO PARA UM PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO H_∞

O problema de controle ótimo H_∞ apresentado a seguir tem por referência a aula ministrada pelo Prof. Gilberto Oliveira Corrêa na PUC-Rio em 14 de novembro de 1997.

O desenvolvimento a seguir diz respeito à resolução do problema de Nehari. Esse problema possui solução analítica.

Considera-se uma função afim tal que $F: K \in RH_\infty^+ \rightarrow (CK + D) \in RH_\infty^+$ com $C, D \in RH_\infty^+$, C bipróprio e $\forall \omega \in \mathbb{R}, C(j\omega) \neq 0$, então o problema de controle ótimo H_∞ tem solução dada por $\tilde{K} \in RH_\infty^+$ tal que:

$$\|F(\tilde{K})\|_\infty = \min_{K \in RH_\infty^+} \|F(K)\|_\infty = \min_{K \in RH_\infty^+} \|CK + D\|_\infty \quad (3.37)$$

A solução deste problema é dada por: $K = -C^{-1}D$, caso $C^{-1}D \in RH_\infty^+$. Se isto não ocorrer, para o desenvolvimento desta solução torna-se necessário aplicar a operação de fatoração coprima em C , de modo que:

$$C(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N_d(s) N_e(s)}{D(s)} \quad (3.38)$$

onde $N_e(s)$ é um polinômio cujas raízes são os zeros estáveis de $C(s)$ e $N_d(s)$ é um polinômio cujas raízes são os zeros instáveis de $C(s)$.

Seja $N(s)$ na EQ 3.38 uma matriz de transferência tal que $N \in RH_\infty^+$. Se $N^- N = I$, onde $N^-(s) = N^T(-s)$, então N é dita “inner”. Se $NN^- = I$ então N é dita “co-inner”. Uma matriz de transferência $N \in RL_\infty$ é dita “all-pass” se N for quadrada e inner. No caso SISO, objeto desta demonstração, uma função inner é também all-pass. Uma matriz de transferência, com dimensão $p \times m$ ($p \leq m$), dada por $P_o \in RH_\infty^+$ é dita “outer” se P_o possui posto linha completo e não possui zeros em \mathbb{C}_+ .

Os conceitos mencionados sobre matrizes de transferência “inner” e “outer” são aplicados na EQ 3.38 obtendo-se uma fatoração inner-outer em C dada por: $C = C_{in}C_o$, cujo formato é apresentado na EQ 3.39.

$$C(s) = C_{in}(s)C_o(s) = \frac{N_d(s)}{N_d(-s)} \frac{N_d(-s)N_e(s)}{D(s)} \quad (3.39)$$

Para o caso MIMO, o Teorema 13.32 e o Corolário 13.33 em (ZHOU et alii,1996, p. 367) mostram como é obtida esta fatoração.

Uma importante propriedade para qualquer FT inner é dada por $|N_{in}(j\omega)| = 1$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$. Substituindo-se $C(s)$ da EQ 3.39 na EQ 3.37 pode-se reescrever o problema inicial como:

$$\begin{aligned} \min_{K \in RH_{\infty}^+} \|CK + D\|_{\infty} &= \min_{K \in RH_{\infty}^+} \|C_{in}C_oK + D\|_{\infty} \\ &= \min_{K \in RH_{\infty}^+} \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |C_{in}[C_oK + C_{in}^{-1}D](j\omega)| \\ &= \min_{K \in RH_{\infty}^+} \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |C_{in}(j\omega)| | [C_oK + C_{in}^{-1}D](j\omega) | \\ &= \min_{K \in RH_{\infty}^+} \sup_{\omega \in \mathbb{R}} | [C_oK + C_{in}^{-1}D](j\omega) | \\ &= \min_{K \in RH_{\infty}^+} \| [C_oK + C_{in}^{-1}D] \|_{\infty} \\ &= \min_{Y \in RH_{\infty}^+} \| Y + C_{in}^{-1}D \|_{\infty} \end{aligned} \quad (3.40)$$

sendo $Y = C_oK$, uma mudança de variável. A segunda parcela da norma dada pela EQ 3.40 pode ser decomposta do seguinte modo:

$$C_{in}^{-1}D(s) = C_{in}^{-1}D(\infty) + [C_{in}^{-1}D]_+ + [C_{in}^{-1}D]_- \quad (3.41)$$

Agora, gera-se a variável $Y_0 \in RH_{\infty}^+$ de modo que $Y_0 = -\{C_{in}^{-1}D(\infty) + [C_{in}^{-1}D]_+\}$. Substituindo $C_{in}^{-1}D$ da EQ 3.41 e Y_0 na EQ 3.40, encontra-se :

$$\min_{Y \in \text{RH}_\infty^+} \left\| Y - Y_0 + [C_{\text{in}}^{-1}D]_- \right\|_\infty \quad (3.42)$$

Pela aplicação da mudança de variável $F = Y - Y_0$, obtém-se um problema onde a função de transferência F que representa a variável livre é estável. Além disso, sabendo-se que $F_0 := -[C_{\text{in}}^{-1}D]_- \in \text{RH}_2^-$ chega-se no problema de Nehari dado pela EQ 3.43.

$$\min_{F \in \text{RH}_\infty^+} \left\| F - F_0 \right\|_\infty \quad (3.43)$$

Por simples inspeção em EQ 3.43, nota-se que o problema de Nehari consiste na aproximação de uma FT dada por F_0 instável e estritamente própria pela nova variável livre dada por uma FT real-racional, própria e estável representada por F . A demonstração desse problema encontra-se desenvolvida em (ADES, 1999, p. 36).

Nesta dissertação torna-se interessante apresentar o resultado da minimização da EQ 3.43 em F , tendo em vista o fato deste problema apresentar solução analítica. A solução ótima F_{OT} é dada por:

$$F_{\text{OT}} = v_0^{-1} [F_0 v_0]_+ \quad (3.44)$$

com $F_0 := C(sI - A)^{-1}B$ e v_0 sendo uma FT dada por:

$$v_0 = B^T (sI + A^T)^{-1} \widehat{L}_c^{-1/2} \tilde{\alpha}_0 \quad (3.45)$$

onde \widehat{L}_c (\widehat{L}_o) é o gramiano de controlabilidade (observabilidade) do par $[-A, B]$ ($[C, -A]$) e $\tilde{\alpha}_0$ é o autovetor associado ao maior autovalor de $\widehat{L}_c \widehat{L}_o$.

No caso SISO, pode ser encontrada em (ZHOU, 1998) outra abordagem para resolução do problema de controle ótimo H_∞ por meio das AREs. Além disso, para a mesma referência, encontram-se discutidos meios para resolução do problema de controle ótimo H_∞ do tipo MIMO (múltiplas entradas e múltiplas saídas).

No exemplo do míssil apresentado no Capítulo 4, a função C na EQ 3.37 é estritamente própria o que não permite resolver o problema do controle ótimo H_∞ pelo formato do problema de Nehari.

3.4 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO EBPE / CGO

A solução para o problema de controle H_2/H_∞ apresentado na EQ 3.1 é de ordem infinita, o que torna impossível sua obtenção. Isso motivou a implementação do problema aproximado, apresentado na EQ 3.2, cuja solução é de ordem finita. Nesse problema, que tem como base o método de Galerkin, à medida em que a ordem de $K(s)$ cresce, sua solução converge para a solução ótima do problema original da EQ 3.1. Por inspeção da EQ 3.2, verifica-se que a FT que representa a variável livre é dada pelo parâmetro livre $K(s)$. Essa FT pode ser representada por uma série truncada, o que torna viável sua determinação por diversos métodos. Dentre esses, enquadram-se os métodos EBPE e CGO a serem discutidos nesta seção. Ambos possuem como objetivo gerar soluções aproximadas para o problema de controle H_2/H_∞ original, apresentado na EQ 3.1.

O método EBPE, utiliza FTs previamente determinadas que geram uma base para o espaço solução do problema aproximado na EQ 3.2.

Em especial nessa dissertação, utiliza-se as funções de Laguerre, conforme a Seção 3.4.3, para compor a base nos problemas do Capítulo 4 onde aplica-se o método EBPE. Essas funções são ortogonais no espaço H_2^+ . Além disso, seus pólos estão alocados sempre na mesma posição do plano s .

O método EBPE consiste então na escolha dos coeficientes que irão compor a série truncada de FTs do problema aproximado da EQ 3.2. A medida em que são inseridas novas FTs e ajustados os coeficientes da série, a solução desse problema converge para o valor ótimo do problema original da EQ 3.1.

No método CGO, o espaço solução do problema aproximado da EQ 3.2 é formado por FTs que obedecem aos pressupostos do teorema de Runge. Esse teorema se baseia na expansão de termos da forma $(s + a)^{-1}$, onde $a \in \mathbb{R}_+$.

De forma diferente do que acontece em EBPE, alterando-se os parâmetros no método CGO, os pólos das FTs que compõem o conjunto são modificados surgindo um novo conjunto gerador para o espaço solução do problema aproximado da EQ 3.2. Isso se deve ao fato desses parâmetros se referirem não somente aos coeficientes do polinômio do numerador, mas também aos coeficientes do polinômio do denominador da FT que será a solução do problema aproximado.

O método CGO consiste na construção de um conjunto gerador através da expansão de uma série truncada de FTs, onde a posição dos pólos é variável. Novos conjuntos geradores são obtidos a partir da alteração dos parâmetros do CGO, criando dessa forma um novo espaço solução para o problema aproximado da EQ 3.2. A medida em que são inseridas novas FTs na série truncada, a solução desse problema converge para o valor ótimo do problema original da EQ 3.1.

Nesse método, a solução gerada para o problema aproximado da EQ 3.2 possui ordem menor ou igual a ordem da solução encontrada via EBPE, dado um valor determinado de custo.

Tendo em vista as comparações a serem estabelecidas entre os métodos EBPE e CGO, torna-se útil analisar a classe das funções convexas. Considere uma função F tal que $F: S \rightarrow \mathbb{R}$. A função F é convexa se $\forall x, y \in S$ e para qualquer $0 \leq \alpha \leq 1$ vale a seguinte inequação:

$$F(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha F(x) + (1 - \alpha)F(y) \quad (3.46)$$

A importância desta classe de funções reside no fato de que um valor mínimo local da função F , representa também o valor mínimo global para a mesma, isto é, tendo sido encontrado o valor mínimo de F está garantido que a solução ótima do problema de minimização de F foi encontrada.

No método EBPE, o problema tratado é convexo e caso seja alcançada a solução, essa será dada pelo valor mínimo global do problema aproximado definido na EQ 3.2. Entretanto, a

medida em que a ordem aumenta e pelo fato dos pólos estarem alocados sempre no mesmo ponto, sua implementação computacional tende a se tornar numericamente mal condicionada.

Já no método CGO, o problema tratado é não-convexo e caso seja alcançada a solução para o problema aproximado, essa será um mínimo local dentro de uma série de mínimos locais que podem ser alcançados, o que não garante sua otimalidade. Por outro lado, as soluções obtidas por CGO são melhores que as encontradas no método EBPE para a mesma ordem de $K(s)$.

3.4.1 O PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR

O problema de controle H_2/H_∞ aproximado da EQ 3.2 se enquadra como um típico problema de programação não-linear, cujo formato é dado por:

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar} && F(\underline{x}) \\
 &\text{sujeito a} && G_i(\underline{x}) \leq 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, m \\
 &&& H_w(\underline{x}) = 0 \quad \text{para } w = 1, \dots, s \\
 &&& \underline{x} \in \mathbb{R}^n
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

onde $F, G_1, \dots, G_m, H_1, \dots, H_s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\underline{x}^T = [x_1 \dots x_n]$ representa o vetor de variáveis de projeto.

A função F é denominada de função custo ou função objetivo, G é uma restrição em desigualdade e H uma restrição em igualdade. Caso o vetor de variáveis \underline{x} satisfaça as restrições impostas, então \underline{x} é dito uma solução viável do problema. Assim, a região de viabilidade é definida como o conjunto de todas as soluções viáveis do problema. O problema de programação não-linear consiste em descobrir uma solução viável \underline{x}^* tal que $f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}^*)$ para cada \underline{x} pertencente à região de viabilidade. O ponto \underline{x}^* é então dito uma solução ótima do problema. (BAZARAA e SHETTY, 1979)

A disponibilidade de métodos numéricos de otimização para solucionar de forma eficiente problemas sem restrições, motiva a transformação do problema com restrições dado pela EQ 3.2 em um problema sem restrições dado pela EQ 3.48, onde a solução é conduzida numericamente pela minimização de uma função custo sem restrições. Isso é feito por meio de funções penalidade.

$$\underset{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}}{\text{minimizar}} \quad J_\pi(\mathbf{K}) \quad (3.48)$$

A função $J_\pi(\mathbf{K})$ gerada a partir da EQ 3.2 é denominada função de custo composto ou função penalidade e sua representação é dada por:

$$J_\pi(\mathbf{K}) = J_2(\mathbf{K}) + \pi_1 [J_\infty(\mathbf{K}) - \gamma_0] + \pi_2 \max(0, J_\infty(\mathbf{K}) - \gamma) \quad (3.49)$$

onde $0 \leq \pi_1, \pi_2 \in \mathbb{R}$ são constantes calculadas de acordo com a necessidade do problema; $\max(\cdot, \cdot)$ é a função que escolhe o máximo entre os dois argumentos e os funcionais J_2 e J_∞ são os estabelecidos no problema da EQ 3.1.

Os valores das constantes π_1 e π_2 na EQ 3.49, se necessário, são ajustadas dentro do processo numérico de otimização com o objetivo de alcançar o compromisso desejado de desempenho e robustez em estabilidade.

Se forem utilizados valores relativamente baixos para π_1 e π_2 , o funcional de custo J_2 será priorizado em relação a J_∞ . A tendência é obter um ponto de operação com excelente desempenho (baixo valor de J_2) e pouca robustez em estabilidade (valor alto de J_∞). Se, ao contrário, forem utilizados valores relativamente elevados para π_1 e π_2 , a tendência é que a viabilidade seja garantida em detrimento do desempenho.

O procedimento para obter a solução do problema de controle H_2/H_∞ de um determinado sistema de controle inicia quando, dado um projeto inicial, escolhe-se um valor de π_2 de modo que o valor apresentado pelo terceiro termo na EQ 3.49 seja relativamente superior ao valor do primeiro termo. Esse procedimento tem como objetivo fazer com que o método de

otimização procure soluções em direção à região de viabilidade. Alcançado esse objetivo, o terceiro termo na EQ 3.49 se anula pois $J_\infty(K) < \gamma$.

Tendo em vista a busca pelo desempenho ótimo desse sistema, escolhe-se um valor de π_1 de forma que o valor do segundo termo na EQ 3.49 seja relativamente inferior ao valor do primeiro termo. Esse procedimento faz com que o método de otimização procure soluções em direção à borda da região de viabilidade, melhorando o desempenho do sistema. O valor de π_1 tem como objetivo estabelecer o compromisso entre os funcionais J_2 e J_∞ no interior da região de viabilidade.

Quando a solução pesquisada ultrapassa a borda, ativa-se novamente o terceiro termo da EQ 3.49, forçando o retorno para o interior da região de viabilidade. Assim, forma-se um ciclo no qual o projeto pesquisado caminha pela borda da região de viabilidade se aproximando cada vez mais da solução ótima.

Para facilitar o processo de resolução de problemas de controle H_2/H_∞ via EBPE e CGO, determina-se primeiro quem são os controladores ótimos H_2 e H_∞ . Assim, torna-se possível estipular uma faixa de valores para os funcionais J_2 e J_∞ , o que auxilia na escolha de valores adequados para π_1 e π_2 .

O advento dos computadores possibilitou a implementação de rotinas computacionais que geram soluções de forma mais rápida e eficiente. Isso favorece o surgimento de novos métodos para resolução do problema de controle H_2/H_∞ , o que motiva a apresentação da seção a seguir.

3.4.2 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DO PROBLEMA DE CONTROLE H_2/H_∞

A FIG. 3.3 apresenta a implementação computacional que permite solucionar o problema de otimização proposto na EQ 3.48.

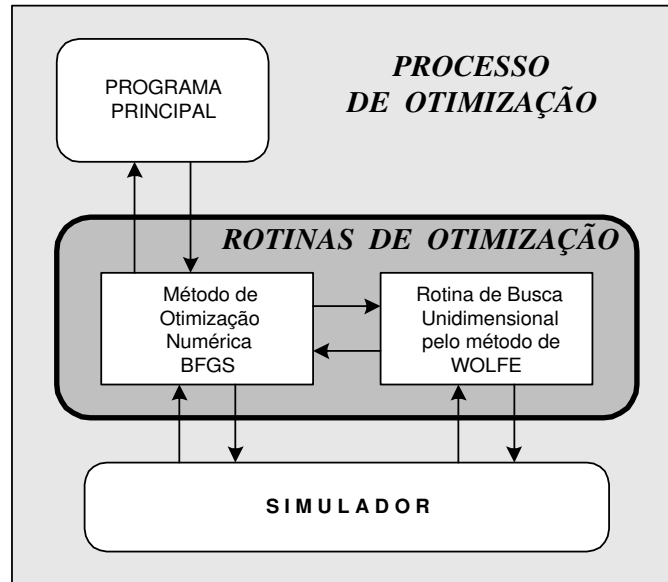


FIG. 3.3 Diagrama em blocos do processo de otimização.

O processo de otimização descrito na FIG. 3.3 é composto pelo programa principal, além das rotinas de otimização e do simulador. O programa principal apresenta os dados referentes ao problema a ser resolvido. Dentre esses dados encontram-se as variáveis de projeto, onde escolhe-se um projeto inicial e os parâmetros associados aos critérios de parada previamente estabelecidos com o objetivo de interromper o processo conforme a conveniência.

As rotinas de otimização são dadas pelo método numérico de otimização e pela rotina de busca unidimensional. A rotina numérica de otimização é responsável por retornar a direção de descida que o projeto inicial deve seguir. Dentre os vários métodos de otimização numéricos, utiliza-se nesta dissertação o método BFGS (BERTSEKAS, 1995). Esse método se enquadra na classe dos métodos quase Newton. Esses métodos englobam todas as rotinas que minimizam a função pelo cálculo das direções a serem pesquisadas por meio da aplicação do gradiente. Essas equações se apresentam na forma:

$$d_k = -D_k \nabla J(\underline{x}_k) \quad (3.50)$$

onde J é a função custo, \underline{x}_k é o projeto na k -ésima iteração e D_k é uma matriz positiva definida, podendo ser ajustável de uma iteração para a próxima de maneira que o valor do gradiente dado

por \underline{d}_k tenda a se aproximar da direção de Newton. A rotina de busca unidimensional, por sua vez, é responsável por determinar qual o passo que deve ser tomado, dentro dessa direção de descida. Dentre os métodos existentes, utiliza-se nesta dissertação o de Wolfe (BONNANS et alii, 1997), que se baseia na obtenção de um compromisso entre a rápida determinação de um passo aceitável λ na EQ 3.51, através de critérios de parada pré-estabelecidos, e a redução sensível da função custo J em \underline{x}_{k+1} .

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \lambda_k \underline{d}_k \quad (3.51)$$

O procedimento executado por ambas as rotinas de otimização objetiva a determinação da solução ótima para o problema proposto na EQ 3.48. Para tanto, essas rotinas se utilizam do simulador que é responsável por receber o ponto de projeto \underline{x}_k e retornar para as rotinas de otimização os valores da função custo $J(\underline{x}_k)$ e do gradiente $\nabla J(\underline{x}_k)$. Agora será detalhado o funcionamento deste processo de otimização.

O programa principal fornece à rotina numérica de otimização o projeto inicial. Uma direção de descida é estabelecida pela rotina numérica de otimização a partir de avaliações dos resultados obtidos pela aplicação, por parte do simulador, da função custo e de seu gradiente no projeto. A direção de descida obtida é transmitida para a rotina de busca unidimensional, onde acontece a próxima etapa deste processo. Na rotina de busca unidimensional o objetivo é determinar, a partir da direção de descida, qual o passo ótimo λ , onde $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ tal que a função $Q(\lambda)$ seja mínima, com:

$$Q(\lambda) := J(\underline{x}_k + \lambda \underline{d}_k) \quad (3.52)$$

onde J é a função custo, \underline{x}_k é o projeto inicial e \underline{d}_k é a direção de descida.

3.4.3 O MÉTODO EBPE

No método EBPE, uma solução para o problema de controle H_2/H_∞ pode ser obtida a partir da expansão de um conjunto de FTs quaisquer previamente determinadas. Pelo fato de ter sido utilizada com frequência na resolução de problemas em (ADES, 1999) e para efeito de comparações dos resultados obtidos nos exemplos do Capítulo 4, serão utilizadas as funções de Laguerre apresentadas a seguir:

$$L_m(s) = \sqrt{2a} \frac{(s-a)^{m-1}}{(s+a)^m} \quad \text{onde: } m = 1, 2, \dots \quad (3.53)$$

onde $0 < a \in \mathbb{R}$. As funções de Laguerre formam uma base ortonormal do espaço H_2^+ e seus pólos são previamente definidos em uma posição do plano s . Conforme a EQ 3.1, $K(s) \in RH_\infty^+$, o que obriga a definir a função $L_0(s) = 1$. O problema de otimização é dado por:

$$\begin{aligned} \min_{\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^n} J_\pi(K) & \quad (3.54) \\ \text{sujeito a: } K(s) &= \alpha_0 L_0(s) + \alpha_1 L_1(s) + \dots + \alpha_{n-1} L_{n-1}(s) \\ \underline{\alpha}^T &= (\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

onde $\underline{\alpha}$ é o vetor de coeficientes e $K(s)$ é o parâmetro livre do problema original na EQ 3.1.

Na busca pela solução ótima do problema definido na EQ 3.54, o aumento da ordem de $K(s)$ provocado pela adição de novas funções pode acarretar problemas numéricos devido ao fato de todos os pólos dessas funções se localizarem num mesmo ponto “a” do semi-eixo \mathbb{R}_+^0 . Isto acontece porque a medida em que a ordem de $K(s)$ cresce, os pólos se afastam ligeiramente da posição “a”, devido a erros numéricos, não permitindo o perfeito cancelamento de pólos e zeros. Esse problema é solucionado pela aplicação da redução de ordem de modelos via realização balanceada apresentada na Seção 2.6 desta dissertação.

O problema tratado na EQ 3.54 é convexo. Nesse caso, conforme já mencionado, a resolução do problema aproximado da EQ 3.2 converge para o valor mínimo global. Esta propriedade é demonstrada em (ADES, 1999).

A partir de agora torna-se necessário comentar sobre o cálculo do gradiente de $J_2(\underline{\alpha})$, obtido pela aplicação da derivada em relação a $\underline{\alpha}$ na EQ 3.18 e do subgradiente de $J_\infty(\underline{\alpha})$, detalhado mais adiante. Estes cálculos são necessários para estabelecer uma direção de descida a fim de minimizar a função custo na EQ 3.54. Serão reproduzidos os resultados apresentados em (ADES, 1999).

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_0} &= 2 \langle BL_0, A + BK \rangle_2 \\ \frac{\partial J_2(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_1} &= 2 \langle BL_1, A + BK \rangle_2 \\ &\vdots \\ \frac{\partial J_2(\underline{\alpha})}{\partial \alpha_{n-1}} &= 2 \langle BL_{n-1}, A + BK \rangle_2 \end{aligned} \quad (3.55)$$

e portanto

$$\nabla J_2(\underline{\alpha})^T = \left(\frac{\partial J_2}{\partial \alpha_0}, \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_{n-1}} \right) \quad (3.56)$$

Em função da definição de $J_\infty(\underline{\alpha})$, torna-se inviável o cálculo de seu gradiente mas, em compensação, o cálculo de um subgradiente de $J_\infty(\underline{\alpha})$, apresentado a seguir, satisfaz as necessidades do problema da EQ 3.54. Dado uma função de transferência qualquer $G(s) \in RL_\infty$ e ω_0 a frequência em que o máximo de $|G(j\omega_0)|$, obtém-se:

$$\Theta_0 = \|G\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |G(j\omega)| = |G(j\omega_0)| = \sqrt{G^{\sim}(s)G(s)} \Big|_{s=j\omega_0} = H(s) \Big|_{s=j\omega_0} \quad (3.57)$$

Dado que

$$h(s) = G^{\sim}(s)G(s) \quad (3.58)$$

Então

$$\frac{\partial H(s)}{\partial \alpha_i} = \frac{1}{2\sqrt{h(s)}} \frac{\partial h(s)}{\partial \alpha_i} \quad (3.59)$$

Em EBPE adota-se:
$$G(s) = C(s)K(s) + D(s) = C\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i L_i\right) + D \quad (3.60)$$

Aplicando-se $G(s)$ da EQ 3.60 na igualdade da EQ 3.58 para em seguida derivar parcialmente em relação a α_i e utilizando $K(s)$ da EQ 3.54, encontra-se:

$$\left. \frac{\partial h(s)}{\partial \alpha_i} \right|_{s=j\omega_0} = 2 \operatorname{Re} \left(\left[C(j\omega_0) G^*(j\omega_0) L_i(j\omega_0) \right] \right) \quad (3.61)$$

Enfim, aplica-se a EQ 3.61 na EQ 3.59, chega-se a:

$$\left. \frac{\partial H(s)}{\partial \alpha_i} \right|_{s=j\omega_0} = \frac{\operatorname{Re} \left(\left[C(j\omega_0) G^*(j\omega_0) L_i(j\omega_0) \right] \right)}{\Theta_0} \quad (3.62)$$

O subgradiente calculado é representado por $\xi \in \mathbb{R}^n$, conforme demonstração apresentada no teorema 4.6 em (ADES, 1999), tal que:

$$\xi^T = \left(\left. \frac{\partial H(s)}{\partial \alpha_0}, \frac{\partial H(s)}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial H(s)}{\partial \alpha_{n-1}} \right) \right) \Big|_{s=j\omega_0} \quad (3.63)$$

Um subgradiente do funcional $J_\pi(\underline{\alpha})$ também pode ser calculado diretamente da EQ 3.49 com o auxílio das EQ 3.56 e 3.63, bastando para isto considerar dois casos:

a) Se $J_\infty(\underline{\alpha}) - \gamma > 0$: $\xi_{J_\pi} = \nabla J_2(\underline{\alpha}) + (\pi_1 + \pi_2) \xi \quad (3.64)$

b) Se $J_\infty(\underline{\alpha}) - \gamma \leq 0$: $\xi_{J_\pi} = \nabla J_2(\underline{\alpha}) + \pi_1 \xi \quad (3.65)$

As principais vantagens do método EBPE encontram-se na obtenção de soluções aproximadas viáveis para o problema original da EQ 3.1 com ordens relativamente baixas, pelo fato do problema aproximado da EQ 3.2 ser convexo.

3.4.4 O MÉTODO CGO

Neste método, conforme já mencionado, o espaço solução é formado por FTs que obedecem aos pressupostos do teorema de Runge, isto é, a série truncada pertence a uma expansão do espaço H_2^+ por termos da forma $(s+a)^{-1}$ com $a \in \mathbb{C}_+^0$. Além disso, alterando seus coeficientes, novos pólos surgem criando um novo conjunto gerador para o espaço solução. O problema de otimização é dado por:

$$\min_{\underline{\theta} \in \mathbb{C}^{2n+1}} J_{\pi}(K) \quad (3.66)$$

$$\text{sujeito a: } K(s) = \frac{\alpha_1 s^n + \alpha_2 s^{n-1} + \dots + \alpha_n s + \alpha_{n+1}}{s^n + \beta_1 s^{n-1} + \dots + \beta_{n-1} s + \beta_n} = \frac{N(s)}{P(s)}$$

$$\underline{\theta}^T = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_{n+1} \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_n) \in \mathbb{C}^{2n+1}$$

onde n é a ordem da solução a ser calculada, $\underline{\theta}$ é o vetor de coeficientes e $K(s)$ é o parâmetro livre do problema original da EQ 3.1.

Torna-se interessante notar que neste método é possível incluir pares de pólos complexos conjugados no semiplano \mathbb{C}_+^0 em $K(s)$.

O condicionamento numérico apresentado neste método é superior ao apresentado em EBPE. O algoritmo aloca os pólos no semiplano \mathbb{C}_+^0 e evita que estes tendam para $-\infty$ ou zero. O funcional $J_{\pi}(\underline{\theta})$ é convexo em relação aos parâmetros α_i , mas é não-convexo em relação aos parâmetros β_i . Com isso, as soluções encontradas pelo problema aproximado da EQ 3.2 representam mínimos locais, devido ao fato do problema ser não-convexo. Por outro lado, o ajuste de pólos de $K(s)$ permite o cálculo de soluções aproximadas para o problema da EQ 3.1 com ordens inferiores àquelas geradas pelo método EBPE, ou seja, no método CGO a convergência para a solução ótima é mais rápida que em EBPE. Assim, fixada a ordem da solução a ser calculada, o espaço solução no método EBPE é um subespaço de CGO.

Uma conclusão imediata é que a escolha de vetores iniciais para resolução por CGO pode partir de vetores que geraram a solução pela resolução por EBPE. Para a mesma ordem, o valor do funcional obtido como solução no método EBPE serve de limitante superior para o valor do funcional a ser calculado pela técnica CGO.

Da mesma forma como foi apresentado na seção anterior, é apresentada a seguir uma discussão sobre o cálculo do gradiente de $J_2(\underline{\alpha})$ e do subgradiente de $J_\infty(\underline{\alpha})$. São reproduzidos os resultados apresentados em (ADES, 1999). Considere:

$$J_2(\underline{K}(\underline{\theta})) = \|A(s)\|_2^2 + 2 \langle A(s), B(s)K(s) \rangle + \|B(s)K(s)\|_2^2 + J_F = J_2(\underline{\theta}) \quad (3.67)$$

Derivando parcialmente a EQ 3.67 em relação aos coeficientes do numerador de $K(s)$ chega-se a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2(\underline{\theta})}{\partial \alpha_1} &= 2 \langle A(s) + B(s)K(s), \frac{B(s) \cdot s^n}{P(s)} \rangle_2 \\ \frac{\partial J_2(\underline{\theta})}{\partial \alpha_2} &= 2 \langle A(s) + B(s)K(s), \frac{B(s) \cdot s^{n-1}}{P(s)} \rangle_2 \\ &\vdots \\ \frac{\partial J_2(\underline{\theta})}{\partial \alpha_{n+1}} &= 2 \langle A(s) + B(s)K(s), \frac{B(s)}{P(s)} \rangle_2 \end{aligned} \quad (3.68)$$

Agora, derivando parcialmente a EQ 3.67 em relação aos coeficientes do denominador de $K(s)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2(\underline{\theta})}{\partial \beta_1} &= -2 \langle A(s) + B(s)K(s), B(s)K(s) \frac{s^{n-1}}{P(s)} \rangle_2 \\ \frac{\partial J_2(\underline{\theta})}{\partial \beta_2} &= -2 \langle A(s) + B(s)K(s), B(s)K(s) \frac{s^{n-2}}{P(s)} \rangle_2 \\ &\vdots \\ \frac{\partial J_2(\underline{\theta})}{\partial \beta_n} &= -2 \langle A(s) + B(s)K(s), B(s)K(s) \frac{1}{P(s)} \rangle_2 \end{aligned} \quad (3.69)$$

O gradiente de $J_2(\underline{\theta})$ pode então ser calculado a partir das EQ 3.68 e EQ 3.69, ou seja:

$$\nabla J_2(\underline{\theta})^T = \left(\frac{\partial J_2}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_2}, \dots, \frac{\partial J_2}{\partial \alpha_{n+1}}, \frac{\partial J_2}{\partial \beta_1}, \frac{\partial J_2}{\partial \beta_2}, \dots, \frac{\partial J_2}{\partial \beta_n} \right) \quad (3.70)$$

No funcional $J_\infty(\underline{\theta})$, calcula-se um subgradiente nos mesmos moldes do que foi realizado com o método EBPE. Portanto:

$$J_\infty(\underline{\theta}) = \|C(s)K(s) + D(s)\|_\infty = \|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |G(j\omega)| = |G(j\omega_0)| = \Theta_0 \quad (3.71)$$

Dado que $H(j\omega) = |G(j\omega)| = \sqrt{h(j\omega)}$ sendo $h(j\omega) = G(j\omega)G^*(j\omega)$ (3.72)

Conclui-se a regra da cadeia, levando em consideração que $\omega = \omega_0$:

$$\frac{\partial H(j\omega_0)}{\partial \alpha} = \frac{1}{2\Theta_0} \frac{\partial h(j\omega_0)}{\partial \alpha} \quad (3.73)$$

Substituindo-se $G(j\omega)$ da EQ 3.71 em $h(j\omega)$ da EQ 3.72, encontra-se:

$$h(j\omega) = C(j\omega)K(j\omega)C^*(j\omega)K^*(j\omega) + C(j\omega)K(j\omega)D^*(j\omega) + C^*(j\omega)K^*(j\omega)D(j\omega) + D(j\omega)D^*(j\omega) \quad (3.74)$$

com $K(s)$ dada pela EQ 3.66. Calcula-se a derivada parcial de $h(j\omega_0)$ em relação aos componentes do vetor de parâmetros de projeto $\underline{\theta}$. Em relação a α_i , obtém-se:

$$\frac{\partial h(s)}{\partial \alpha_i} \Big|_{s=j\omega_0} = 2 \operatorname{Re} \left(\left[C G^* \frac{\partial N}{\partial \alpha_i} \left(\frac{1}{P} \right) \right] \right)$$

Em relação a β_i , encontra-se:

$$\frac{\partial h(s)}{\partial \beta_i} \Big|_{s=j\omega_0} = 2 \operatorname{Re} \left(\left[-\mathbf{C} \mathbf{K} \mathbf{G}^* \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \beta_i} \left(\frac{1}{\mathbf{P}} \right) \right] \right)$$

Assim, de EQ 3.73 obtém-se:

$$\frac{\partial H(j\omega_0)}{\partial \alpha_i} = \frac{1}{2\Theta_0} \frac{\partial h(j\omega_0)}{\partial \alpha_i} \quad e \quad \frac{\partial H(j\omega_0)}{\partial \beta_i} = \frac{1}{2\Theta_0} \frac{\partial h(j\omega_0)}{\partial \beta_i}$$

$$\frac{\partial H(s)}{\partial \alpha_i} \Big|_{s=j\omega_0} = \frac{1}{\Theta_0} \left[\operatorname{Re} \left(\left[\mathbf{C} \mathbf{G}^* \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \alpha_i} \left(\frac{1}{\mathbf{P}} \right) \right] \right) \right] \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial H(s)}{\partial \beta_i} \Big|_{s=j\omega_0} = \frac{1}{\Theta_0} \left[\operatorname{Re} \left(\left[-\mathbf{C} \mathbf{K} \mathbf{G}^* \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \beta_i} \left(\frac{1}{\mathbf{P}} \right) \right] \right) \right] \quad (3.76)$$

A direção $\xi \in \mathbb{R}^{2n+1}$ na EQ 3.77 é um subgradiente de $J_\infty(\underline{\theta})$ o que é demonstrado no Teorema 4.6 em (ADES, 1999):

$$\xi^T = \left(\frac{\partial H(s)}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial H(s)}{\partial \alpha_2}, \dots, \frac{\partial H(s)}{\partial \alpha_{n+1}}, \frac{\partial H(s)}{\partial \beta_1}, \frac{\partial H(s)}{\partial \beta_2}, \dots, \frac{\partial H(s)}{\partial \beta_n} \right) \Big|_{s=j\omega_0} \quad (3.77)$$

Um ponto fundamental para o desenvolvimento dos cálculos acima refere-se ao modo como é obtido a frequência ω_0 onde ocorre o supremo na EQ 2.29, sendo utilizado para isto o método proposto no Lema 2.4. Enfim, o funcional $J_\pi(\underline{\theta})$ pode ser calculado diretamente da EQ 3.49 com o auxílio das EQ 3.70 e EQ 3.77, bastando para isto considerar dois casos:

$$\text{a) Se } J_\infty(\underline{\alpha}) - \gamma > 0: \xi_{J_\pi} = \nabla J_2(\underline{\theta}) + (\pi_1 + \pi_2) \xi \quad (3.78)$$

$$\text{b) Se } J_\infty(\underline{\alpha}) - \gamma \leq 0: \xi_{J_\pi} = \nabla J_2(\underline{\theta}) + \pi_1 \xi \quad (3.79)$$

A principal vantagem do método CGO encontra-se na possibilidade de escolha de FTs com pólos variados que irão compor o conjunto gerador criando um espaço solução para o problema aproximado da EQ 3.2, o que acarreta para uma mesma ordem de $K(s)$ uma convergência melhor para a solução ótima do problema considerado em relação ao método EBPE.

3.5 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE CONTROLE

As Equações Algébricas de Riccati (ARE), ferramentas matemáticas para a resolução de problemas em Controle Robusto, foram utilizadas por (WILLEMS, 1971) como um caso particular de representações algébricas em desigualdades denominadas Desigualdades Matriciais Lineares ou LMIs. Segundo WILLEMS (1971), uma LMI formatada como um problema de otimização convexo reduz esforços na utilização de recursos numéricos, o que aumenta a velocidade de processamento da solução.

Esta seção apresenta uma exposição relativa à formulação de problemas de controle como problemas de otimização sob restrições do tipo LMI. O embasamento teórico encontra-se em (BOYD et alii, 1994) e (APKARIAN et alii, 2000).

Uma LMI é uma desigualdade da forma:

$$F(\underline{x}) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i = F_0 + x_1 F_1 + \dots + x_m F_m < 0 \quad (3.80)$$

onde:

- $\underline{x} = [x_1 \quad \dots \quad x_m]^T$ é um vetor de variáveis escalares de decisão ou de otimização;
- F_0, \dots, F_m são matrizes simétricas conhecidas, tais que $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$;
- $\bar{\lambda}(F(\underline{x})) < 0$, para algum vetor \underline{x} de solução.

Conforme (BOYD et alii, 1994), a LMI dada pela inequação EQ 3.80 é convexa em \underline{x} , ou seja, o conjunto $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^m \mid F(\underline{x}) < 0\}$ é convexo. Para solucionar a EQ 3.80, pode-se formular e resolver um problema de otimização convexo que recai em um problema de viabilidade cujo objetivo é encontrar um vetor \underline{x} que minimiza um valor escalar t para a desigualdade:

$$F(\underline{x}) + tI < 0$$

Se o valor mínimo de t é positivo, o problema é viável.

A convexidade tem uma importante consequência. A inequação EQ 3.80 não apresenta uma solução analítica geral. Ainda assim, essa inequação pode ser resolvida numericamente, caso exista pelo menos uma solução. A importância da convexidade é dada por duas razões principais:

- A resolução numérica do problema de viabilidade na EQ 3.80 garante a existência de uma solução que representa o valor mínimo global.
- Múltiplas LMIs $F^{(1)}(\underline{x}) < 0, \dots, F^{(p)}(\underline{x}) < 0$ podem ser expressas como uma simples LMI construída pelo empilhamento de restrições onde: $F(\underline{x}) := \text{diag}(F^{(1)}(\underline{x}), \dots, F^{(p)}(\underline{x})) < 0$, o que permite a imposição de um número arbitrário de restrições armazenadas em um vetor de variáveis de decisão \underline{x} sem perda da convexidade.

As variáveis também podem ser representadas por matrizes no lugar de escalares como é o caso da desigualdade de Lyapunov apresentada na Seção 2.3 do Capítulo 2 e reapresentada na inequação EQ 3.81.

$$A^T L + L A < 0 \tag{3.81}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é conhecida e $L = L^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a variável. O formato apresentado na EQ 3.81 é meramente uma maneira mais fácil e usual de representar LMIs em sistemas de controle. Como exemplo, considera-se a matriz variável L e a matriz A cujos elementos são conhecidos, tais que:

$$L = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} \text{ e } A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

Substituindo L e A na EQ 3.81, obtém-se uma inequação equivalente a forma da EQ 3.80, dada a seguir:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 2a_1 & a_2 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2a_3 & (a_1 + a_4) \\ (a_1 + a_4) & 2a_2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 & a_3 \\ a_3 & 2a_4 \end{bmatrix} = F_0 + x_1 F_1 + x_2 F_2 + x_3 F_3 < 0$$

Algumas classes de desigualdades não-lineares também podem ser convertidas em LMIs através do complemento de Schur, conforme ANEXO 1.

Uma desigualdade matricial quadrática dada pela EQ 3.82 também pode ser considerada:

$$A^T L + L A + L B R^{-1} B^T L + Q < 0 \quad (3.82)$$

onde A, B, $Q = Q^T$, $R = R^T > 0$ são matrizes de dimensões compatíveis e $L = L^T$ é a matriz variável. Utilizando o complemento de Schur, a desigualdade na EQ 3.82 pode ser apresentada no formato de LMI a seguir.

$$\begin{bmatrix} -A^T L - L A - Q & L B \\ B^T L & R \end{bmatrix} > 0 \quad (3.83)$$

Esta representação em LMI permite concluir que a EQ 3.82 é convexa na matriz variável L.

Minimizar uma função custo convexa sob restrições do tipo LMI é um problema convexo. De forma particular, apresenta-se o problema de minimização de uma função custo linear do tipo:

$$\begin{aligned} \min_{\underline{x} \in \square^m} \quad & \underline{c}^T \underline{x} \\ \text{sujeito a } & F(\underline{x}) < 0 \end{aligned} \quad (3.84)$$

com \underline{c} um vetor de mesma dimensão que \underline{x} e sendo F uma função afim em \underline{x} . Um grande número de problemas de análise de estabilidade e de desempenho de sistemas dinâmicos e de síntese de controle robusto pode ser formulado como um problema de otimização com restrições LMIs. Em (BOYD et alii, 1994) trata-se de variadas aplicações das técnicas LMI para a teoria de controle. Pelo fato do método LMI apresentar solução via programação linear, algoritmos eficazes, como o concebido a partir do método de pontos interiores, foram implementados e estão descritos em (NEMIROVSKII e GAHINET, 1997), (NESTEROV e NEMIROVSKII, 1994), (VANDENBERGHE e BOYD, 1995) e desenvolvidos em (GAHINET, 1995), sendo utilizados nesta dissertação para resolver numericamente o problema de otimização convexo pelo método LMI.

Existem basicamente três tipos genéricos de problemas envolvendo LMIs apresentados a seguir:

- A procura por um vetor \underline{x} que atenda a LMI dada por $F(\underline{x}) < 0$ denomina-se “problema de viabilidade”.
- Minimizar uma função custo convexa sob uma restrição em LMI é também um problema convexo. Em particular, cita-se como exemplo o “problema de minimização objetivo linear” dado pela EQ 3.84.
- O “problema de minimização de autovalor generalizado” dado na EQ 3.85 pode ser resolvido por técnicas similares à resolução do problema na EQ 3.84.

$$\begin{aligned} \min_{\underline{x} \in \mathbb{R}^m} \quad & \lambda & (3.85) \\ \text{sujeito a: } & F(\underline{x}) < \lambda G(\underline{x}) \\ & G(\underline{x}) > 0 \\ & H(\underline{x}) < 0 \end{aligned}$$

3.5.1 ANÁLISES H_2 E H_∞

As condições para as análises H_2 e H_∞ de um sistema devem obedecer às considerações feitas no Capítulo 2. Quanto à análise H_2 , o sistema é estável e $\|P(s)\|_2^2 < v^2$ se e somente se existem $v > 0$, $L_c > 0$ e $L_o > 0$, tal que:

$$\|P(s)\|_2^2 = \text{tr}(CL_c C^*) < v^2 \text{ para } AL_c + L_c A^* + BB^* < 0 \quad (3.86)$$

$$\|P(s)\|_2^2 = \text{tr}(B^* L_o B) < v^2 \text{ para } A^* L_o + L_o A + C^* C < 0 \quad (3.87)$$

O cálculo de $\|P(s)\|_2^2$ é dado pela minimização de v nos problemas das EQ 2.25 e EQ 2.27, que são equivalentes, respectivamente, das EQ 3.86 e EQ 3.87.

Quanto à análise H_∞ , o sistema é estável e $\|P(s)\|_\infty < \gamma$ se e somente se existir $\gamma > 0$ e $L = L^* > 0$ com $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que sejam atendidas as seguintes LMIs, que são equivalentes a EQ 2.41 e EQ 2.42.

$$\begin{bmatrix} A^*L + LA & LB & C^* \\ B^*L & -\gamma I & D^* \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \text{ e } \begin{bmatrix} AL + LA^* & B & LC^* \\ B^* & -\gamma I & D^* \\ CL & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.88)$$

O cálculo de $\|P(s)\|_\infty$ é dado pela minimização de γ nos problemas das EQ 2.41 e EQ 2.42, que apresentam restrições equivalentes às encontradas na EQ 3.88.

3.5.2 SÍNTESE DE CONTROLADORES

O projeto de um sistema de controle tem como objetivo encontrar um controlador $K(s)$ tal que a planta $P(s)$ seja estabilizada internamente e que os requisitos de rastreamento assintótico e rejeição de distúrbios sejam atendidos. Canais específicos, $(w_i \rightarrow z_j)$ ou $T_{ij}(s)$ com $i, j \in \mathbb{N}_+$, referentes ao desempenho ou a robustez em estabilidade podem ser acrescentados ao modelo original visando atender tais objetivos. Para a solução via LMI do Problema de Controle H_2 / H_∞ é necessário especificar numa estrutura de síntese quais funções de transferência $T_{ij}(s)$ devem ter suas normas H_2 minimizadas e quais devem satisfazer restrições de robustez em estabilidade (representadas pela norma H_∞).

A FIG. 3.4 abaixo mostra a estrutura de síntese, dada uma planta $P(s)$, o respectivo controlador $K(s)$ e as funções de transferência $T_{ij}(s)$. Os sinais \underline{u} , \underline{z} , \underline{y} e \underline{w} designam, respectivamente, o vetor de entrada da planta, o vetor de variáveis de saída controlado, o vetor de medição de saída e um vetor que representa um distúrbio ou entrada exógena na planta.

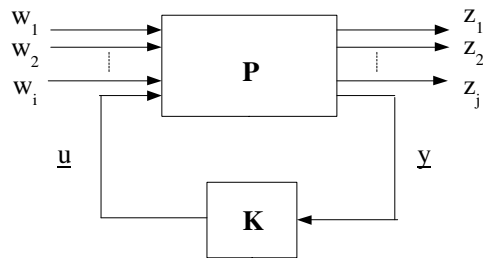


FIG. 3.4 Estrutura de Síntese.

Seja a realização da seguinte planta $P(s)$:

$$\dot{\underline{x}} = \mathbf{A} \underline{x} + \mathbf{B}_1 \underline{w} + \mathbf{B}_2 \underline{u} ; \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.89)$$

$$\underline{z} = \mathbf{C}_1 \underline{x} + \mathbf{D}_{11} \underline{w} + \mathbf{D}_{12} \underline{u}$$

$$\underline{y} = \mathbf{C}_2 \underline{x} + \mathbf{D}_{21} \underline{w}$$

Dado o sistema LIT da EQ 3.89, o problema de controle H_2 / H_∞ consiste em calcular um sistema LIT em malha fechada, considerando a seguinte realização do controlador $K(s)$:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}_k &= A_k \underline{x}_k + B_k \underline{y} ; A_k \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \underline{u} &= C_k \underline{x}_k + D_k \underline{y}\end{aligned}\quad (3.90)$$

tal que as especificações H_2 e H_∞ sejam atendidas por uma família de funções de transferência $T_{w_i \rightarrow z_j}$. Com esse intuito, manipula-se as equações EQ 3.89 e EQ 3.90 tendo em vista o fechamento da malha deste sistema.

Substituindo-se \underline{y} das EQ 3.89 nas EQ 3.90, encontra-se:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}_k &= A_k \underline{x}_k + B_k C_2 \underline{x} + B_k D_{21} \underline{w} \\ \underline{u} &= C_k \underline{x}_k + D_k C_2 \underline{x} + D_k D_{21} \underline{w}\end{aligned}\quad (3.91)$$

Substituindo-se \underline{u} das EQ 3.91 nas EQ 3.89, obtém-se enfim a seguinte realização em espaço de estados em malha fechada da estrutura de síntese dada pela FIG. 3.4:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= (A + B_2 D_k C_2) \underline{x} + B_2 C_k \underline{x}_k + (B_1 + B_2 D_k D_{21}) \underline{w} \\ \dot{\underline{x}}_k &= B_k C_2 \underline{x} + A_k \underline{x}_k + B_k D_{21} \underline{w} \\ \underline{z} &= (C_1 + D_{12} D_k C_2) \underline{x} + D_{12} C_k \underline{x}_k + (D_{11} + D_{12} D_k D_{21}) \underline{w}\end{aligned}\quad (3.92)$$

Portanto, a representação em espaço de estados para a malha fechada é:

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B_1 \\ \hline C_1 & D_{11} \end{array} \right] := \left[\begin{array}{cc|c} A + B_2 D_k C_2 & B_2 C_k & B_1 + B_2 D_k D_{21} \\ B_k C_2 & A_k & B_k D_{21} \\ \hline C_1 + D_{12} D_k C_2 & D_{12} C_k & D_{11} + D_{12} D_k D_{21} \end{array} \right]\quad (3.93)$$

As condições necessárias de síntese para um sistema LIT com realimentação de saída, levando em consideração os objetivos de desempenho ou de robustez em estabilidade para cada FT $T_{w_i \rightarrow z_j}$ da FIG. 3.4 são satisfeitas através das seguintes etapas:

- Substituição da EQ 3.93 nos problema das EQ 2.25 e EQ 2.27 para síntese H_2 (desempenho) e nos problemas das EQ 2.41 e EQ 2.42 para síntese H_∞ (estabilidade), o que introduz as novas variáveis A_k, B_k, C_k e D_k .
- Introdução de uma variável de Lyapunov P comum para todas FT $T_{w_i \rightarrow z_j}$, além das variáveis auxiliares X e Y (partições de P) também comuns a todas essas funções, de forma a garantir a convexidade. Trata-se de um passo conservador, pois a imposição de estabilidade quadrática é uma condição mais forte do que a estabilidade simples. Além disso, podem existir múltiplas funções de Lyapunov (uma para cada canal) o que proporcionaria maior grau de liberdade na busca do controlador.
- Aplicação de transformações de congruência adequadas para cada desigualdade matricial e utilização das mudanças de variáveis de linearização específicas para transformar as condições de síntese BMI ou Desigualdades Matriciais Bilineares (APKARIAN et alii, 2004) em LMI.

Partindo do segundo passo, de acordo com a partição de A na EQ 3.93, a introdução da variável de Lyapunov P e de sua inversa P^{-1} em malha fechada é dada pelas matrizes das EQ 3.94 e EQ 3.95 onde N , M e $*$ são matrizes quaisquer, sendo as duas primeiras inversíveis devido à natureza estrita a qual uma LMI encontra-se e a ocorrência de perturbações, conforme observado em (CHILALI e GAHINET, 1995):

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T & * \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & * \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

Após a imposição da igualdade $PP^{-1} = I$ e introduzindo a notação:

$$\begin{aligned} P \Pi_Y &= \Pi_X \\ P^{-1} \Pi_X &= \Pi_Y \end{aligned} \quad (3.96)$$

percebe-se que as EQ 3.97 a seguir são satisfeitas.

$$\Pi_Y = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M}^T & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \Pi_X = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{X} \\ 0 & \mathbf{N}^T \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

O terceiro passo é dado pela aplicação das transformações de congruência, conforme as EQ 3.98:

$$\begin{bmatrix} \Pi_X^T A \Pi_Y & \Pi_X^T B_1 \\ C_1 \Pi_Y & D_{11} \end{bmatrix} \text{ e } \Pi_Y^T P \Pi_Y \quad (3.98)$$

nas matrizes da realização em espaço de estados em malha fechada na EQ 3.93 gerando os termos dados pelas EQ 3.99:

- $\Pi_Y^T P A \Pi_Y = \Pi_X^T A \Pi_Y =$

$$\begin{bmatrix} A \mathbf{Y} + B_2 D_k C_2 \mathbf{Y} + B_2 C_k M^T & A + B_2 D_k C_2 \\ \mathbf{X}(A + B_2 D_k C_2) \mathbf{Y} + N B_k C_2 \mathbf{Y} + \mathbf{X} B_2 C_k M^T + N A_k M^T & \mathbf{X}(A + B_2 D_k C_2) + N B_k C_2 \end{bmatrix}$$
- $\Pi_Y^T P B_1 = \Pi_X^T B_1 =$

$$\begin{bmatrix} B_1 + B_2 D_k D_{21} \\ \mathbf{X} B_1 + \mathbf{X} B_2 D_k D_{21} + N B_k D_{21} \end{bmatrix}$$
- $C_1 \Pi_Y =$

$$\begin{bmatrix} C_1 \mathbf{Y} + D_{12} D_k C_2 \mathbf{Y} + D_{12} C_k M^T & C_1 + D_{12} D_k C_2 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \quad \Pi_Y^T P \Pi_Y = \Pi_Y^T \Pi_X = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} \quad (3.99)$$

Logo em seguida, efetuam-se as seguintes mudanças de variáveis para linearização do problema:

$$\hat{\mathbf{A}}_k := \mathbf{N} \mathbf{A}_k \mathbf{M}^T + \mathbf{N} \mathbf{B}_k \mathbf{C}_2 \mathbf{Y} + \mathbf{X} \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_k \mathbf{M}^T + \mathbf{X} (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_k \mathbf{C}_2) \mathbf{Y} \quad (3.100)$$

$$\hat{\mathbf{B}}_k := \mathbf{N} \mathbf{B}_k + \mathbf{X} \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_k$$

$$\hat{\mathbf{C}}_k := \mathbf{C}_k \mathbf{M}^T + \mathbf{D}_k \mathbf{C}_2 \mathbf{Y}$$

$$\hat{\mathbf{D}}_k := \mathbf{D}_k$$

Substituindo as variáveis das EQ 3.100 nas EQ 3.99, os termos, após a parametrização, passam a ter o seguinte formato:

$$\Pi_Y^T P \mathbf{A} \Pi_Y = \Pi_X^T \mathbf{A} \Pi_Y = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \mathbf{Y} + \mathbf{B}_2 \hat{\mathbf{C}}_k & \mathbf{A} + \mathbf{B}_2 \hat{\mathbf{D}}_k \mathbf{C}_2 \\ \hat{\mathbf{A}}_k & \mathbf{X} \mathbf{A} + \hat{\mathbf{B}}_k \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

$$\Pi_Y^T P \mathbf{B}_1 = \Pi_X^T \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \hat{\mathbf{D}}_k \mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{X} \mathbf{B}_1 + \hat{\mathbf{B}}_k \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_1 \Pi_Y = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12} \hat{\mathbf{C}}_k & \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12} \hat{\mathbf{D}}_k \mathbf{C}_2 \end{bmatrix}$$

$$\Pi_Y^T P \Pi_Y = \Pi_Y^T \Pi_X = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix}$$

O problema, agora, se apresenta linearizado nas novas variáveis \mathbf{X} , \mathbf{Y} , $\hat{\mathbf{A}}_k$, $\hat{\mathbf{B}}_k$, $\hat{\mathbf{C}}_k$ e $\hat{\mathbf{D}}_k$. Estas variáveis também aparecem nas especificações para as normas H_2 e H_∞ apresentadas adiante.

Tendo em vista a comparação de resultados encontrados como objetivo principal desta dissertação, são apresentadas as LMIs que representam as especificações referentes à norma H_2 ,

sem a preocupação de demonstrá-las. A transformação de congruência para obtenção das duas primeiras LMIs foi: $\text{diag}(\Pi_Y, I)$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}_2\hat{\mathbf{C}}_k + (\mathbf{B}_2\hat{\mathbf{C}}_k)^T & \hat{\mathbf{A}}_k^T + (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\hat{\mathbf{D}}_k\mathbf{C}_2) & (\mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\hat{\mathbf{C}}_k)^T \\ \hat{\mathbf{A}}_k + (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\hat{\mathbf{D}}_k\mathbf{C}_2)^T & \mathbf{A}^T\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A} + \hat{\mathbf{B}}_k\mathbf{C}_2 + (\hat{\mathbf{B}}_k\mathbf{C}_2)^T & (\mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\hat{\mathbf{D}}_k\mathbf{C}_2)^T \\ \mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\hat{\mathbf{C}}_k & \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\hat{\mathbf{D}}_k\mathbf{C}_2 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} & \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\hat{\mathbf{D}}_k\mathbf{D}_{21} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} & \mathbf{X}\mathbf{B}_1 + \hat{\mathbf{B}}_k\mathbf{D}_{21} \\ (\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\hat{\mathbf{D}}_k\mathbf{D}_{21})^T & (\mathbf{X}\mathbf{B}_1 + \hat{\mathbf{B}}_k\mathbf{D}_{21})^T & \mathbf{Q} \end{bmatrix} > 0 \quad (3.102)$$

$$\text{tr}[\mathbf{Q}] < \nu \ ; \ \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12}\hat{\mathbf{D}}_k\mathbf{D}_{21} = 0 \ ; \ \begin{bmatrix} \mathbf{Y} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{X} \end{bmatrix} > 0$$

Da mesma forma como foram discutidas as especificações para a norma H_2 , as LMIs que representam as especificações referentes à norma H_∞ , são apresentadas sem a preocupação de demonstrá-las. A transformação de congruência para obtenção desta primeira LMI foi: $\text{diag}(\Pi_Y, I, I)$, gerando uma matriz simétrica onde os termos transpostos na EQ 3.103 a seguir são representados por asteriscos.

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}_2\hat{\mathbf{C}}_k + (\mathbf{B}_2\hat{\mathbf{C}}_k)^T & \hat{\mathbf{A}}_k^T + (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\hat{\mathbf{D}}_k\mathbf{C}_2) & * & * \\
\hat{\mathbf{A}}_k + (\mathbf{A} + \mathbf{B}_2\hat{\mathbf{D}}_k\mathbf{C}_2)^T & \mathbf{A}^T\mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A} + \hat{\mathbf{B}}_k\mathbf{C}_2 + (\hat{\mathbf{B}}_k\mathbf{C}_2)^T & * & * \\
(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2\hat{\mathbf{D}}_k\mathbf{D}_{21})^T & (\mathbf{X}\mathbf{B}_1 + \hat{\mathbf{B}}_k\mathbf{D}_{21})^T & -\gamma\mathbf{I} & * \\
\mathbf{C}_1\mathbf{Y} + \mathbf{D}_{12}\hat{\mathbf{C}}_k & \mathbf{C}_1 + \mathbf{D}_{12}\hat{\mathbf{D}}_k\mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{11} + \mathbf{D}_{12}\hat{\mathbf{D}}_k\mathbf{D}_{21} & -\gamma\mathbf{I}
\end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{Y} & \mathbf{I} \\
\mathbf{I} & \mathbf{X}
\end{bmatrix} > 0 \Leftrightarrow \mathbf{P} \gg 0 \quad (3.103)$$

Estas especificações são utilizadas pelo processo de otimização na forma de restrição $F(\underline{x})$ dada pelo problema na EQ 3.84.

O problema de controle H_2 / H_∞ , neste caso, se resume em projetar um controlador, através da realimentação $\underline{u} = \mathbf{K}\underline{y}$, tal que sejam atendidas as seguintes condições:

- Manter a norma H_∞ de uma FT, $T_\infty(s)$, atendendo a uma determinada restrição $\|T_\infty(s)\|_\infty < \gamma$ sendo $\gamma > 0$ um valor escalar.
- Minimizar a norma H_2 de uma FT, $T_2(s)$, sujeito à restrição imposta a $T_\infty(s)$, através de um critério de compromisso dado por:

$$\alpha \|T_\infty\|_\infty^2 + \beta \|T_2\|_2^2 \quad (3.104)$$

sendo $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$.

Obtida a realização $\hat{\mathbf{A}}_k$, $\hat{\mathbf{B}}_k$, $\hat{\mathbf{C}}_k$ e $\hat{\mathbf{D}}_k$ e conhecidos os valores de \mathbf{X} e \mathbf{Y} , falta determinar somente os valores das variáveis \mathbf{M} e \mathbf{N} para iniciar a reconstrução do controlador que soluciona problemas de controle via LMI.

Da equação $\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{I}$ e conhecendo as matrizes $\mathbf{\Pi}_Y$ e $\mathbf{\Pi}_X$ das EQ 3.97, encontra-se as variáveis \mathbf{M} e \mathbf{N} , dadas por:

$$\begin{aligned}
 USV^T &= I - XY \\
 N &= U(S)^{1/2} \\
 M &= V(S)^{1/2}
 \end{aligned}
 \tag{3.105}$$

onde $\text{diag}(S) = \sigma(I - XY)$, ou seja, S é uma matriz diagonal com elementos não nulos e decrescentes dada pelos valores singulares de $I - XY$. U e V são matrizes unitárias.

A substituição da realização $(\hat{A}_k, \hat{B}_k, \hat{C}_k, \hat{D}_k)$ e das variáveis (X, Y, M^T, N) nas EQ 3.100 propicia a obtenção do controlador em questão, dado pela realização (A_k, B_k, C_k, D_k) .

4 EXEMPLOS DE PROBLEMA DE CONTROLE H_2/H_∞

A formulação do problema em questão para os exemplos deste capítulo parte do sistema de controle apresentado na FIG. 4.1, onde P representa a planta e K o controlador. As variáveis de entrada são w (entrada exógena) e u (entrada controlada). As variáveis de saída são z_∞ e z_2 (saídas externas) e y (variável medida).

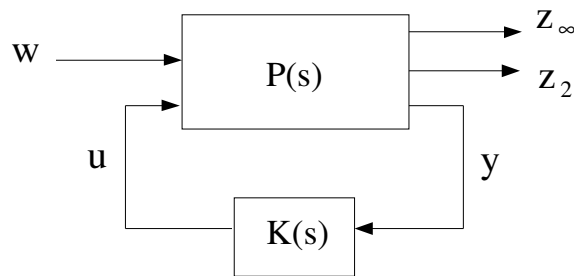


FIG. 4.1 Sistema de controle realimentado com canais de saída H_∞ e H_2 .

A representação em espaço de estados da planta $P(s)$, semelhante às equações dadas pelas EQ 3.89, é:

$$\begin{aligned}
 \dot{\underline{x}} &= A \underline{x} + B_1 w + B_2 u \\
 z_\infty &= C_\infty \underline{x} + D_{\infty 1} w + D_{\infty 2} u \\
 z_2 &= C_2 \underline{x} + D_{21} w + D_{22} u \\
 y &= C_y \underline{x} + D_{y1} w
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

As representações em espaço de estados de $K(s)$ e do sistema realimentado em malha fechada são, respectivamente, as mesmas dadas pelas EQ 3.90 e EQ 3.93, observada a coerência entre as notações.

A resolução do problema de controle ótimo H_∞ e H_2 pela metodologia LMI no sistema de controle apresentado na FIG. 4.1 ocorre, respectivamente, através das EQ 2.41 ou EQ 2.42 e das EQ 2.23 ou EQ 2.24, onde A , B , C e D naquelas equações representam uma realização do sistema realimentado em malha fechada. A resolução do problema de controle H_2 / H_∞ pela metodologia

LMI recai no uso das EQ 3.102 e EQ 3.103, sendo que nessa última a variável γ que representa a restrição em estabilidade deve ter valor previamente definido.

A metodologia EBPE / CGO também pode ser aplicada na resolução de problemas de controle ótimo H_∞ e H_2 , inclusive quando não houver possibilidade alguma de resolver de forma analítica esses problemas. A partir da representação em espaço de estados da planta $P(s)$, dada pelas EQ 4.1, obtém-se os elementos que constituem a matriz de transferência do sistema em malha aberta. Por meio de operações algébricas nesses elementos são obtidas as matrizes Q_A , Q_B e Q_C , dadas pelas EQ 3.12. Uma simples verificação na matriz de transferência do sistema em malha fechada para controladores estabilizantes, dada pela EQ 3.11, mostra que essas matrizes fazem parte da FT que relaciona o sinal de entrada w com o sinal de saída $\underline{z} = [z_\infty \quad z_2]^T$. Essa função pode ser escrita no parâmetro de Youla em V , conforme a EQ 3.11 e repetida a seguir:

$$T_{zw} = Q_A V Q_B + Q_C \quad (4.2)$$

Pela análise da EQ 4.2, obtém-se as funções custo J_2 e J_∞ . O controlador K da FIG 4.1 é calculado a partir de operações algébricas envolvendo o parâmetro livre V , conforme EQ 3.10, e representado a seguir:

$$K = (V \tilde{N}_2 + Y_0)^{-1} (V \tilde{D}_2 - X_0) \quad (4.3)$$

A metodologia EBPE / CGO também é utilizada para solucionar numericamente o problema de controle H_2 / H_∞ . Neste caso, procura-se minimizar a função custo J_2 com relação ao parâmetro livre V , sujeito a uma restrição γ imposta a função custo J_∞ . Para facilitar a aplicação desta metodologia elimina-se a restrição na função custo J_∞ , por meio da substituição da função custo J_2 por uma função de custo composto ou função penalidade, que leva em consideração tal restrição. O problema então, passa a ser de minimização dessa função penalidade dada pela EQ 3.49, sujeito a construção de um parâmetro livre V estável, conforme as EQ 3.54 e EQ 3.66.

Nos exemplos apresentados a seguir são comparados os resultados encontrados pela resolução de forma analítica (AN) ou por meio da aplicação das técnicas (EBPE / CGO) com os obtidos pela aplicação da técnica (LMI).

O cálculo de problemas de controle ótimo via AN ou por EBPE / CGO retorna como solução o parâmetro livre V . Esse parâmetro é representado por $K(s)$ nas EQ 3.17 e EQ 3.36, onde $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ e $D(s)$ nestas equações são FTs previamente determinadas de acordo com o problema tratado.

Por outro lado, o cálculo de problemas de controle ótimo via LMI retorna como solução o controlador K da FIG 4.1. Uma realização deste controlador é parametrizada por \hat{A}_k , \hat{B}_k , \hat{C}_k e \hat{D}_k nas EQ 3.102 e EQ 3.103, onde todos os outros elementos dessas matrizes se referem ao modelo da planta e às partições X e Y da variável de Lyapunov P .

As soluções V e K dessas técnicas se relacionam através da EQ 4.3. A função de custo da EQ 3.17 equivale às LMIs das EQ 3.102. Da mesma forma, a função de custo da EQ 3.36 equivale às LMIs das EQ 3.103. Pelo fato de se utilizar algoritmos diferentes no cálculo dessas normas, surge a necessidade de conferir os resultados obtidos. Para tanto utiliza-se os seguintes procedimentos:

- A aplicação de uma realização do controlador K , obtido a partir do parâmetro livre V que soluciona as EQ 3.17 e EQ 3.36, respectivamente nas EQ 3.102 e EQ 3.103 é representado por (AN \rightarrow LMI ou EBPE / CGO \rightarrow LMI) em algumas tabelas dos exemplos deste capítulo;
- A aplicação do parâmetro livre V , obtido a partir do controlador K que soluciona as especificações das EQ 3.102 e EQ 3.103, respectivamente nas EQ 3.17 e EQ 3.36 é representado por (LMI \rightarrow AN ou LMI \rightarrow EBPE / CGO) em algumas tabelas dos exemplos deste capítulo.

Todos os resultados dos problemas de controle, além de informações quanto a ordem e estabilidade de controladores, estão apresentados nas tabelas.

A resolução de problemas de controle por LMI gera um controlador que será denominado K_{LMI} . O uso do controlador K_{LMI} para aplicação nas funções custo J_2 e J_∞ somente é possível após sua conversão para V_{LMI} , conforme manipulação na EQ 4.3. Por outro lado, a resolução de forma analítica ou por EBPE / CGO de problemas de controle retorna os parâmetros livre V que serão denominados, respectivamente, por V_{AN} e V_i , onde i representa a ordem. Para encontrar o

controlador K_{AN} ou K_i que será aplicado na malha fechada em LMI, substitui-se V_{AN} ou V_i na EQ 4.3. A partir desse momento, nesta dissertação, o parâmetro livre será também denominado controlador intermediário.

4.1 APLICAÇÃO DAS TÉCNICAS EBPE / CGO E LMI EM UM EXEMPLO ACADÊMICO

O exemplo acadêmico apresentado a seguir é sugerido em (SALES e CORRÊA, 1997). Considerando a planta $P(s)$ em malha aberta dada pela EQ 4.1, representada por:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}; \\ C_\infty &= [0 \quad 1]; \quad C_2 = [4 \quad 1]; \quad C_y = [1 \quad -1]; \\ D_{\infty 1} &= D_{\infty 2} = 1; \quad D_{21} = D_{22} = 0; \quad D_{y1} = 5; \end{aligned}$$

Deseja-se resolver o seguinte problema de controle H_2 / H_∞ :

$$\begin{aligned} \min_{V \in \mathbb{RH}_\infty^+} \left\| T_{w \rightarrow z_2} \right\|_2^2 &= \left\| A_f + B_f V \right\|_2^2 & (4.4) \\ \text{sujeito a } \left\| T_{w \rightarrow z_\infty} \right\|_\infty &= \left\| C_f V + D_f \right\|_\infty \leq \gamma \end{aligned}$$

Para que seja possível estimar um valor adequado de restrição γ desenvolve-se inicialmente a resolução dos problemas de controle ótimo H_2 e H_∞ , tanto pela metodologia LMI quanto pela metodologia EBPE / CGO. Esta última será substituída pela solução analítica, caso seja possível.

4.1.1 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO H_2

Neste exemplo o problema de controle ótimo H_2 foi resolvido de forma analítica, conforme o desenvolvimento apresentado na Seção 3.2.2. A TAB. 4.1 apresenta os resultados calculados para as funções custo J_2 e J_∞ pela aplicação das diversas técnicas e dados dos controladores K_{AN} e K_{LMI} :

TAB. 4.1 Resultados do problema de controle ótimo H_2 em (SALES e CORRÊA, 1997).

TÉCNICA	$\ T_{w \rightarrow z_2}\ _2^2$	$\ T_{w \rightarrow z_\infty}\ _\infty$	CONTROLADOR	
			ORDEM	CARACTERÍSTICA
AN	5011,1111	114,2880	2	Estável
LMI	5011,1144	114,3621	2	Estável
(AN \rightarrow LMI)	5011,1111	114,3333	2	Estável
(LMI \rightarrow AN)	5011,1144	114,3915	2	Estável

Os controladores que solucionam este problema são dados, aproximadamente, por:

$$K_{AN} = \frac{-2,467(s-3,724)(s+0,334)}{(s+18,533)(s+0,334)} \quad \text{e} \quad K_{LMI} = \frac{-2,489(s+120,797)(s-3,724)}{(s+121,915)(s+18,531)}$$

A opção de apresentar os controladores com somente três casas decimais após a vírgula não permitiu mostrar a diferença entre um pólo e um zero aparentemente idênticos no controlador K_{AN} .

Percebe-se, por inspeção da TAB. 4.1 que o valor calculado para a função custo J_2 pela resolução analítica do problema é menor que o resultado encontrado pela aplicação da metodologia LMI. O valor calculado de forma analítica, a menos da precisão numérica, é o valor ótimo já que o problema de controle ótimo H_2 é resolvido pela minimização da função custo J_2 .

A constatação da resolução analítica pode ser comprovada pela aplicação do controlador K_{AN} estável obtido a partir de V_{AN} na análise H_2 em LMI, representada na TAB. 4.1 por (AN \rightarrow LMI). O resultado foi o mesmo que o calculado de forma analítica.

Por outro lado, o controlador intermediário V_{LMI} obtido a partir do controlador K_{LMI} , quando aplicado na função custo J_2 , apresenta o mesmo resultado encontrado pela metodologia LMI. Esse resultado é representado na TAB. 4.1 por (LMI \rightarrow AN).

4.1.2 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO H_∞

Este exemplo também reúne condições para a resolução do problema de controle ótimo H_∞ de forma analítica, cujo o desenvolvimento é apresentado na Seção 3.3.2. A TAB. 4.2 apresenta os resultados calculados para as funções custo J_2 e J_∞ pela aplicação das diversas técnicas e dados dos controladores K_{AN} e K_{LMI} :

TAB. 4.2 Resultados do problema de controle ótimo H_∞ em (SALES e CORRÊA, 1997).

TÉCNICA	$\ T_{w \rightarrow z_\infty}\ _\infty$	$\ T_{w \rightarrow z_2}\ _2^2$	CONTROLADOR	
			ORDEM	CARACTERÍSTICA
AN	37,9585	9213,5842	1	Estável
LMI	37,9130	9190,6025	2	Estável
(AN \rightarrow LMI)	37,8845	9213,5842	1	Estável
(LMI \rightarrow AN)	37,9790	9190,6145	2	Estável

Os controladores que solucionam este problema são dados, aproximadamente, por:

$$K_{AN} = \frac{-7,777(s - 2,950)}{(s + 47,076)} \quad \text{e} \quad K_{LMI} = \frac{-0,2(s + 128001,697)(s - 2,951)}{(s + 3267,590)(s + 47,452)}$$

Percebe-se, por inspeção da TAB. 4.2 que o valor calculado para a função custo J_∞ pela resolução analítica do problema é maior que o resultado encontrado pela aplicação da metodologia LMI. Isto se deve provavelmente a problemas de condicionamento numérico causados pelo uso de sub-rotinas, que reduzem a ordem via realização balanceada, nas funções C_f e D_f da função custo J_∞ das EQ 4.4. Superado tais problemas, certamente o valor calculado de forma analítica, a menos da precisão numérica, é o valor ótimo.

Apesar disso, constata-se que a solução calculada analiticamente pode ser comprovada ao se aplicar o controlador K_{AN} estável na análise H_∞ em LMI, representada na TAB. 4.2 por (AN \rightarrow LMI). O resultado encontrado é o que mais se aproxima do valor ótimo, tendo em vista que o problema de controle ótimo H_∞ tem como objetivo a minimização da função custo J_∞ .

Por outro lado, o valor calculado pela aplicação do controlador intermediário V_{LMI} na função custo J_∞ é alto, confirmando a existência de problemas de condicionamento numérico nas funções C_f e D_f . Esse resultado é representado na TAB. 4.2 por (LMI \rightarrow AN).

A inspeção da função $T_{w \rightarrow z_\infty}$ a seguir reserva um detalhe interessante, isto é, a função $T_{w \rightarrow z_\infty}$ é do tipo “all-pass”, onde os pólos e zeros se apresentam localizados de forma simétrica com relação ao eixo imaginário.

$$T_{w \rightarrow z_\infty} = \frac{-37,8845(s - 3,510)(s - 0,681)}{(s + 3,510)(s + 0,681)}$$

4.1.3 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE H_2 / H_∞

Uma simples inspeção dos resultados nas tabelas TAB. 4.1 e TAB. 4.2, permite determinar quais são os limitantes superiores e inferiores para as funções custo J_2 e J_∞ . Considera-se como valor ótimo para a função custo J_∞ o menor resultado encontrado na TAB 4.2. Supondo uma degradação de 50% neste resultado, a restrição imposta a função custo J_∞ é dada, aproximadamente, por $\gamma = 52,43$.

O problema de controle H_2 / H_∞ é apresentado pelas EQ 4.4. Este problema, em geral, não possui solução analítica. Apesar disso, uma solução sub-ótima pode ser encontrada por meio de técnicas numéricas de computação. A TAB 4.3 a seguir apresenta os valores encontrados pela aplicação da metodologia EBPE. Considerou-se como solução sub-ótima do problema o resultado dado pelo controlador intermediário de maior ordem nessa tabela.

TAB. 4.3 Resultados do problema de controle H_2 / H_∞ em (SALES e CORRÊA, 1997).

CONTROLADOR INTERMEDIÁRIO	$\ T_{w \rightarrow z_2}\ _2^2$	$\ T_{w \rightarrow z_\infty}\ _\infty$	ORDEM
V_{S-L1}	6098,4943	52,4299	1
V_{S-L2}	5987,5559	52,4300	2
V_{S-L3}	5938,4476	52,4300	3
V_{S-L4}	5931,5085	52,4299	4

Por inspeção da TAB. 4.3 o controlador intermediário de maior ordem é dado por V_{S-L4} e o resultado encontrado para a função custo J_2 foi considerado satisfatório para a resolução deste problema de controle H_2 / H_∞ com restrição ($\gamma = 52,43$), por ser inferior ao valor apresentado em (SALES e CORRÊA, 1997).

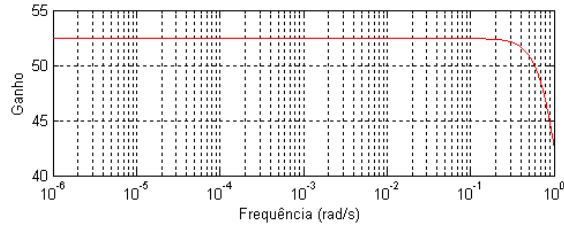
O controlador intermediário V_{S-L4} , estável, é dado por:

$$V_{S-L4} = \frac{-3,303(s - 3,929)(s + 1,529 + 0,610i)(s + 1,529 - 0,610i)(s + 0,517)}{(s + 1)^4}$$

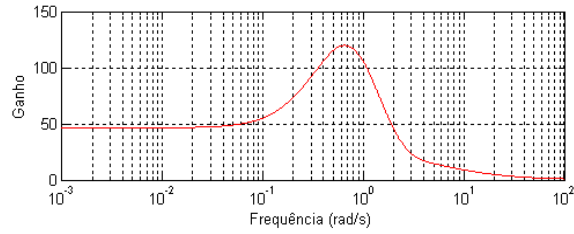
A tentativa de aplicação da metodologia LMI para resolução deste problema não obteve resultado, tendo sido verificado que o problema é inviável. Tal fato não permite a realização de comparações entre as técnicas em questão, o que representa uma limitação do método LMI. Um melhor tratamento algébrico na estrutura utilizada para resolução pela técnica LMI talvez

possibilite a eliminação de problemas de condicionamento numérico apresentados durante o processo de obtenção dos resultados.

Os Diagramas de Bode das funções $T_{w \rightarrow z_2}$ e $T_{w \rightarrow z_\infty}$, obtidas pelo uso de V_{S-L1} e V_{S-L4} que foram encontrados pela aplicação da metodologia EBPE, são representados respectivamente pelas FIG 4.2 e FIG 4.3. A área formada sob a curva do diagrama de $T_{w \rightarrow z_2}$ é proporcional ao valor da norma H_2 de $T_{w \rightarrow z_2}$. O valor de pico no diagrama de $T_{w \rightarrow z_\infty}$ representa o valor da norma H_∞ de $T_{w \rightarrow z_\infty}$. A partir da visualização desses diagramas e dos resultados da TAB. 4.3 constata-se que a medida que a ordem de V cresce, o valor de J_2 diminui acarretando um melhor resultado. Neste caso, verifica-se que o resultado obtido pelo uso de V_{S-L4} foi melhor que o obtido por V_{S-L1} .

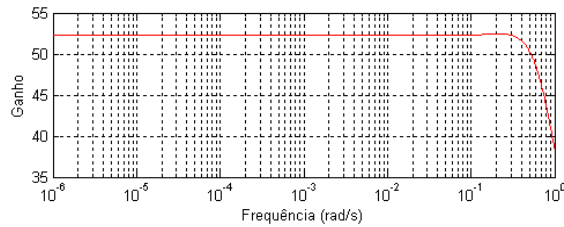


(a)

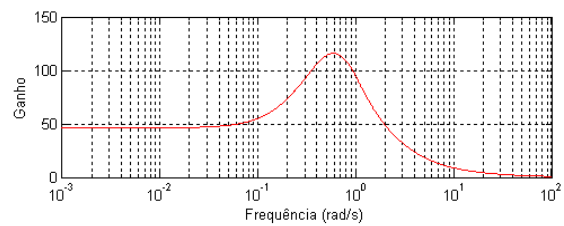


(b)

FIG. 4.2 Diagramas de Bode relativos ao controlador intermediário V_{S-L1} . (a) da função $T_{w \rightarrow z_\infty}$ relativa ao canal H_∞ ; (b) da função $T_{w \rightarrow z_2}$ relativa ao canal H_2 .



(a)



(b)

FIG. 4.3 Diagramas de Bode relativos ao controlador intermediário V_{S-L4} . (a) da função $T_{w \rightarrow z_\infty}$ relativa ao canal H_∞ ; (b) da função $T_{w \rightarrow z_2}$ relativa ao canal H_2 .

4.2 APLICAÇÃO DAS TÉCNICAS EBPE / CGO E LMI EM UM MODELO DE MÍSSIL

4.2.1 CONCEITOS BÁSICOS

Os conceitos básicos apresentados de forma resumida nesta seção estão baseados em (SOUSA, 1996) e servem para dar uma noção geral sobre os parâmetros envolvidos no exemplo de modelo linearizado de um míssil a ser tratado mais adiante.

O problema de controle H_2 / H_∞ aplicado a um míssil tem como objetivo o projeto do autopiloto, tendo em vista que sua trajetória está sujeita a atuação de perturbações. O autopiloto é a parte do míssil responsável por garantir que o alvo seja atingido com maior precisão, isto é, por guiar o míssil. Para a caracterização de um míssil devem ser considerados os componentes que dizem respeito à estrutura, aerodinâmica, propulsão e guiagem.

A estrutura deve suportar os esforços aos quais o míssil está submetido, além de transportar e proteger mecanicamente a cabeça de combate e equipamentos que constituem os sistemas de guiagem e propulsão.

A aerodinâmica de um míssil é composta por um corpo (fuselagem), superfícies de sustentação (asas) e de controle. O perfil aerodinâmico de um míssil deve ser projetado de modo que as ordens de guiagem oriundas do piloto automático (controlador) sejam obedecidas. O escoamento de ar em torno da estrutura do míssil durante o voo dá origem às forças de sustentação e de arrasto em contraposição, respectivamente, as forças de peso e de empuxo. As forças de sustentação e de arrasto são aplicadas no centro de pressão do míssil, enquanto as forças de peso e de empuxo são aplicadas no centro de gravidade.

Através do sistema de propulsão define-se as características de tipo, velocidade e distância do alvo a ser atingido por um míssil. São utilizados normalmente combustíveis sólidos como propelente para mísseis. Estes combustíveis representam, em geral, de 30 a 50% do seu peso total.

A guiagem de um míssil consiste nos comandos de correção de sua trajetória tendo como objetivo atingir precisamente o alvo. A guiagem pode ser dividida em sistemas de controle de trajetória e de atitude em voo.

O míssil deve apresentar alta manobrabilidade, o que melhora consideravelmente seu desempenho. Neste caso, a configuração ideal a ser utilizada é a de “controle na cauda”, cujo controle é realizado por comandos do ângulo do profundor (δ) em graus, formado conforme o movimento das aletas na cauda do míssil e da aceleração vertical (η) em g.

A estabilidade de um míssil é definida como a capacidade de retorno à condição de equilíbrio durante o voo, após sofrer algum tipo de perturbação. A condição de estabilidade de um míssil é determinada pela posição de seus centros de gravidade e de pressão. A estabilidade é garantida somente quando o centro de gravidade está a frente do centro de pressão. Quanto mais a frente estiver, maior será a garantia de estabilidade e menor será a manobrabilidade, estabelecendo dessa forma um compromisso.

A localização do centro de gravidade é função da localização de diversos componentes do míssil e do consumo de combustível durante o voo, enquanto a localização do centro de pressão depende de parâmetros como o número de Mach (velocidade do míssil por velocidade do som) e ângulo de ataque. O ângulo de ataque (α) varia normalmente entre 0° e 20° . A FIG. 4.4 apresenta um esquema simplificado do míssil:

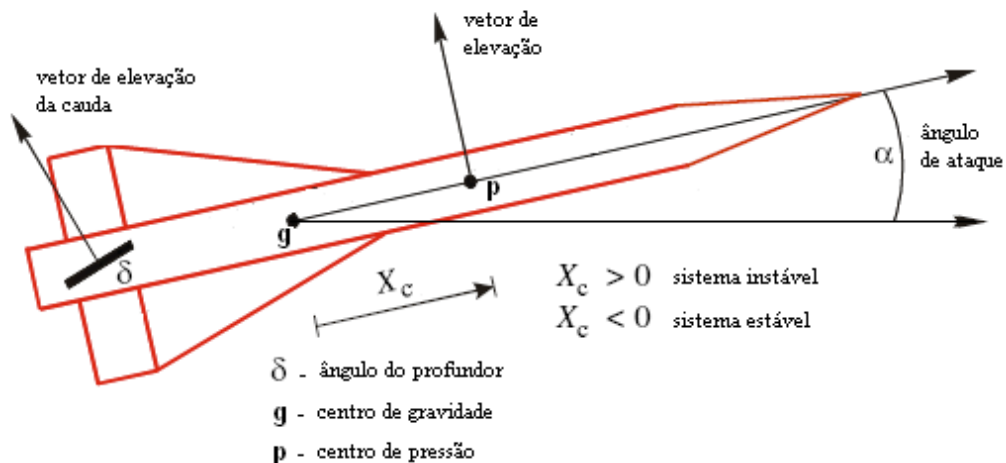


FIG. 4.4 Esquema simplificado do míssil.

A atitude apresentada pelo míssil durante a trajetória de vôo está diretamente relacionada com a deflexão de suas superfícies de controle. A FIG. 4.5 relaciona tais deflexões com seus respectivos ângulos (ataque, deslizamento e rolagem).

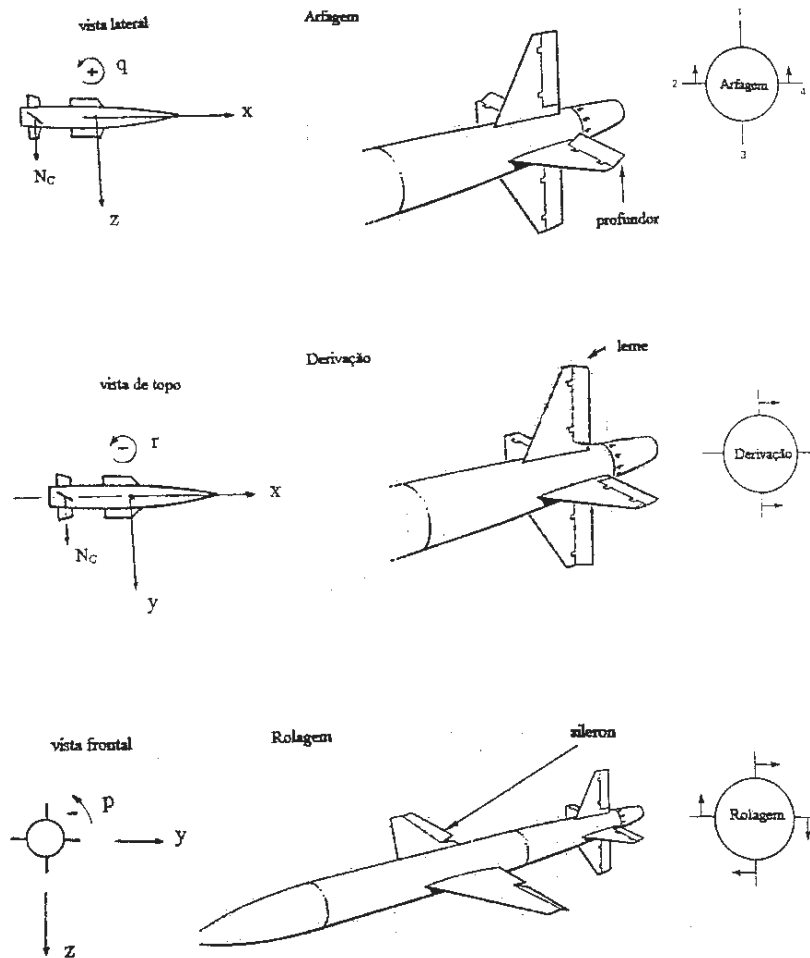


FIG. 4.5 Caracterização dos movimentos de arfagem, derivação e rolagem.

Em termos de guiagem, o controle da trajetória deve garantir a interceptação do alvo em vôo, enquanto o controle de atitude deve manter a atitude e a trajetória ordenadas por controle na arfagem, derivação e rolagem. Estes sistemas de controle dependem da atuação de um piloto automático que é acionado conforme recebimento de informações sobre a aceleração transversal e a posição angular que estabiliza seu movimento em torno do centro de gravidade. Estas

informações são recebidas por meio de sinais gerados internamente ao míssil ou por uma estação de telecomando.

O exemplo de míssil a ser apresentado a seguir, obtido a partir de (REICHERT, 1992) e (NICHOLS et alii, 1993), parte de um modelo não-linear. Este modelo é então linearizado num determinado ponto de operação e em seguida, soluciona-se os problemas de controle ótimo H_2 e H_∞ , além do problema de controle H_2 / H_∞ . Serão escolhidas de forma arbitrária os canais que representam as funções custo J_2 e J_∞ , tendo em vista os objetivos propostos neste trabalho de comparação entre os resultados encontrados via metodologia EBPE / CGO e LMI.

4.2.2 MODELO NÃO-LINEAR DE UM MÍSSIL

A guiagem de um míssil depende da sintetização de um sinal de controle para o atuador. O sinal em questão é representado pelo ângulo do profundor (δ_c), em graus e tem como objetivo controlar a velocidade angular em arfagem (q), em graus por segundo. Todo esse controle é realizado em torno de seu centro de gravidade, assegurando o desempenho desejado para todo o domínio de voo.

Uma descrição não-linear da dinâmica do míssil e do atuador no plano longitudinal, supondo verdadeiro o desacoplamento dos eixos de rumo e de rolagem, é dado por (REICHERT, 1992) e (NICHOLS et alii, 1993) e reproduzido em seguida.

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ \dot{\delta} \\ \ddot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_\alpha & 1 & Z_\delta & 0 \\ M_\alpha & 0 & M_\delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_a^2 & -2\zeta\omega_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_a^2 \end{bmatrix} \delta_c \quad (4.5)$$

$$\begin{bmatrix} \eta \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_\alpha & 0 & N_\delta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ \delta \\ \dot{\delta} \end{bmatrix}$$

onde:

$$\begin{aligned}
 Z_\alpha &= K_\alpha M \cos(\alpha) \left[a_n \alpha^2 + b_n |\alpha| + c_n (2 - M/3) \right] \\
 Z_\delta &= K_\alpha M d_n \cos(\alpha) \\
 M_\alpha &= K_q M^2 \left[a_m \alpha^2 + b_m |\alpha| + c_m (-7 + 8M/3) \right] \\
 M_\delta &= K_q M^2 d_m \\
 N_\alpha &= K_z M^2 \left[a_n \alpha^2 + b_n |\alpha| + c_n (2 - M/3) \right] \\
 N_\delta &= K_z M^2 d_n
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Os estados $\alpha(t)$, $q(t)$, $\delta(t)$ e $\dot{\delta}(t)$ correspondem, respectivamente, ao ângulo de ataque (em graus), a velocidade angular em arfagem (em graus por segundo), o ângulo do profundor (em graus) e sua derivada (em graus por segundo). A aceleração vertical $\eta(t)$ (em unidade de gravidade g) e a velocidade angular em arfagem são as grandezas medidas, enquanto que $\delta_c(t)$ representa o ângulo do profundor comandado (em graus).

Para as simulações não estacionárias a velocidade variável, a trajetória do número de Mach $M(t)$ no tempo é calculada através da seguinte equação:

$$\frac{dM(t)}{dt} = \frac{1}{v_s} \left[-|\eta|g \sin(|\alpha|) + A_x M^2 \cos(\alpha) \right] \tag{4.7}$$

O modelo não-linear dado pelas EQ 4.5, EQ 4.6 e EQ 4.7 representa um míssil que voa a uma altitude de 20000 pés. Deve-se observar que ele é completamente caracterizado pela variável exógena $M(t)$ e pelo ângulo de ataque $\alpha(t)$, que é responsável pela não-linearidade. Esse modelo é também simétrico em relação a $\alpha = 0$. As descrições e os valores numéricos das constantes das EQ 4.6 são fornecidos no ANEXO 2 desta dissertação.

4.2.3 MODELO LINEAR DO MÍSSIL

Para a linearização do modelo do sistema em torno de um ponto de equilíbrio, dado que:

$$\begin{aligned}\underline{x}_0 &= [\alpha_0 \quad q_0 \quad \delta_0 \quad \dot{\delta}_0]^T \\ \underline{u}_0 &= \delta_{c0}\end{aligned}$$

desenvolve-se em séries de Taylor as seguintes equações não-lineares a partir da EQ 4.5:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} &= f(\alpha, q, \delta, M) = \alpha Z_\alpha + \delta Z_\delta + q \\ \dot{q} &= g(\alpha, \delta, M) = \alpha M_\alpha + \delta M_\delta \\ \eta &= h(\alpha, \delta, M) = \alpha N_\alpha + \delta N_\delta\end{aligned}$$

Supondo pequenas as variações $\Delta\alpha$, Δq , $\Delta\delta$ e ΔM , desprezam-se os termos de ordem maior ou igual a 2. Considera-se que $\dot{q}_0 = 0$ e, por conseguinte, que:

$$\delta_{c0} = -\frac{1}{d_m} [a_m \alpha_0^3 + \text{sign}(\alpha_0) b_m \alpha_0^2 + c_m (-7 + 8M/3) \alpha_0]$$

Obtém-se a seguinte representação em espaço de estados:

$$\dot{\underline{x}}_\delta = \begin{bmatrix} \Delta\dot{\alpha} \\ \Delta\dot{q} \\ \Delta\dot{\delta} \\ \Delta\ddot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 1 & A_{13} & 0 \\ A_{21} & 0 & A_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\omega_a^2 & -2\zeta\omega_a \end{bmatrix} \underline{x}_\delta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \omega_a^2 \end{bmatrix} \Delta\delta_c$$

(4.8)

$$\underline{y}_\delta = \begin{bmatrix} \Delta\eta \\ \Delta q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & C_{13} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}_\delta$$

Nesse modelo, as novas variáveis, \underline{x}_δ e \underline{y}_δ , traduzem variações relativas:

$$\underline{x}_\delta = \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta q \\ \Delta\delta \\ \Delta\dot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - \alpha_0 \\ q - q_0 \\ \delta - \delta_0 \\ \dot{\delta} - \dot{\delta}_0 \end{bmatrix} \quad \underline{y}_\delta = \begin{bmatrix} \Delta\eta \\ \Delta q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta - \eta_0 \\ q - q_0 \end{bmatrix}$$

Os elementos das matrizes representadas pelas EQ 4.8 são unicamente determinados por α_0 e M , cujos valores numéricos encontram-se no ANEXO 2. Substituindo-se os valores nas EQ 4.8, chega-se na seguinte representação em espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\alpha} \\ \Delta\dot{q} \\ \Delta\dot{\delta} \\ \Delta\ddot{\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5991 & 1 & -0,1168 & 0 \\ 25,9604 & 0 & -130,9328 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -22500 & -210 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta q \\ \Delta\delta \\ \Delta\dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 22500 \end{bmatrix} \Delta\delta_c + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 22500 \end{bmatrix} u \quad (4.9)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\eta \\ \Delta q \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,0460 & 0 & -0,2038 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta q \\ \Delta\delta \\ \Delta\dot{\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Delta\delta_c + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

A partir das EQ 4.9, destaca-se a planta $P(s)$ em malha aberta, dada pela EQ 4.1, aplicada nesse modelo de míssil linearizado, como se segue.

$$A = \begin{bmatrix} -0,5991 & 1 & -0,1168 & 0 \\ 25,9604 & 0 & -130,9328 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -22500 & -210 \end{bmatrix}; \quad B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 22500 \end{bmatrix};$$

$$C_\infty = [-1,0460 \quad 0 \quad -0,2038 \quad 0]; \quad C_2 = C_y = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0];$$

$$D_{\infty 1} = D_{\infty 2} = 0; \quad D_{21} = D_{22} = 0; \quad D_{y1} = 1;$$

Deseja-se resolver o seguinte problema de controle H_2 / H_∞ aplicado ao exemplo do míssil:

$$\min_{K(s) \in RH_\infty^+} J_2(K) = \left\| T_{\delta_c \rightarrow q} \right\|_2^2 = \left\| A_f + B_f V \right\|_2^2 \quad (4.10)$$

sujeito a $J_\infty(K) = \left\| T_{\delta_c \rightarrow \eta} \right\|_\infty = \left\| C_f V + D_f \right\|_\infty \leq \gamma$

Da mesma forma como apresentado no exemplo anterior, para que seja possível estimar um valor adequado de restrição γ , desenvolve-se inicialmente a resolução dos problemas de controle ótimo H_2 e H_∞ , tanto pela metodologia LMI quanto pela metodologia EBPE / CGO. Esta última será substituída pela solução analítica quando possível.

4.2.4 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO H_2

Este exemplo reuniu condições para ser resolvido de forma analítica o problema de controle ótimo H_2 , conforme o desenvolvimento da Seção 3.2.2. A TAB. 4.4 apresenta os resultados calculados para as funções custo J_2 e J_∞ pela aplicação das diversas técnicas e dados dos controladores K_{AN} e K_{LMI} :

TAB. 4.4 Resultados do problema de controle ótimo H_2 no modelo linearizado do míssil.

TÉCNICA	$\left\ T_{\delta_c \rightarrow q} \right\ _2^2$	$\left\ T_{\delta_c \rightarrow \eta} \right\ _\infty$	CONTROLADOR	
			ORDEM	CARACTERÍSTICA
AN	142,1571	3,5340	4	Estável
LMI	174,7703	4,0201	4	Instável
(AN \rightarrow LMI)	141,4712	3,5596	4	Estável

Os controladores que solucionam este problema são dados, aproximadamente, por:

$$K_{AN} = \frac{25298,963(s + 138,949 - 40,216i)(s + 138,949 + 40,216i)(s + 1,017)(s + 0,00037)}{(s + 23033,490 - 1737,145i)(s + 23033,490 + 1737,145i)(s + 0,623)(s + 0,00038)}$$

e

$$K_{LMI} = \frac{20,960(s - 496938,307)(s + 132,974 - 38,379i)(s + 132,974 + 38,379i)(s + 1,074)}{(s - 483972,283)(s + 288,703 - 671,618i)(s + 288,703 + 671,618i)(s + 0,622)}$$

Percebe-se, por inspeção da TAB. 4.4 que o valor calculado para a função custo J_2 pela resolução analítica do problema é muito menor que o resultado encontrado pela aplicação da metodologia LMI. O valor calculado de forma analítica, a menos da precisão numérica, é o valor ótimo que soluciona o problema.

A constatação da resolução analítica pode ser comprovada ao se aplicar o controlador K_{AN} na análise H_2 em LMI, representada na TAB. 4.4 por (AN \rightarrow LMI). A pequena diferença no resultado se deve, provavelmente, a um problema de condicionamento numérico provocada pelo excesso de passos conservadores para se obter as LMIs das EQ 3.102 e EQ 3.103.

Por outro lado, a aplicação do controlador intermediário V_{LMI} , cuja realização é instável, na função custo J_2 tornou esta instável inviabilizando seu cálculo. Esta instabilidade é causada por problemas de condicionamento numérico na estrutura utilizada para resolução pela técnica LMI. Um melhor tratamento algébrico desta estrutura tornaria possível a eliminação de tais problemas.

4.2.5 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE ÓTIMO H_∞

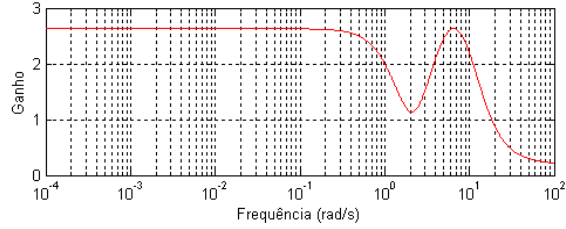
O fato do termo C_f da EQ 4.10 ser, neste modelo de míssil, uma função estritamente própria, faz com que o problema considerado não esteja no formato do problema de Nehari desenvolvido na Seção 3.3.2. O problema em questão não reúne condições para resolução de forma analítica. Apesar disso, uma solução sub-ótima pode ser encontrada por meio de técnicas

numéricas de computação. Com esta finalidade são utilizadas as metodologias EBPE / CGO. Os resultados encontrados pela aplicação da metodologia EBPE são apresentados pela TAB. 4.5:

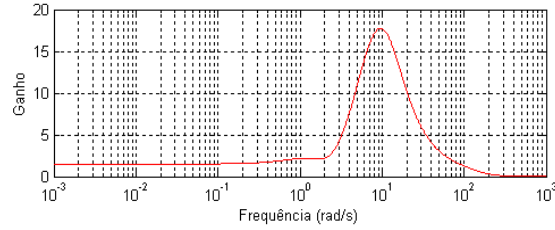
TAB. 4.5 Resultados do problema de controle ótimo H_∞ (EBPE) no modelo do míssil.

CONTROLADOR INTERMEDIÁRIO	$\ T_{\delta_c \rightarrow \eta}\ _\infty$	$\ T_{\delta_c \rightarrow q}\ _2^2$	ORDEM
V_{Mhi-L1}	2,6311	1504,0009	1
V_{Mhi-L2}	2,5202	1491,2126	2
V_{Mhi-L3}	2,3884	1460,4114	3
V_{Mhi-L4}	2,2721	1430,8161	4
V_{Mhi-L5}	2,1660	1402,0837	5
V_{Mhi-L6}	2,1091	1372,5221	6
V_{Mhi-L7}	1,9831	1342,0830	7
V_{Mhi-L8}	1,9255	1329,7448	8

Os Diagramas de Bode das funções $T_{\delta_c \rightarrow \eta}$ e $T_{\delta_c \rightarrow q}$, obtidas pelo uso de V_{Mhi-L1} e V_{Mhi-L8} que foram encontrados pela aplicação da metodologia EBPE, são representados respectivamente pelas FIG 4.6 e FIG 4.7 e têm como objetivo mostrar os resultados encontrados graficamente. A partir da visualização desses diagramas e dos resultados da TAB. 4.5 constata-se que a medida que a ordem de V cresce, o valor de J_∞ e de J_2 diminui acarretando um melhor resultado. Neste caso, verifica-se que os resultados obtidos pelo uso de V_{Mhi-L8} foram melhores que os obtidos por V_{Mhi-L1} .



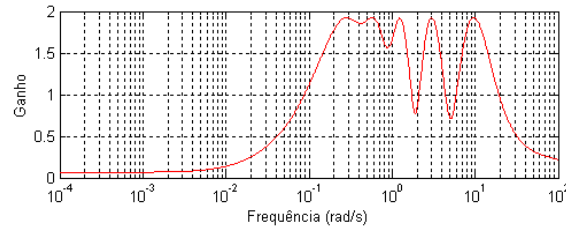
(a)



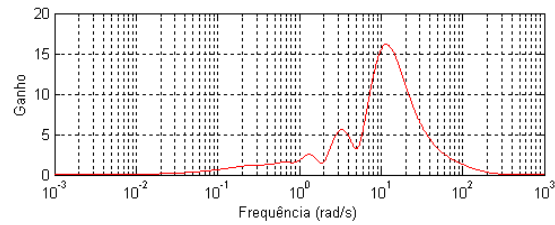
(b)

FIG. 4.6 Diagramas de Bode relativos ao controlador intermediário V_{Mhi-L1} . (a) da função

$T_{\delta_c \rightarrow \eta}$ relativa ao canal H_∞ ; (b) da função $T_{\delta_c \rightarrow q}$ relativa ao canal H_2 .



(a)



(b)

FIG. 4.7 Diagramas de Bode relativos ao controlador intermediário V_{Mhi-L8} . (a) da função

$T_{\delta_c \rightarrow \eta}$ relativa ao canal H_∞ ; (b) da função $T_{\delta_c \rightarrow q}$ relativa ao canal H_2 .

Os resultados encontrados pela aplicação da metodologia CGO são apresentados pela TAB. 4.6:

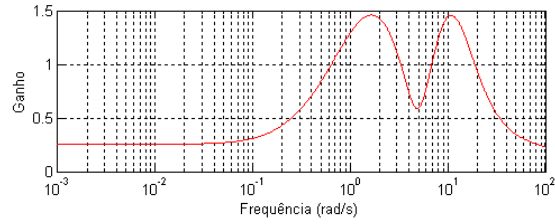
TAB. 4.6 Resultados do problema de controle ótimo H_∞ (CGO) no modelo do míssil.

CONTROLADOR INTERMEDIÁRIO	$\ T_{\delta_c \rightarrow \eta}\ _\infty$	$\ T_{\delta_c \rightarrow q}\ _2^2$	ORDEM
$V_{Mhi-BO1}$	1,4587	1122,5426	1
$V_{Mhi-BO2}$	1,2062	983,3866	2
$V_{Mhi-BO3}$	1,1892	978,1860	3

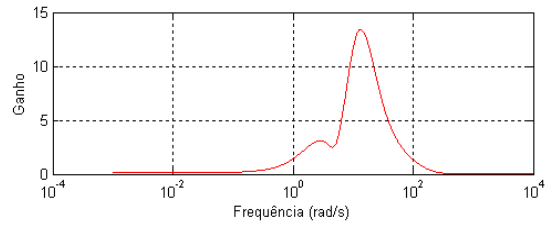
Observa-se, por inspeção das TAB. 4.5 e TAB. 4.6, que o menor resultado foi encontrado pela aplicação da metodologia CGO.

Conforme a Seção 3.4.4, a flexibilidade na escolha de pólos estáveis para a construção do controlador intermediário proporcionada pelo método CGO, resulta na ampliação do espaço solução do problema comparativamente ao método EBPE, para uma mesma ordem. Em resumo, o resultado encontrado pela aplicação do método CGO é sempre menor que o obtido pelo método EBPE.

Os Diagramas de Bode das funções $T_{\delta_c \rightarrow \eta}$ e $T_{\delta_c \rightarrow q}$, obtidas pelo uso de $V_{Mhi-BO1}$ e $V_{Mhi-BO3}$ que foram encontrados pela aplicação da metodologia CGO, são representados respectivamente pelas FIG 4.8 e FIG 4.9 e têm como objetivo mostrar os resultados encontrados graficamente. A partir da visualização desses diagramas e dos resultados da TAB. 4.6 constata-se que a medida que a ordem de V cresce, o valor de J_∞ e de J_2 diminui acarretando um melhor resultado. Neste caso, verifica-se que os resultados obtidos pelo uso de $V_{Mhi-BO3}$ foram melhores que os obtidos por $V_{Mhi-BO1}$.

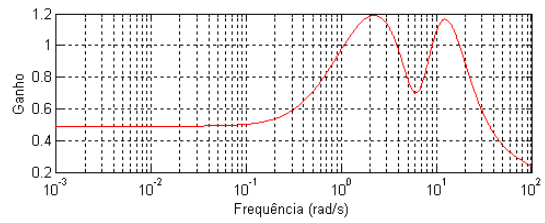


(a)

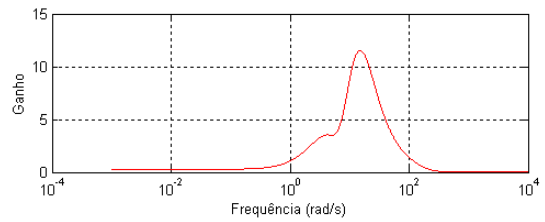


(b)

FIG. 4.8 Diagramas de Bode relativos ao controlador intermediário $V_{\text{Mhi-BO1}}$. (a) da função $T_{\delta_c \rightarrow \eta}$ relativa ao canal H_∞ ; (b) da função $T_{\delta_c \rightarrow q}$ relativa ao canal H_2 .



(a)



(b)

FIG. 4.9 Diagramas de Bode relativos ao controlador intermediário $V_{\text{Mhi-BO3}}$. (a) da função $T_{\delta_c \rightarrow \eta}$ relativa ao canal H_∞ ; (b) da função $T_{\delta_c \rightarrow q}$ relativa ao canal H_2 .

A TAB. 4.7 apresenta os resultados encontrados para as funções custo J_2 e J_∞ pela aplicação das diversas técnicas e dados dos controladores $K_{\text{Mhi-BO3}}$ e K_{LMI} .

TAB. 4.7 Resultados do problema de controle ótimo H_∞ no modelo linearizado do míssil.

TÉCNICA	$\ T_{\delta_c \rightarrow \eta}\ _\infty$	$\ T_{\delta_c \rightarrow q}\ _2^2$	CONTROLADOR	
			ORDEM	CARACTERÍSTICA
EBPE / CGO	1,1892	978,1860	6	Instável
LMI	0,3193	260,5469	4	Instável
(CGO \rightarrow LMI)	1,1891	978,1872	6	Instável
(LMI \rightarrow CGO)	0,3190	260,5473	4	Instável

Os controladores que solucionam este problema são dados, aproximadamente, por:

$$K_{\text{Mhi-BO3}} = \frac{8,85(s^2 + 209,922s + 22487,007)(s^2 + 6,792s + 42,803)(s + 5,312)(s + 3,894)}{(s + 22499,928)(s + 55,127)(s^2 + 3,790s + 35,536)(s + 3,224)(s - 1,745)}$$

e

$$K_{\text{LMI}} = \frac{-(s - 69672,948)(s + 102,769 - 84,734i)(s + 102,769 + 84,734i)(s + 16,461)}{(s + 4854,698)(s + 558,759 - 232,397i)(s + 558,759 + 232,397i)(s - 9,984)}$$

Percebe-se, por inspeção da TAB. 4.7, que o resultado encontrado para a função custo J_∞ pela metodologia LMI é bem menor que o encontrado pela metodologia EBPE / CGO. O valor encontrado por LMI está portanto mais próximo do valor ótimo que soluciona o problema.

A causa mais provável para o alto valor encontrado por CGO é a ocorrência de problemas de condicionamento numérico no decorrer do cálculo do controlador que soluciona o problema, obtido a partir do controlador intermediário.

A filosofia de resolução de problemas de controle pela metodologia EBPE / CGO é de construir um controlador intermediário baseado no problema da estabilização forte, onde o controlador estabilizante é estável. Isto nem sempre é possível. Observa-se que se o controlador,

obtido a partir do controlador intermediário for instável, existe uma maior tendência de ocorrer problemas de condicionamento numérico durante seu cálculo.

Na metodologia LMI o controlador, seja este estável ou instável, que minimiza a função custo já se encontra inserido na estrutura de cálculo do sistema em malha fechada. Após o processo de minimização da função custo, o controlador é resgatado por meio de operações algébricas no sistema em malha fechada, conforme apresentado na Seção 3.5.2.

A aplicação do controlador $K_{\text{Mhi-BO3}}$ na análise H_∞ em LMI gera praticamente o mesmo resultado da aplicação da metodologia EBPE / CGO. Esse resultado é representado na TAB. 4.7 por (CGO \rightarrow LMI).

Do mesmo modo, o resultado encontrado através da aplicação do controlador intermediário V_{LMI} na função custo J_∞ é semelhante ao encontrado pela aplicação da metodologia LMI. Esse resultado é representado na TAB. 4.7 por (LMI \rightarrow CGO).

Problemas de condicionamento numérico tanto nas funções custo quanto nas LMIs proporcionaram também pequenas variações nos resultados.

4.2.6 RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE CONTROLE H_2 / H_∞

Por simples inspeções dos resultados nas tabelas TAB. 4.4 e TAB. 4.7, são conhecidos os limitantes superiores e inferiores para as funções custo J_2 e J_∞ . Considera-se como valor ótimo da função custo J_∞ o resultado obtido pela aplicação da metodologia LMI. Utilizou-se $\gamma = 2,5$.

Os resultados desse problema de controle H_2 / H_∞ pela aplicação da metodologia EBPE são apresentados na TAB. 4.8:

TAB. 4.8 Resultados do problema de controle H_2 / H_∞ (EBPE) no modelo do míssil.

CONTROLADOR INTERMEDIÁRIO	$\ T_{\delta_c \rightarrow q}\ _2^2$	$\ T_{\delta_c \rightarrow \eta}\ _\infty$	ORDEM
V_{M-L1}	1471,4076	2,6793	1
V_{M-L2}	1460,2101	2,5634	2
V_{M-L3}	1426,7873	2,5000	3
V_{M-L4}	1386,9622	2,5000	4
V_{M-L5}	1344,6076	2,5000	5
V_{M-L6}	1301,6875	2,5000	6
V_{M-L7}	1259,3010	2,5000	7

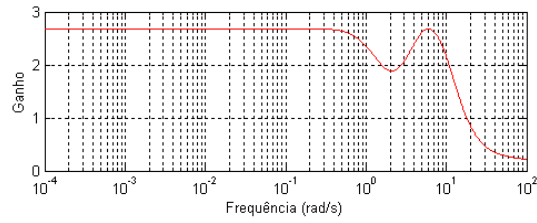
A aplicação da metodologia CGO neste problema, apresentou um único resultado já considerado satisfatório. Esse resultado é apresentado na TAB. 4.9:

TAB. 4.9 Resultado do problema de controle H_2 / H_∞ (CGO) no modelo do míssil.

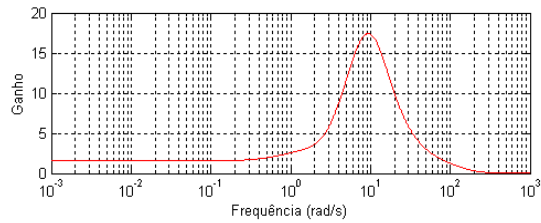
CONTROLADOR INTERMEDIÁRIO	$\ T_{\delta_c \rightarrow q}\ _2^2$	$\ T_{\delta_c \rightarrow \eta}\ _\infty$	ORDEM
V_{M-BO1}	512,9233	2,4814	1

Devido à flexibilidade na escolha de pólos estáveis para a construção do controlador intermediário proporcionada pelo método CGO, o espaço solução aumenta consideravelmente quando comparado com o espaço solução gerado pelo método EBPE. A solução obtida por CGO é portanto melhor que a obtida por EBPE.

Os Diagramas de Bode das funções $T_{\delta_c \rightarrow \eta}$ e $T_{\delta_c \rightarrow q}$, obtidas pelo uso de V_{M-L1} , V_{M-L7} e V_{M-BO1} encontrados por EBPE e CGO, são representados respectivamente pelas FIG 4.10, FIG 4.11 e FIG 4.12 e têm como objetivo mostrar os resultados encontrados graficamente.

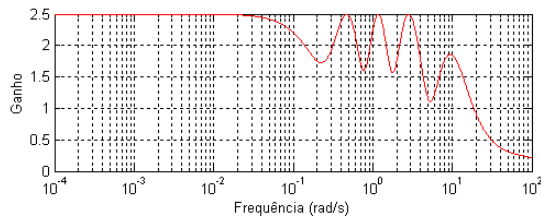


(a)

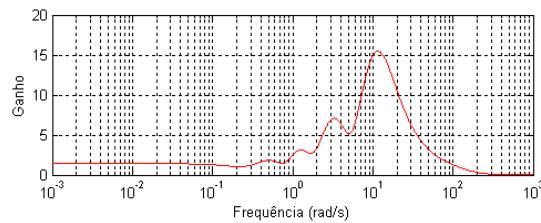


(b)

FIG. 4.10 Diagramas de Bode relativos ao controlador intermediário V_{M-L1} . (a) da função $T_{\delta_c \rightarrow \eta}$ relativa ao canal H_{∞} ; (b) da função $T_{\delta_c \rightarrow q}$ relativa ao canal H_2 .



(a)



(b)

FIG. 4.11 Diagramas de Bode relativos ao controlador intermediário V_{M-L7} . (a) da função $T_{\delta_c \rightarrow \eta}$ relativa ao canal H_{∞} ; (b) da função $T_{\delta_c \rightarrow q}$ relativa ao canal H_2 .

A partir da visualização dos diagramas das FIG 4.10 e FIG 4.11 e dos resultados da TAB. 4.8 constata-se que a medida que a ordem de V cresce, o valor de J_2 diminui acarretando um melhor resultado. Neste caso, verifica-se que os resultados obtidos pelo uso de V_{M-L7} foram melhores que os obtidos por V_{M-L1} .

Os diagramas da FIG 4.12 a seguir representam graficamente os resultados da TAB. 4.9.

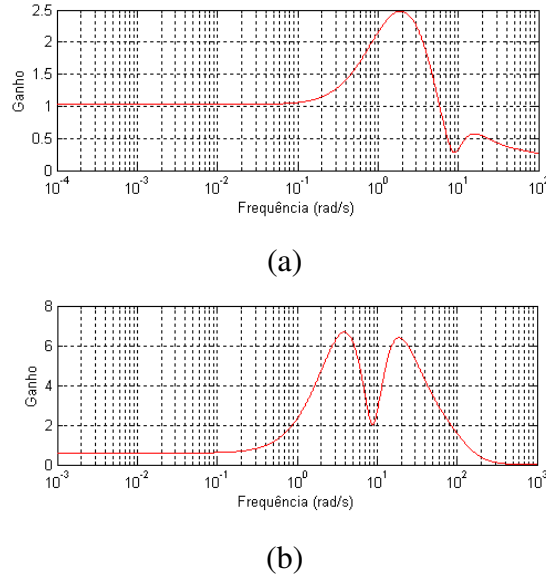


FIG. 4.12 Diagramas de Bode relativos ao controlador intermediário V_{M-BO1} . (a) da função $T_{\delta_c \rightarrow \eta}$ relativa ao canal H_∞ ; (b) da função $T_{\delta_c \rightarrow q}$ relativa ao canal H_2 .

A TAB. 4.10 apresenta os resultados para as funções custo J_2 e J_∞ pela aplicação das diversas técnicas e dados dos controladores K_{M-BO1} e K_{LMI} .

TAB. 4.10 Resultados do problema de controle H_2 / H_∞ no modelo linearizado do míssil.

TÉCNICA	$\ T_{\delta_c \rightarrow q}\ _2^2$	$\ T_{\delta_c \rightarrow \eta}\ _\infty$	CONTROLADOR	
			ORDEM	CARACTERÍSTICA
EBPE / CGO	512,9233	2,4814	5	Instável
LMI	169,3362	2,1364	4	Estável
(CGO \rightarrow LMI)	512,9233	2,4656	5	Instável
(LMI \rightarrow CGO)	169,3374	2,1437	4	Estável

Os controladores que solucionam este problema são dados, aproximadamente, por:

$$K_{M-BOI} = \frac{34,921(s+105-107,112i)(s+105+107,112i)(s+5,585)(s+2,823-6,443i)(s+2,823+6,443i)}{(s+22499,775)(s+178,617)(s+0,778-8,857i)(s+0,778+8,857i)(s-0,237)}$$

e

$$K_{LMI} = \frac{30,023(s+1011,438)(s+131,881-49,432i)(s+131,881+49,432i)(s+1,544)}{(s+1011,452)(s+373,333-752,108i)(s+373,333+752,108i)(s+0,210)}$$

Percebe-se, por inspeção da TAB. 4.10 que o resultado encontrado para a função custo J_2 pela metodologia LMI é bem menor que o encontrado pela metodologia EBPE / CGO. O valor encontrado por LMI está portanto mais próximo do valor ótimo que soluciona o problema.

A causa mais provável para o alto valor encontrado por CGO é a ocorrência de problemas de condicionamento numérico no decorrer do cálculo do controlador que soluciona o problema. Conforme mencionado na seção anterior, na metodologia EBPE / CGO busca-se construir um controlador intermediário baseado no problema da estabilização forte, onde o controlador estabilizante é estável. Nem sempre isso é possível e observa-se que se o controlador, obtido a partir do controlador intermediário for instável, existe uma maior tendência de ocorrer problemas de condicionamento numérico durante seu cálculo.

A aplicação do controlador K_{M-BOI} nas análises H_2 e H_∞ em LMI gera praticamente os mesmos resultados da aplicação da metodologia EBPE / CGO. Esses resultados são representados na TAB. 4.10 por (CGO \rightarrow LMI).

Do mesmo modo, os resultados encontrados através da aplicação do controlador intermediário V_{LMI} nas funções custo J_2 e J_∞ são semelhantes aos encontrados pela aplicação da metodologia LMI. Esses resultados são representados na TAB. 4.10 por (LMI \rightarrow CGO).

Problemas de condicionamento numérico tanto nas funções custo quanto nas LMIs proporcionaram também pequenas variações nos resultados.

5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

5.1 CONCLUSÕES

O Capítulo 4 apresentou os resultados no cálculo do controle ótimo H_2 e H_∞ e no cálculo do problema de controle H_2 / H_∞ em dois exemplos.

No exemplo sugerido em (SALES e CORRÊA, 1997), a solução analítica do problema de controle ótimo H_2 retornou, a menos da precisão numérica, o valor ótimo diferentemente da solução encontrada por LMI.

A solução analítica do problema de controle H_∞ não apresentou um resultado mais próximo do valor ótimo em relação ao encontrado por LMI, provavelmente por problemas de condicionamento numérico ocorridos durante reduções de ordem por realização balanceada. Apesar disso, constata-se que a solução analítica retorna, a menos da precisão numérica, o valor ótimo. Este valor é resultado da aplicação do controlador obtido pela solução analítica na análise H_∞ em LMI.

Para a resolução do problema de controle H_2 / H_∞ arbitrou-se uma degradação de 50% como restrição para a função custo H_∞ ($\gamma = 52,43$). A resolução desse problema somente é possível por meios numéricos, sendo utilizado para tanto as metodologias EBPE / CGO e LMI. Como não foi obtida solução via LMI, devido a problemas de condicionamento numérico, fica prejudicada a comparação. A metodologia LMI apresentou, neste caso, uma limitação. A solução obtida por EBPE foi considerada satisfatória, pelo fato do problema ser tratado de forma convexa e tendo em vista que o resultado é menor que o encontrado em (SALES e CORRÊA, 1997).

No exemplo do modelo linear do míssil, a solução analítica do problema de controle ótimo H_2 retornou, a menos da precisão numérica, o valor ótimo ao contrário da solução encontrada por LMI que está bem afastada deste valor. Ao se aplicar o controlador obtido pela solução analítica na análise H_2 em LMI obteve-se novamente, a menos da precisão numérica, o valor ótimo. A pequena diferença no resultado se deve, provavelmente, a um problema de

condicionamento numérico provocada pelo excesso de passos conservadores para se obter as LMIs das EQ 3.102 e EQ 3.103.

A solução analítica do problema de controle H_∞ fica inviabilizada por este não se apresentar no formato de Nehari. A resolução deste problema somente é possível por meios numéricos, sendo aplicadas para tanto as metodologias EBPE / CGO e LMI. Neste caso, a solução mais próxima do valor ótimo foi encontrada por LMI e o controlador que soluciona tal problema é instável, porém o sistema em malha fechada é estável. Conforme mencionado na Seção 4.2.5, na metodologia EBPE / CGO busca-se construir um controlador intermediário baseado no problema da estabilização forte, onde o controlador estabilizante é estável. Nem sempre isso é possível. Observa-se que se o controlador, obtido a partir do controlador intermediário for instável, existe uma maior tendência de ocorrer problemas de condicionamento numérico durante seu cálculo por EBPE / CGO.

Para a resolução do problema de controle H_2 / H_∞ a restrição da função custo J_∞ é dada por $\gamma = 2,5$. A resolução numérica desse problema apresentou a solução mais próxima do valor ótimo pela aplicação da metodologia LMI, sendo o controlador que soluciona tal problema estável.

Os resultados expostos acima não alteram algumas observações que devem ser feitas a respeito de diferenças observadas pela aplicação das técnicas em questão. Os exemplos do Capítulo 4, conforme a FIG. 4.1, apresentam como solução controladores monovariáveis e possuem somente dois canais a serem analisados, um de estabilidade (H_∞) e um de desempenho (H_2). A entrada exógena é a mesma para ambos os canais, sendo as saídas controladas distintas e únicas. Serão citadas algumas vantagens e desvantagens das técnicas EBPE / CGO e LMI.

A técnica de resolução de problemas de controle por LMI apresenta como vantagens: a facilidade para resolução de problemas multivariáveis, tais como vários canais H_2 , H_∞ e H_2 / H_∞ com pesos variados, além de controladores multivariáveis. Permite também incorporar outros tipos de restrições como por exemplo a alocação de pólos na região convexa do sistema de controle em malha fechada. Apresenta como principal desvantagem os problemas de condicionamento numérico causados pelo excesso de parametrizações.

A solução analítica dos problemas de controle ótimo H_2 e H_∞ apresentam como vantagem a maior proximidade possível de seu resultado com o valor ótimo. Na técnica de resolução de

problemas de controle por EBPE / CGO, o controlador intermediário obtido por CGO apresenta ordem relativamente baixa em comparação com EBPE, devido ao fato de estar presente em um subespaço de soluções convexas obtidas por EBPE. A aplicação destas técnicas sempre apresenta resultados que se aproximam do valor ótimo, conforme o aumento da ordem do controlador intermediário. Apresentam como principais desvantagens problemas de condicionamentos numéricos causados pela alocação de pólos na mesma posição pela técnica EBPE, a não convexidade da solução obtida por CGO e a falta de uma abordagem para problemas multivariáveis.

A resolução do método LMI se desenvolve via programação linear, o que permite a implementação de algoritmos bastante eficazes. Apesar disso, pelo fato de não ser abordado o problema original de controle H_2 / H_∞ , seu desenvolvimento pode se tornar conservador em determinados casos. Assim, a solução obtida por LMI pode piorar em relação às encontradas por EBPE / CGO.

Por outro lado, em alguns casos, o método LMI também pode apresentar soluções melhores que às obtidas pelos métodos EBPE / CGO. Entretanto, nesses casos, verifica-se que a borda da margem de estabilidade não é alcançada. Existe portanto, a possibilidade de se realizar um ajuste desta margem, melhorando a solução do problema. Tal ajuste pode ocorrer através da aplicação do controlador intermediário, obtido a partir do controlador que soluciona o problema pelo método LMI, como ponto inicial no método CGO.

A resolução dos métodos EBPE e CGO se desenvolvem via programação não-linear, porém sua abordagem é realizada sobre o problema original de controle H_2 / H_∞ .

5.2 SUGESTÕES

- A possibilidade de efetuar comparação com resultados obtidos por outras técnicas não consideradas neste trabalho;
- A aplicação destas técnicas em um número maior de exemplos diferenciados para maior observação e tomada de conclusões;

- Investigação dos algoritmos no sentido de procurar eliminar erros de condicionamento numérico apresentados em ambas as técnicas;
- Implementação e aplicação prática dos controladores nos modelos apresentados pelos exemplos para observação experimental de campo;
- Desenvolver a teoria aplicada as técnicas EBPE e CGO, tendo em vista a implementação de algoritmos para solução de problemas multivariáveis;
- Utilização de outras funções para a técnica EBPE e, no caso da função de Laguerre, alocação de pólos em outras posições para teste;
- Desenvolver a teoria aplicada a técnica LMI com o objetivo de implementar algoritmos para solucionar limitações quanto ao seu emprego em alguns exemplos de problemas de controle H_2 / H_∞ .

6 ANEXOS

6.1 ANEXO 1: Complemento de Schur

Dada uma LMI tal que:

$$\begin{bmatrix} Q(\underline{x}) & S(\underline{x}) \\ S(\underline{x})^T & R(\underline{x}) \end{bmatrix} > 0 \quad (6.1)$$

onde $Q(\underline{x}) = Q(\underline{x})^T$, $R(\underline{x}) = R(\underline{x})^T$ e $S(\underline{x})$ são funções afins em \underline{x} . A LMI dada pela inequação 6.1 tem o mesmo significado que:

$$R(\underline{x}) > 0 \text{ e } Q(\underline{x}) - S(\underline{x})R(\underline{x})^{-1}S(\underline{x})^T > 0 \quad (6.2)$$

6.2 ANEXO 2: Informações sobre o exemplo do modelo de míssil

Dados:

$$\begin{array}{lll}
 K_\alpha = 0,7 P_0 \frac{180 S}{\pi m v_s} = 1,186 & P_0 = 973,3 \text{ libras/pés} & d = 0,75 \text{ pés} \\
 K_q = 0,7 P_0 \frac{180 S d}{\pi I_y} = 70,6218 & S = 0,44 \text{ pés}^2 & I_y = 182,5 \text{ slug.pés}^2 \\
 K_z = 0,7 P_0 \frac{S}{m g} = 0,6659 & m = 13,98 \text{ slugs} & \zeta = 0,7 \\
 & v_s = 1036,4 \text{ pés/s} & \omega_a = 150 \text{ rad/s}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 a_n = 0,000103 \text{ grau}^{-3} & a_m = 0,000215 \text{ grau}^{-3} \\
 b_n = -0,00945 \text{ grau}^{-2} & b_m = -0,0195 \text{ grau}^{-2} \\
 c_n = -0,1696 \text{ grau}^{-1} & c_m = 0,051 \text{ grau}^{-1} \\
 d_n = -0,034 \text{ grau}^{-1} & d_m = -0,206 \text{ grau}^{-1} \\
 \alpha_0 = 15 \text{ graus} & \\
 M = 3 &
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= \left[\frac{\partial f}{\partial \alpha} \right]_{x_0, u_0} = K_\alpha M \cos(\alpha_0) \left[3 a_n \alpha_0^2 + 2 b_n |\alpha_0| + c_n (2 - M/3) \right] - \\
 & K_\alpha M \frac{\pi}{180} s \operatorname{en}(\alpha_0) \left[a_n \alpha_0^3 + b_n \alpha_0^2 + c_n (2 - M/3) \alpha_0 \right] + \\
 & K_\alpha M \frac{\pi}{180} s \operatorname{en}(\alpha_0) \frac{d_n}{d_m} \left[a_m \alpha_0^3 + b_m \alpha_0^2 + c_m (-7 + 8M/3) \alpha_0 \right] = -0,5991
 \end{aligned}$$

$$A_{13} = \left[\frac{\partial f}{\partial \delta} \right]_{x_0, u_0} = K_\alpha M d_n \cos(\alpha_0) = -0,1168$$

$$A_{21} = \left[\frac{\partial g}{\partial \alpha} \right]_{x_0, u_0} = K_q M^2 \left[3 a_m \alpha_0^2 + 2 b_m |\alpha_0| + c_m (-7 + 8M/3) \right] = 25,9604$$

$$A_{23} = \left[\frac{\partial g}{\partial \delta} \right]_{x_0, u_0} = K_q M^2 d_m = -130,9328$$

$$C_{11} = \left[\frac{\partial h}{\partial \alpha} \right]_{x_0, u_0} = K_z M^2 [3 a_n \alpha_0^2 + 2 b_n |\alpha_0| + c_n (2 - M/3)] = -1,0460$$

$$C_{13} = \left[\frac{\partial h}{\partial \delta} \right]_{x_0, u_0} = K_z M^2 d_n = -0,2038$$

6.3 ANEXO 3: Algoritmos computacionais de interesse

Dados os sistemas $G_1(s)$ e $G_2(s)$, representados na forma de espaço de estado por:

$$G_1(s) := \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right] \text{ e } G_2(s) := \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right]$$

pode-se computar algumas operações básicas do seguinte modo:

a) Sistema em Série:
$$G_2 G_1(s) = \left[\begin{array}{cc|c} \left[\begin{array}{cc} A_1 & 0 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} B_1 \\ B_2 D_1 \end{array} \right] \\ \hline \left[\begin{array}{cc} B_2 C_1 & A_2 \end{array} \right] & B_2 D_1 \\ \left[\begin{array}{cc} D_2 B_1 & C_2 \end{array} \right] & D_2 D_1 \end{array} \right]$$

b) Sistema em Paralelo:
$$G_1(s) + G_2(s) = \left[\begin{array}{cc|c} \left[\begin{array}{cc} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \end{array} \right] \\ \hline \left[\begin{array}{cc} C_1 & C_2 \end{array} \right] & D_1 + D_2 \end{array} \right]$$

c) Sistema Inverso:
$$(G_1(s))^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \left[\begin{array}{cc} A_1 - B_1 D_1^{-1} C_1 & B_1 D_1^{-1} \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} B_1 D_1^{-1} \\ -D_1^{-1} C_1 \end{array} \right] \\ \hline -D_1^{-1} C_1 & D_1^{-1} \end{array} \right]$$

d) Sistema $G_1^\sim(s)$:
$$G_1^\sim(s) = \left[\begin{array}{c|c} \left[\begin{array}{cc} -A_1^T & C_1^T \\ -B_1^T & D_1^T \end{array} \right] & \left[\begin{array}{c} C_1^T \\ D_1^T \end{array} \right] \\ \hline -B_1^T & D_1^T \end{array} \right]$$

e) Produto Interno $\langle G_1(s), G_2(s) \rangle_2$ no L_2 :

Supondo que $D_1 = D_2 = 0$. Utilizando o Teorema de Parseval:

$$\langle G_1(s), G_2(s) \rangle_2 = \langle g_1(t), g_2(t) \rangle_2 = C_1 \left[\int_0^\infty e^{A_1 t} B_1 B_2^T e^{A_2^T t} dt \right] C_2^T = C_1 M C_2^T \quad (6.3)$$

onde por definição: $M := \int_0^\infty e^{A_1 t} B_1 B_2^T e^{A_2^T t} dt$

Como M satisfaz a seguinte equação geral de Lyapunov:

$$A_1 M + M A_2^T + B_1 B_2^T = 0 \quad (6.4)$$

resolve-se (6.4) e substitui-se M em (6.3) para calcular $\langle G_1(s), G_2(s) \rangle_2$.

f) Introdução de um Zero na FT:

Neste caso, conforme (SALES, 1994), deseja-se descobrir a representação sob a forma de espaço de estado de uma FT $\check{G}(s)$ tal que:

$$\check{G}(s) := \left[\begin{array}{c|c} \check{A} & \check{B} \\ \hline \check{C} & \check{D} \end{array} \right] = G_1(s) \cdot (s + \alpha)$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$ e necessariamente $G_1(s)$ deve ser estritamente própria ($D_1 = 0$), pois caso contrário $\check{G}(s)$ seria irrealizável (imprópria). Uma realização de $\check{G}(s)$ será dada por:

$$\check{G}(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_1 B_1 + \alpha B_1 \\ \hline C_1 & C_1^T B_1 \end{array} \right]$$

g) Fatoração Coprima e obtenção de uma solução particular da equação de Bezout:

Neste caso, conforme (FRANCIS, 1987), deseja-se encontrar os modelos $N(s)$, $M(s)$, $X(s)$ e $Y(s)$ tais que:

$$G_1(s) = N(s) \cdot M^{-1}(s) \quad \text{e} \quad X(s)N(s) + Y(s)M(s) = 1$$

onde $N(s)$, $M^{-1}(s)$, $X(s)$ e $Y(s) \in S$. Para isto bastará encontrar um vetor F , tal que o problema de realimentação de estados em cima de $G_1(s)$ resulte num sistema em malha fechada com a matriz da dinâmica $A_1 + B_1F$ assintoticamente estável. Uma fatoração coprima de $G(s)$ poderá ser obtida a partir de:

$$N(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_1 + B_1F & B_1 \\ \hline C_1 + D_1F & D_1 \end{array} \right] \quad \text{e} \quad M(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_1 + B_1F & B_1 \\ \hline F & 1 \end{array} \right]$$

Uma solução particular da equação de Bezout poderá ser calculada por:

$$X(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_1 + LC_1 & -L \\ \hline -F & 0 \end{array} \right] \quad \text{e} \quad Y(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_1 + LC_1 & -B_1 - LD_1 \\ \hline F & 1 \end{array} \right]$$

onde L é um vetor tal que $A_1 + LC_1$ seja assintoticamente estável. Sugere-se, conforme (SALES, 1994) que a escolha de F para a estabilização de $G(s)$ ocorra de maneira que os pólos instáveis de $G(s)$ sejam realocados nas mesmas posições em que encontram-se seus zeros estáveis, o que permitirá obter modelos de $N(s)$, $M(s)$, $X(s)$ e $Y(s)$ com ordens relativamente menores. Para esta escolha de F , pode-se utilizar as funções *Acker* e *Place* do Matlab, que empregam a fórmula de Ackermann. Para o cálculo de L é possível utilizar a rotina *Lqe* do Matlab.

h) Fatoração Espectral:

Neste caso, deseja-se obter o fator espectral Φ de fase mínima de uma função real racional $G_1(s)$ para-hermitiana, ou seja, $G_1(s)$ possuirá as seguintes propriedades:

$$G_1, G_1^{-1} \in RL_\infty, \quad G_1^\sim = G_1 \quad \text{e} \quad G_1(\infty) > 0$$

O objetivo aqui será fatorar $G_1(s)$ de modo que $G_1 = \Phi^\sim \Phi$ com $\Phi, \Phi^{-1} \in S$. Para o cálculo do fator espectral Φ segue-se o procedimento proposto por (FRANCIS, 1987):

1) Fatorar $G_1(s)$ como $G_1 = D_1 + G_N + \tilde{G}_N$, onde:

$$G_N = \left[\begin{array}{c|c} A_N & B_N \\ \hline C_N & 0 \end{array} \right]$$

Este cálculo poderá ser realizado pela função *Stabproj* ou *Sdecomp* do Matlab.

2) Determinar A, R e Q tais que:

$$A = A_N - B_N D_1^{-1} C_N ; \quad R = B_N D_1^{-1} B_N^T \quad \text{e} \quad Q = -C_N D_1^{-1} C_N^T$$

3) Calcular X a partir da seguinte equação algébrica de Riccati:

$$A^T X + XA - XRX + Q = 0$$

Este cálculo poderá ser realizado pela função *Aresolv* do Matlab.

4) Determinar uma realização do fator espectral Φ por:

$$\Phi = \left[\begin{array}{c|c} A_N & B_N \\ \hline D_1^{-1/2} (C_N + B_N^T X) & D_1^{1/2} \end{array} \right]$$

i) Fatoração Inner-Outer:

Neste caso, deseja-se executar a seguinte fatoração:

$$G_1(s) = G_{in}(s) G_o(s)$$

onde $G_{in}^{-1} G_{in} = 1$ é o fator *inner* e $G_o, G_o^{-1} \in S$ o fator *outer*.

De acordo com (SALES, 1994), um procedimento para o cálculo de uma realização para G_{in} e G_o a partir de $G_1(s)$ poderá ser feito como:

- 1) Calcular a realização de $\hat{G} = G_1^{-1} G_1$;
- 2) Uma realização para G_0 é alcançada a partir da fatoração espectral da função \hat{G} calculada no passo anterior, isto é, $\hat{G} = G_0^{-1} G_0$;
- 3) A realização de G_{in} será calculada a partir de $G_{in} = G_1 G_0^{-1}$.

Encerrando este caso, alerta-se que o cálculo desta fatoração poderá também ser feito pela função *Iofr* ou *Iofc* do Matlab.

Quanto aos cancelamentos de pólos e zeros foram solucionados por meio do emprego da técnica de redução de modelos via realização balanceada apresentada na Seção 2.6. Os cancelamentos são essenciais para obtenção dos resultados apresentados no Capítulo 4. Aliás esta técnica também viabilizou a utilização das funções de Laguerre na EBPE.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADES, R. **Problema H_2/H_∞ - Soluções Aproximadas por Meio de Expansão em Bases**. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Pontifícia Universidade Católica – PUC-Rio. Rio de Janeiro, 1999.
- ANDERSON, B. e MOORE, J. **Optimal Control: Linear Quadratic Methods**. Prentice Hall, 1989.
- APKARIAN, P., NOLL, D. e TUAN, H.D. **A Spectral Quadratic-SDP Method with Applications to Fixed-Order H_2 and H_∞ Synthesis**. Asian Control Conference, Austrália, 2004.
- APKARIAN, P., PELLANDA, P.C. e TUAN, H.D. **Mixed H_2/H_∞ Multi-Channel Linear Parameter Varying Control in Discrete Time**. Systems & Control Letters, 41. p. 333-346, 2000.
- BAZARAA, M.S. e SHETTY, C.M. **Nonlinear Programming, Theory and Algorithms**. John Wiley & Sons. 1979.
- BERTSEKAS, D.P. **Nonlinear Programming**. Athena Scientific, 1995.
- BONNANS, J.F., GILBERT, J.C., LEMARÉCHAL, C. e SAGASTIZÁBAL, C. **Optimisation Numérique - Aspects Théoriques et Pratiques**. Mathematiques & Applications 27, Springer-Verlag, 1997.
- BOYD, S., GHAOUI, L.E., FERON, E. e BALAKRISHNAN, V. **Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory**. volume 15. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.
- CHEN, C.T. **Linear System - Theory and Design**. Holt, Rinehart and Winston Inc., 1970.
- CHILALI, M. e GAHINET, P. **H_∞ Design with Pole Placement Constraints - an LMI Approach**. IEEE. Trans. Automat. Contr., 41(March). p. 358-367, 1995.
- CHURCHILL, R.V. **Complex Variables and Applications**. McGrawHill, 2ª edição, 1960.
- CORRÊA, G.O. Uma Introdução à Teoria de Controle por Retroalimentação. Minicurso XV CNMAC, 1992.
- DESOER, C. e VIDYASAGAR, M. **Feedback Systems: Input-Output Properties**. Academic Press, 1975.

- DOYLE, J., GLOVER, K., KHARGONEKAR, B. e FRANCIS, B. **State-Space Solutions to Standart H_2 and H_∞ Control Problems.** IEEE. Trans. Automat. Contr., AC-34(8). p. 831-847, 1989.
- FRANCIS, B.A. **A Course in H_∞ Control Theory.** Lecture Notes in Control and Information Sciences. Berlin: Springer-Verlag, 1987.
- GAHINET, P., NEMIROVSKII, A., LAUB, A.J. e CHILALI, M. **The LMI Control Toolbox for Use with Matlab.** The MathWorks Inc., 1995.
- NAGRATH, I.J. **Control Systems Engineering.** New Delhi, Wiley Eastern, 2ª edição, 1983.
- NEMIROVSKII, A. e GAHINET, P. **The Projective Method for Solving Linear Matrix Inequalities.** Math. Programming Series B, 77. p. 163-190, 1997.
- NESTEROV, Y. e NEMIROVSKII, A. **Interior Point Algorithms in Convex Programming – Theory and Applications.** SIAM Studies in Applied Mathematics, 13, 1994.
- NICHOLS, R.A., REICHERT, R.T. e RUGH, W.J. **Gain Scheduling for H_∞ Controllers: a Flight Control Example.** IEEE. Trans. Contr. Systems Technology, vol. 1, no. 2, p. 69-79, 1993.
- OLIVEIRA, M.C. **Controle de Sistemas Lineares baseado nas Desigualdades Matriciais Lineares.** Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Universidade Estadual de Campinas - Unicamp. Campinas, 1999.
- PELLANDA, P.C. **Commande de Systèmes Instationnaires – Séquencement de Compensateurs et Commande LPV.** Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) – Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace. Toulouse, França, 2001.
- REICHERT, R.T. **Dynamic Scheduling of Modern-Robust-Control Autopilot Designs for Missiles.** IEEE Control Systems Magazine, vol. 12, no. 5, p. 35-42, 1992.
- SALES, D.M. **Controle H_2 / H_∞ - Soluções Aproximadas baseadas em Sequências de Problemas Quadráticos.** Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Instituto Militar de Engenharia. IME. Rio de Janeiro, 1994.
- SALES, D.M. e CORRÊA, G.O. **Controle H_2 / H_∞ via LMI: Proximidade em Relação à Solução Ótima.** PUC-Rio e LNCC, 1997.
- SAMBLANCAT, C. **Commande Robuste Multivariable – Applications a l'Helicoptere.** Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace. Toulouse, França, 1991.

- SILVEIRA, M.A. e CORRÊA, G.O. **H₂ - Optimal Control of Linear Systems with Tracking / Disturbance Rejection Constraints.** International Journal Control, volume 55. n. 5. p. 1115-1139, 1992.
- SOUSA, J.V.M. **Formulação Estendida da Síntese de Controle Robusto PRCBI – Aplicação na Pilotagem de Mísseis.** Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Instituto Militar de Engenharia. IME. Rio de Janeiro, 1996.
- VANDENBERGHE, L. e BOYD, S. **Primal-Dual Potential Reduction Method for Problems Involving Matrix Inequalities.** Math. Programming Series B, 36. p. 205-236, 1995.
- VIDYASAGAR, M. **Control System Synthesis - A Factorization Approach.** Boston MA, MIT, 1985.
- WILLEMS, J. **Least Squares Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation.** IEEE. Trans. Automat. Contr., 16(6). p. 621-634, 1971.
- ZAMES, G. **Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Semi-Norms, and Approximate Inverses.** IEEE. Trans. Automat. Contr., AC-26. p. 301-320, 1981.
- ZHOU, K. e DOYLE, J.C. **Essentials of Robust Control.** Prentice Hall, 1998.
- ZHOU, K., DOYLE, J.C. e GLOVER, K. **Robust and Optimal Control.** Prentice Hall, 1996.