

**INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA**

**CAP ARY PINHEIRO DE ASSIS**

**MODELAGEM DE SISTEMAS ELÉTRICOS DE POTÊNCIA PARA A  
SÍNTESE DE CONTROLADORES LPV**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Paulo César Pellanda - Dr. ENSAE

Rio de Janeiro  
2002

c2002

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA  
Praça General Tibúrcio, 80-Praia Vermelha  
Rio de Janeiro-RJ CEP 22290-270

Este exemplar é de propriedade do Instituto Militar de Engenharia, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmear ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do(s) autor(es) e do(s) orientador(es).

A848	Assis, Ary P. de Modelagem de Sistemas Elétricos de Potência para a Síntese de Controladores LPV, Ary Pinheiro de Assis, Rio de Janeiro, Instituto Militar de Engenharia, 2002. 2f.:il, graf., tab.: - cm Dissertação ao mestrado - Instituto Militar de Engenharia, 2002 I. Formação
------	---



A Deus, fonte de toda a inspiração; a minha amada esposa Edna e a meu querido filho Davi.

## AGRADECIMENTOS

Ao Instituto Militar de Engenharia, pela oportunidade de realizar este curso de Mestrado.

Ao professor Paulo César Pellanda pela orientação, apoio e confiança, mesmo nos momentos difíceis do começo da realização deste trabalho.

Ao professor Glauco Nery Taranto pelas sugestões e colaboração durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos participantes da banca examinadora pela solicitude e trabalho despendido nessa avaliação.

Aos companheiros de mestrado pelo incentivo durante a realização deste trabalho e pelo apoio direto ou indireto para a conclusão da dissertação.

Ao professores e funcionários do DE-3 pela colaboração com a qual sempre pude contar.

Aos meus familiares que mantiveram a compreensão e o incentivo da paz do lar constante durante a execução desse mais novo curso.

Finalmente, mas em primeiro lugar, a DEUS, pela saúde, inspiração, e pelas vidas de todas estas pessoas acima citadas que, abençoadas por Ele, contribuíram a meu favor. A DEUS, pois, toda honra e toda a glória, sem O qual, nada poderia ser feito.

“... porque sem mim, nada podeis fazer.”  
(palavras de JESUS CRISTO em João 15:5)

## SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	8
LISTA DE TABELAS	9
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS	10
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	14
1.1 Contexto e Motivação	14
1.2 Objetivos	16
1.3 Trabalhos Realizados/Organização do Manuscrito	16
<b>2 CONCEITOS REFERENTES À SÍNTESE LPV</b>	18
2.1 LPV/LFT/LMI	18
2.2 Estabilidade e Desempenho Robusto	26
2.2.1 Estabilidade Global	26
2.2.2 Desempenho Robusto	27
2.3 Um Método LPV Multicanal	28
2.3.1 Formulação do Problema	28
2.3.2 Desempenho Temporal no Contexto do Controle LPV/LFT	32
2.3.3 Solução do Problema	34
<b>3 METODOLOGIA DE MODELAGEM DE SEP PARA APLICAÇÃO DE SÍNTESES LPV/LFT</b>	39
3.1 Forma de Estado Aumentada ou Implícita do SEP	40
3.1.1 Dinâmica do Gerador	41
3.1.2 Dinâmica do RAT	41
3.1.3 Modelo da linha-barra infinita	42
3.1.4 Sinopse	44
3.2 Obtenção do Modelo LPV Inicial-Etapa 1	45
3.2.1 Modelo LPV Inicial para Sínteses com Critério do Tipo $H_2$	45
3.2.2 Modelo LPV Inicial para Sínteses com Critério do Tipo $H_2/H_\infty$ -(caso 1)	47
3.2.3 Modelo LPV Inicial para Sínteses com Critério do Tipo $H_2/H_\infty$ -(caso 2)	48
3.3 Dedução de Estruturas LPV/LFT Iniciais e Validações-Etapa 2	50
3.3.1 Modelo LFT Inicial para Sínteses com Critério do Tipo $H_2$	50

3.3.2	Modelo LFT inicial para Sínteses com Critério do tipo $H_2/H_\infty$ -(caso 1) . . .	52
3.3.3	Modelo LFT Inicial para Sínteses com Critério do Tipo $H_2/H_\infty$ -(caso 2) . .	54
3.4	Eliminação de Parâmetros Intermediários-Etapa 3 . . . . .	55
3.4.1	Modelos LPV/LFT Dependentes de Parâmetros Medidos . . . . .	56
3.4.2	Modelos LPV/LFT Dependente de Parâmetros Medidos e Parâmetros Incertos	58
3.5	Redução de Ordem da Nova Forma LPV/LFT do SEP-Etapa 4 . . . . .	60
3.5.1	Método SVD . . . . .	61
3.5.2	Método de Decomposição de Kalman . . . . .	62
3.6	Resumo . . . . .	63
<b>4</b>	<b>OBTENÇÃO DOS MODELOS LPV/LFT REDUZIDOS . . . . .</b>	<b>66</b>
4.1	Estrutura LFT Reduzida para Sínteses com Critério do Tipo $H_2$ . . . . .	66
4.2	Estrutura LFT Reduzida para Sínteses com Critério do Tipo $H_2/H_\infty$ -(caso 1)	67
4.3	Estrutura LFT Reduzida para Sínteses com Critério do Tipo $H_2/H_\infty$ -(caso 2)	69
<b>5</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS DE SÍNTESE LPV . . . . .</b>	<b>76</b>
<b>6</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS . . . . .</b>	<b>82</b>
6.1	Conclusões . . . . .	82
6.2	Sugestões de Trabalhos Futuros . . . . .	84
6.3	Comentários Finais . . . . .	84
<b>7</b>	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS . . . . .</b>	<b>85</b>
<b>8</b>	<b>APÊNDICES . . . . .</b>	<b>88</b>
8.1	APÊNDICE 1: Formulação LMI para a Síntese LPV multi-canal misto $H_2/H_\infty$	89
8.1.1	Desempenho $H_2$ . . . . .	90
8.1.2	Desempenho $H_\infty$ . . . . .	93
8.2	APÊNDICE 2: Dados do Modelo . . . . .	95
8.3	APÊNDICE 3: Programas Maple . . . . .	96
8.3.1	Modelo LPV Inicial para $H_2$ . . . . .	96
8.3.2	Modelo LPV Inicial para $H_2/H_\infty$ -(caso 1) . . . . .	100
8.3.3	Modelo LPV Inicial para $H_2/H_\infty$ -(caso 2) . . . . .	105
8.4	APÊNDICE 4: Programas Matlab . . . . .	110
8.4.1	Eliminação de Parâmetros Medidos com Redução de Ordem . . . . .	110
8.4.2	Eliminação de Parâmetros Medidos e Incertos com Redução de Ordem . . . .	113

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG.2.1	Estrutura de interpolação de controladores ou tabelamento de ganhos.	19
FIG.2.2	Estrutura utilizada pelas técnicas de interpolação de controladores. . . . .	20
FIG.2.3	Modelagem de sistemas não-estacionários para a síntese de controladores interpolados. . . . .	23
FIG.2.4	Domínio paramétrico no espaço $\mathbf{R}^2$ . . . . .	30
FIG.2.5	Estrutura de controle LPV multicanal. . . . .	31
FIG.3.1	Sistema máquina-barra infinita. . . . .	40
FIG.3.2	Validação do modelo LFT inicial (para síntese $H_2$ ). . . . .	51
FIG.3.3	Validação do modelo LFT inicial (para síntese $H_2/H_\infty$ -caso 1). . . . .	53
FIG.3.4	Validação do modelo LFT inicial (para síntese $H_2/H_\infty$ -caso 2). . . . .	56
FIG.4.1	Validação do modelo LFT da EQ. 3.22. . . . .	67
FIG.4.2	Ajustes dos parâmetros. . . . .	68
FIG.4.3	Validação LFT reduzida x LPV (para síntese $H_2$ ). . . . .	68
FIG.4.4	Validação LFT inicial x LPV (caso 1). . . . .	70
FIG.4.5	Ajuste do parâmetro $\delta\beta_{23}$ . . . . .	71
FIG.4.6	Ajuste do parâmetro $i_d$ . . . . .	71
FIG.4.7	Ajuste do parâmetro $i_q$ . . . . .	72
FIG.4.8	Ajuste do parâmetro $v_d$ . . . . .	72
FIG.4.9	Ajuste do parâmetro $v_q$ . . . . .	73
FIG.4.10	Validação LFT reduzida x LPV (caso 1). . . . .	73
FIG.4.11	Validação LFT inicial x LPV (caso 2). . . . .	74
FIG.4.12	Ajustes dos parâmetros. . . . .	74
FIG.4.13	Validação LFT reduzida x LPV (caso 2). . . . .	75
FIG.5.1	Avaliação do sistema em malha fechada. . . . .	79
FIG.5.2	Desempenho do controlador LPV. . . . .	80
FIG.5.3	Desempenho do controlador clássico. . . . .	80
FIG.5.4	Esforço do controlador LPV. . . . .	81
FIG.5.5	Esforço do controlador clássico. . . . .	81



## LISTA DE TABELAS

TAB.2.1	Variáveis de decisão. . . . .	38
TAB.4.1	Coeficientes dos ajustes quadráticos (para síntese $H_2$ ). . . . .	66
TAB.4.2	Coeficientes dos ajustes (bi)quadráticos (caso 1). . . . .	69
TAB.4.3	Coeficientes dos ajustes quadráticos (caso 2). . . . .	70

## LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

LFT	Transformação Linear Fracionária
LMI	Desigualdade Matricial Linear
LPV/LTV	Linear a Parâmetros Variáveis/Linear Variante no Tempo
LTI	Linear Invariante no Tempo
PADI	Problema de Acompanhamento de uma Dinâmica Implícita
Pss	<i>Power system stabilizer</i>
RAT	Regulador Automático de Tensão
SEP	Sistema Elétrico de Potência
SVD	Decomposição em Valores Singulares
$P$	Potência Ativa Nominal Gerada
$P_{mec}$	Potência mecânica aplicada ao eixo da máquina
$I_d, I_q, V_d, V_q$	Correntes e tensões internas da máquina
$E_q^u, E_d^u, E_q^l$	Tensões internas da máquina
$V_{r_i}, V_{m_i}$	Parte real e imaginária do fasor tensão na barra $i$
$v_{r_i}, v_{m_i}$	Parte real e imaginária do fasor nominal da tensão na barra $i$
$T_{d_0}^u, T_{q_0}^u, T_{d_0}^l, T_{a_1}$	Constantes de tempo
$X_q, X_q^u, X_d, X_d^l, X_d^u$	Reatâncias constantes
$r_a$	Resistência da armadura
$\omega_{sinc}$	Velocidade angular síncrona
$\omega$	Velocidade angular do rotor
$\delta$	Posição angular do rotor: é o ângulo entre um eixo do rotor e uma referência que gira à velocidade síncrona (é, também, o deslocamento angular entre a tensão de excitação e a tensão terminal da máquina)
$\delta_0$	Posição angular nominal do rotor
$H$	Constante de inércia
$E_{fd}$	Tensão de campo da máquina (saída do RAT)
$\delta b_{23}$	Variação da susceptância da linha 23 (incerteza)
$K_{a_1}$	Ganho do RAT
$i_d, i_q, v_d, v_q$	Parâmetros intermediários nominais
$\cos \delta_0, \sin \delta_0$	Parâmetros intermediários nominais
$\delta \beta_{23}$	Parâmetro intermediário nominal dependente de $\delta b_{23}$
$V_{pss}$	Entrada adicional do RAT

$V_{ref}$	Entrada de referência do RAT
$[x; y]$	$[x^T, y^T]^T$ , para $x \in \mathbf{R}^n$ e $y \in \mathbf{R}^m$
$[M; N]$	$\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}$ , para as matrizes $M$ e $N$ de dimensões compatíveis
$\mathcal{F}_u(M, K)$	$M_{22} + M_{21}K(I - M_{11}K)^{-1}M_{12}$ , isto é, LFT superior para matrizes reais, complexas ou racionais, $M = [M_{11}, M_{12}; M_{21}, M_{22}]$ e $K$ , de dimensões compatíveis, supondo $(I - M_{11}K)$ inversível
$\mathcal{F}_l(M, K)$	idem, para uma LFT inferior: $M_{11} + M_{12}K(I - M_{22}K)^{-1}M_{21}$

## RESUMO

Esta dissertação propõe uma metodologia para adequação de um modelo linearizado de um Sistema Elétrico de Potência (SEP) a técnicas de síntese Linear a Parâmetro Variável (LPV), que pressupõem uma dependência paramétrica do tipo Transformação Linear Fracionária (LFT).

Um modelo de SEP do tipo máquina-linha de transmissão-barras infinita é utilizado como base para o desenvolvimento do método. Três variantes do modelo LPV/LFT são obtidas para fins de síntese de controladores LPV, sob diferentes critérios dos tipos  $H_2$  e  $H_2/H_\infty$ , caracterizados em termos de restrições do tipo Desigualdades Matriciais Lineares (LMI). Especificações no domínio do tempo são levadas em conta através de um critério do tipo  $H_2$ , enquanto que incertezas na reatância da linha de transmissão são tratadas por um canal  $H_\infty$ .

O problema de eliminação de variáveis algébricas e de parâmetros redundantes, comuns em SEP, bem como o de redução de ordem da estrutura LFT são investigados. Uma solução é proposta de maneira a viabilizar computacionalmente a síntese numérica de controladores LPV.

Finalmente, os resultados numéricos mostram que a técnica é eficaz no sentido de assegurar um comportamento transitório desejado em malha fechada, para uma faixa larga de possíveis condições de operação.

## ABSTRACT

This dissertation proposes a methodology for adapting a linearized model of a Electric Power System (EPS) to Linear Parameter Varying (LPV) synthesis techniques which assume a Linear Fractional Transformation (LFT) parameter dependence.

The proposed method is developed by using a single machine-infinite-bus model. Three variants of the LFT/LPV model are obtained for controller synthesis purposes under different  $H_2$  and  $H_2/H_\infty$  criteria, in terms of Linear Matrix Inequalities (LMI). An  $H_2$  criterion is used to capture time-domain specifications, whereas uncertainties in the transmission line reactance are treated by an  $H_\infty$  channel.

The problem of eliminating algebraic variables and redundant parameters, which are common in EPS, as well as the problem of reducing the LFT structure order are investigated. A solution is proposed to end up with a computationally feasible synthesis problem.

Finally, numerical results show that the technique provides an effective way to achieve a desired closed-loop transient behavior over a wide range of possible operating conditions.

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONTEXTO E MOTIVAÇÃO

Um número importante de problemas atuais no domínio de sistemas de controle estabelece níveis de desempenho muito estritos para sistemas físicos natural ou artificialmente sofisticados. O projeto de controladores é baseado no conhecimento das propriedades dinâmicas dos sistemas a controlar, normalmente expressas por um modelo matemático. No entanto, sabe-se que a formulação de um tal modelo é um compromisso entre a tratabilidade matemática e a descrição adequada do sistema a ser modelado. Usualmente escolhe-se um modelo nominal entre esses dois extremos. Por isso, em sua maioria, os modelos nominais não representam perfeitamente a realidade, o que limita as qualidades de robustez do sistema em malha fechada.

Atualmente, um modelo ideal para o controle é aquele capaz, ao mesmo tempo, de bem representar o comportamento interno do sistema, levando em conta suas incertezas, e de estabelecer as possíveis vias de troca de energia com o meio onde ele está inserido, ou seja, os caminhos para as perturbações externas. Enquanto que a dinâmica importante é detalhada por uma parte Linear a Tempo Invariante (LTI) do modelo, dita nominal, as incertezas são representadas separadamente por blocos cujo conhecimento é restrito a medidas de suas grandezas máximas expressas, em geral, por limites superiores de uma norma escolhida. Os modelos que traduzem os erros de modelagem através de incertezas, permitindo a análise dos efeitos das perturbações externas, são chamados modelos incertos.

O controle robusto é um ramo da área de sistemas de controle que trata, entre outras, da análise e da síntese de controladores voltados para minimizar o efeito das incertezas nos modelos. Os métodos de síntese robusta são capazes de conceber controladores LTI que mantêm as condições de estabilidade e de desempenho nominais para o sistema em malha fechada, face a perturbações e incertezas. Este ramo da engenharia de controle tem evoluído muito nas últimas duas décadas.

No entanto, além do conhecimento limitado do sistema, outros problemas, não menos importantes, podem ainda dificultar o projeto de controladores. Os fenômenos ligados à não-estacionariedade, por exemplo, são freqüentes e provém, em geral, de não-linearidades ou de variações paramétricas importantes e intrínsecas ao sistema físico. A dissimulação

de tais propriedades, quando tratadas como incertezas, constitui um procedimento extremamente conservativo. Em outras palavras, nessas situações, os controladores robustos LTI garantem geralmente desempenhos fracos para trajetórias realistas dos sistemas não-lineares, Lineares a Parâmetros Variáveis (LPV) ou Lineares a Tempo Variável (LTV). Uma abordagem que considere controladores que variam no tempo conforme a evolução do sistema e que considere também as incertezas presentes no modelo é então uma filosofia de controle mais apropriada a esse tipo de problema.

As condições de equilíbrio ou de operação de um sistema não-estacionário são normalmente parametrizadas por certas variáveis dinâmicas que as definem completamente. Quando medidas confiáveis destes parâmetros são disponíveis em tempo real, elas podem ser utilizadas na atualização das leis de controle. Esta abordagem, chamada de tabelamento de ganhos (*gain scheduling*) (SHAMMA, 1990; RUGH, 1991; REICHERT, 1992; HYDE, 1993; NICHOLS, 1993; PACKARD, 1994; LAWRENCE, 1995; LU, 1995; APKARIAN, 1995; BECKER, 1993, 1995; WU, 1996; APKARIAN, 1998), é baseada na concepção de controladores, cujos coeficientes são seqüenciados ou variam continuamente conforme os valores correntes dos parâmetros do sistema e é então mais apropriada para tratar os problemas causados por fortes não-estacionariedades.

Existem duas grandes classes de técnicas de tabelamento de ganho:

- Técnicas clássicas (SHAMMA, 1990; RUGH, 1991; REICHERT, 1992; HYDE, 1993; NICHOLS, 1993; LAWRENCE, 1995):

que são baseadas na interpolação de um conjunto de controladores LTI projetados por técnicas lineares e que corresponde a um conjunto de pontos de operação do sistema. Estas não garantem teoricamente a estabilidade e o desempenho preconizados para os pontos de projeto, na zona de transição dos controladores LTI.

- Técnicas LPV (PACKARD, 1994; LU, 1995; APKARIAN, 1995; BECKER, 1993, 1995; WU, 1996; APKARIAN, 1998): que utilizam funções de Lyapunov para definir a estabilidade e o desempenho para uma gama de variação dada do parâmetro. Essas garantem a estabilidade e o desempenho, embora com um certo conservatismo, e constituem uma extensão dos métodos LTI de controle robusto,  $H_2$  e  $H_\infty$ , para os sistemas variantes no tempo.

As aplicações práticas são inúmeras, pois muitos sistemas reais são, por natureza não-lineares ou não-estacionários. Os Sistemas Elétricos de Potência (SEP) constituem um

objeto de interesse particular no nosso estudo, pois é um sistema não-linear, de grandes dimensões e fortemente não-estacionário.

Um SEP é um sistema capaz de converter e transportar energia elétrica, ou seja, é o conjunto de elementos necessários à geração, transmissão e distribuição de energia para uma determinada região. A operação de SEP, com modelos cada vez mais complexos, implica na necessidade de ferramentas de análise e controle ainda mais sofisticadas e eficientes.

Com a interligação dos sistemas elétricos, surgiram alguns problemas operativos associados a oscilações eletromecânicas pouco amortecidas. Além disso, existem incertezas, especialmente na modelagem das cargas, que podem inclusive ser variantes no tempo e que afetam profundamente a estabilidade do modelo. No entanto, até o momento presente, pouca pesquisa na área de controle aplicado a SEP tem sido direcionada para a síntese de controladores LPV ou de ganhos tabelados, devido principalmente a dificuldades de modelagem para a síntese LPV. A aplicação destas técnicas nos SEP poderá, portanto, contribuir para uma melhora do seu desempenho e para o desenvolvimento de novas idéias e metodologias.

## 1.2 OBJETIVOS

Esta dissertação tem por objetivo principal desenvolver uma metodologia de modelagem de SEP, visando facilitar o estudo da aplicabilidade das técnicas de síntese de controladores LPV. Um modelo simples de SEP do tipo máquina-linha de transmissão-barra infinita é utilizado como base para o desenvolvimento dessa metodologia. Um segundo objetivo é mostrar que, uma vez modelado adequadamente, o problema de estabilidade local de SEP pode ser tratado de uma maneira bastante eficaz no contexto LPV.

## 1.3 TRABALHOS REALIZADOS/ORGANIZAÇÃO DO MANUSCRITO

Esta dissertação está organizada em 5 capítulos, além desta introdução, os quais estão descritos sumariamente abaixo.

- **Capítulo 2:** Nesse capítulo são apresentados os principais conceitos do processo de síntese LPV, necessários para uma melhor visualização do tipo de modelagem objetivada.



- **Capítulo 3:** Esse capítulo aborda o cerne da contribuição do trabalho realizado. Inicialmente apresenta-se um modelo de SEP disponível na literatura. Em seguida é proposta uma metodologia de adequação do modelo para fins de síntese LPV sob critérios dos tipos  $H_2$  e  $H_2/H_\infty$ . A metodologia é constituída pelas quatro etapas abaixo:

1. Obtenção do modelo LPV inicial.
2. Dedução da estrutura LPV/LFT inicial e validação.
3. Eliminação de parâmetros intermediários.
4. Redução de ordem da nova forma LPV/LFT e validação.

Três variantes do modelo LPV/LFT são desenvolvidas e cumpridas as duas primeiras etapas da metodologia para melhor compreensão acerca dos problemas existentes e da necessidade das etapas seguintes.

- **Capítulo 4:** Nesse capítulo são executadas as duas últimas etapas da metodologia nas três variantes do modelo introduzidas no Capítulo 3, visando sobretudo eliminar informações redundantes e reduzir as ordens das estruturas LFT obtidas.
- **Capítulo 5:** Esse capítulo mostra, através de resultados numéricos, que, uma vez modelado adequadamente, o problema de estabilidade local de SEP pode ser tratado de uma maneira bastante eficaz no contexto LPV.
- **Capítulo 6:** Este capítulo apresenta as principais conclusões obtidas dos resultados desta dissertação e aponta perspectivas de trabalhos futuros.

## 2 CONCEITOS REFERENTES À SÍNTESE LPV

Este capítulo aborda conceitos referentes às técnicas LPV que têm sido muito empregadas no controle de modelos/sistemas variantes no tempo, cujos modelos são incertos (BECKER, 1995; KAJIWARA, 1999; RUGH, 2000; LEITH, 2000; PAPAGEORGIOU, 2000; PELLANDA, 2002b). Estas técnicas são extensões dos métodos de controle robusto LTI,  $H_2$  e  $H_\infty$ , aos sistemas não-estacionários e podem ser classificadas como técnicas de tabelamento ou interpolação de ganhos (*gain scheduling*). Elas visam suprir deficiências das técnicas LTI em tratar os sistemas cujos modelos variam amplamente. Nesses casos, o sistema em malha fechada geralmente não apresenta um comportamento dinâmico adequado para todo o domínio de operação, podendo não ser estabilizável por um controlador fixo.

No contexto LPV, os parâmetros variáveis que determinam as condições operativas da planta a controlar são considerados medidos e utilizados na atualização em tempo real da dinâmica do próprio controlador, o qual é também um sistema LPV. Assim, existe um maior grau de liberdade na sua concepção. As incertezas não-estruturadas e as restrições de desempenho são interpretadas através de canais e custos dos tipos  $H_2$  e/ou  $H_\infty$ . Como os conceitos de função de transferência e, por conseguinte, das normas  $H_2$  e  $H_\infty$  clássicas, são inerentemente freqüenciais, eles não são válidos para sistemas LPV. A análise e a síntese de controladores LPV são então baseadas em extensões dessas normas com interpretações exclusivas no domínio do tempo.

### 2.1 LPV/LFT/LMI

O principal objetivo das técnicas de tabelamento de ganhos ou de interpolação de controladores é controlar um sistema que evolui num amplo domínio de funcionamento, para o qual as técnicas de controle robusto LTI se mostram ineficazes. Além da propriedade de robustez em relação às incertezas do sistema, os controladores interpolados possuem uma característica favorável que é a adaptação em tempo real do seu comportamento dinâmico, segundo a evolução do parâmetro que caracteriza as condições de funcionamento do sistema.

Essas técnicas ampliam o alcance dos métodos clássicos de controle robusto LTI que consideram somente as características lineares locais e condições particulares de funciona-

mento do sistema. Este benefício da estrutura de controle por tabelamento de ganhos é uma consequência da explícita utilização das informações da dinâmica do sistema oriunda da medida de certos sinais importantes, como ilustra a FIG. 2.1.

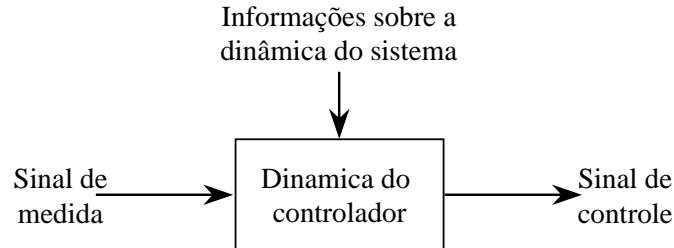


FIG. 2.1: Estrutura de interpolação de controladores ou tabelamento de ganhos.

O controlador interpolado, além de tratar os sinais de saída medidos, utiliza também informações adicionais do sistema (endógenas e/ou exógenas) para atualizar a dinâmica em tempo real. Tais informações modificam diretamente o sinal de controle, bem como a forma pela qual o sinal de saída (medida) é tratado pelo controlador. Em consequência, os controladores interpolados apresentam geralmente propriedades de desempenho e robustez melhores que os obtidos por controladores fixos, os quais ignoram as características de não-estacionariedade do sistema.

Uma classe importante de sistemas dinâmicos não-estacionários pode ser representada por um conjunto de equações diferenciais não-lineares de ordem qualquer. Através de uma escolha apropriada de vetores de variáveis de estado  $x(t) \in \mathbf{R}^n$ , das variáveis de entrada  $u(t) \in \mathbf{R}^m$  e das variáveis de saída  $y(t) \in \mathbf{R}^p$ , pode-se geralmente obter um modelo não-linear em relação ao estado, mas linear em relação à entrada, envolvendo uma equação matricial diferencial de primeira ordem e uma equação matricial algébrica:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= A(\theta_x, \theta_p)x + B(\theta_x, \theta_p)u \\ y &= C(\theta_x, \theta_p)x + D(\theta_x, \theta_p)u. \end{aligned} \quad (2.1)$$

As funções matriciais reais  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$ ,  $C(\cdot)$  e  $D(\cdot)$  são supostas contínuas e limitadas, têm dimensões compatíveis com os sinais e definem completamente a dinâmica do sistema que, por sua vez, apresenta uma característica não-linear e não-estacionária, originárias das variáveis  $\theta_x$  e  $\theta_p$ :

- $\theta_x(x(t)) \in \mathbf{R}^{r_1}$  é uma variável endógena, isto é, que depende da dinâmica do sistema;

- $\theta_p(t) \in \mathbf{R}^{r_2}$  é um parâmetro exógeno, isto é, que evolui no tempo de maneira independente da dinâmica do sistema.

A idéia central das técnicas de interpolação baseia-se na estrutura de controle ilustrada na FIG. 2.2. O sistema descrito pelas EQ. 2.1, com o par entrada-saída suplementar de desempenho  $(w, z)$  é representado por  $P(s, \theta)$ . As informações adicionais sobre a evolução do sistema são levadas em conta através da medida direta da variável de interpolação ou tabelamento  $\theta(t)$ , enquanto que as especificações de desempenho do tipo  $H_2$  e/ou  $H_\infty$  são definidas para o operador  $T_{wz}$ . O controlador interpolado  $K(s, \theta)$  trata o sinal de medida  $y(t)$ , produzindo um sinal de controle que, eventualmente, é adicionado a um sinal de referência  $r(t)$ .

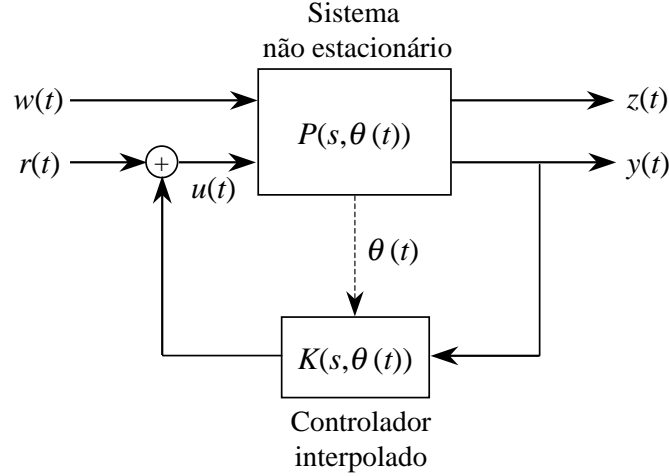


FIG. 2.2: Estrutura utilizada pelas técnicas de interpolação de controladores.

Antes de ir mais adiante, cabe fazer uma observação relativa à notação aqui utilizada. Sabe-se que o conceito de função de transferência dependente de parâmetros não tem sentido quando estes variam no tempo. A notação  $P(s, \theta)$ , onde o parâmetro  $\theta$  pode assumir diversos valores num domínio dado, é então utilizado para indicar que um sistema  $P$  do tipo LPV tem como modelo freqüencial

$$P(s, \theta) = C(\theta)[sI - A(\theta)]^{-1}B(\theta) + D(\theta) = N_{um}(s, \theta)D_{en}^{-1}(s, \theta) = \tilde{D}_{en}^{-1}(s, \theta)\tilde{N}_{um}(s, \theta),$$

para valores estacionários de  $\theta$ , isto é, tais que  $d\theta/dt = 0$ , e como modelo de estado

$$P(s, \theta) := \left[ \begin{array}{c|c} A(\theta) & B(\theta) \\ \hline C(\theta) & D(\theta) \end{array} \right] : \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\theta) & B(\theta) \\ C(\theta) & D(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix},$$

para trajetórias não-estacionárias  $\theta(t)$ . Também os termos “interpolação de controladores” e “tabelamento de ganhos” são considerados equivalentes neste trabalho e são utilizados no lugar dos termos *scheduling* ou *gain-scheduled controllers*, segundo o contexto, os quais são comumente utilizados em inglês.

A primeira etapa da síntese de controladores interpolados corresponde à obtenção de uma descrição linear aproximada do sistema não-linear das EQ. 2.1 que envolve um conjunto conveniente de variáveis de interpolação  $\theta(t)$ . A forma mais utilizada na prática consiste em:

- obter, através de uma linearização clássica do modelo representado pelas EQ. 2.1 linearizados em torno de um ponto de equilíbrio genérico  $x_o^{(i)}(u_o^{(i)})$ ,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x &= A(\theta_i)x + B(\theta_i)u \\ y &= C(\theta_i)x + D(\theta_i)u\end{aligned}$$

parametrizado por

$$\theta_i(t) = \begin{bmatrix} \theta_x(x_0^{(i)}) \\ \theta_p(t) \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^r, \quad r = r_1 + r_2;$$

- definir uma trajetória nominal  $x_0(t)$  para o sistema e, supondo que  $\theta_x(t)$  e  $d\theta_x(t)/dt$  são limitados e independentes de  $x_0(t)$  e de  $dx_0(t)/dt$ , obter um modelo do tipo LPV

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x &= A(\theta)x + B(\theta)u \\ y &= C(\theta)x + D(\theta)u,\end{aligned}\tag{2.2}$$

onde o parâmetro e sua taxa de variação evoluem dentro de um domínio compacto,  $\theta \in \mathcal{D}_{\Theta} \subset \mathbf{R}^r$ ,  $d\theta/dt \in \mathcal{D}_{\Theta_d} \subset \mathbf{R}^r$ ;

- eventualmente, escolher uma trajetória  $\theta(t) \leftarrow \theta_0(t)$  ou fixar o parâmetro em um ponto dado  $\theta(t) \leftarrow \theta_0$ , para obter, respectivamente, um modelo LTV ou LTI.

Note-se que as funções matriciais  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$ , ... nestas últimas representações são em geral diferentes daquelas das EQ. 2.1. Esta forma de construção dos diferentes tipos de modelos lineares, como também outras formas possíveis para passar de um a outro modelo, são ilustradas na FIG. 2.3.

Uma outra forma recentemente introduzida e mais direta para se obter um modelo similar àquele das EQ. 2.2, a partir das EQ. 2.1, é também esquematizada na FIG. 2.3. Ela consiste, simplesmente, em ignorar a etapa de linearização. Escolhendo-se convenientemente a função  $\theta_x(x(t))$ , reescreve-se o modelo de um forma onde os termos não-lineares

possam ser dissimulados por um parâmetro variável unicamente em função do tempo  $\theta_x(t)$ . De forma similar ao caso anterior, considera-se que as trajetórias deste parâmetro são limitadas e independentes das trajetórias de  $x(t)$ , o que desconecta as funções matriciais  $A(\cdot)$ ,  $B(\cdot)$ , ... dos estados. Este parâmetro é então incluído na variável de interpolação juntando-se ao parâmetro  $\theta_p(t)$ :

$$\theta(t) = \begin{bmatrix} \theta_x(t) \\ \theta_p(t) \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Isso quer dizer que certos estados, ou funções dos estados, são “classificados” como variáveis exógenas em certas partes do modelo, enquanto que eles permanecem variáveis endógenas em outras. Essa hipótese introduz uma certa característica conservativa, mais ou menos importante, na etapa de síntese dos controladores, no sentido de que trajetórias não realistas dos estados podem ser consideradas com maior ou menor intensidade. Neste caso particular, o modelo das EQ. 2.2 é denominado quasi-LPV.

Se uma lei de interpolação é adequada no sentido de assegurar a estabilidade e o desempenho desejado em malha fechada para todas as trajetórias no domínio  $\mathcal{D}_{\Theta} \times \mathcal{D}_{\Theta_d}$ , ela será igualmente adequada para as trajetórias reais dos estados, pois o conjunto de trajetórias de  $\theta(t)$  contém o conjunto de trajetórias de  $x(t)$ . Contudo, este caráter conservativo introduzido pela modelagem quasi-LPV é tão menos desprezível quanto maior é o número de estados envolvidos.

Como exemplo, consideremos o sistema não-linear (RUGH, 2000)

$$\frac{d}{dt}x_1 = \sin x_1 + x_2, \quad \frac{d}{dt}x_2 = x_1x_2 + u.$$

Uma representação quasi-LPV é dada por

$$\frac{d}{dt}x = A(x)x + Bu = \begin{bmatrix} (\sin x_1)/x_1 & 1 \\ x_2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

com  $\theta_x(x) = x := [x_1, x_2]^T$ ,  $x_1 \neq 0$ . Esta representação é certamente mais conservativa que o modelo dado por

$$\frac{d}{dt}x = \begin{bmatrix} (\sin x_1)/x_1 & 1 \\ 0 & x_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

onde somente uma variável de estado é englobada pelo parâmetro ( $\theta_x(x) = x_1$ ) e, portanto, a dimensão do espaço que pode incluir trajetórias não realistas é menor.

Enfim, um sistema pode ainda ser, por sua própria natureza, LPV ou LTV e nenhuma aproximação ou linearização adicional é necessária para a construção do modelo das EQ. 2.2.

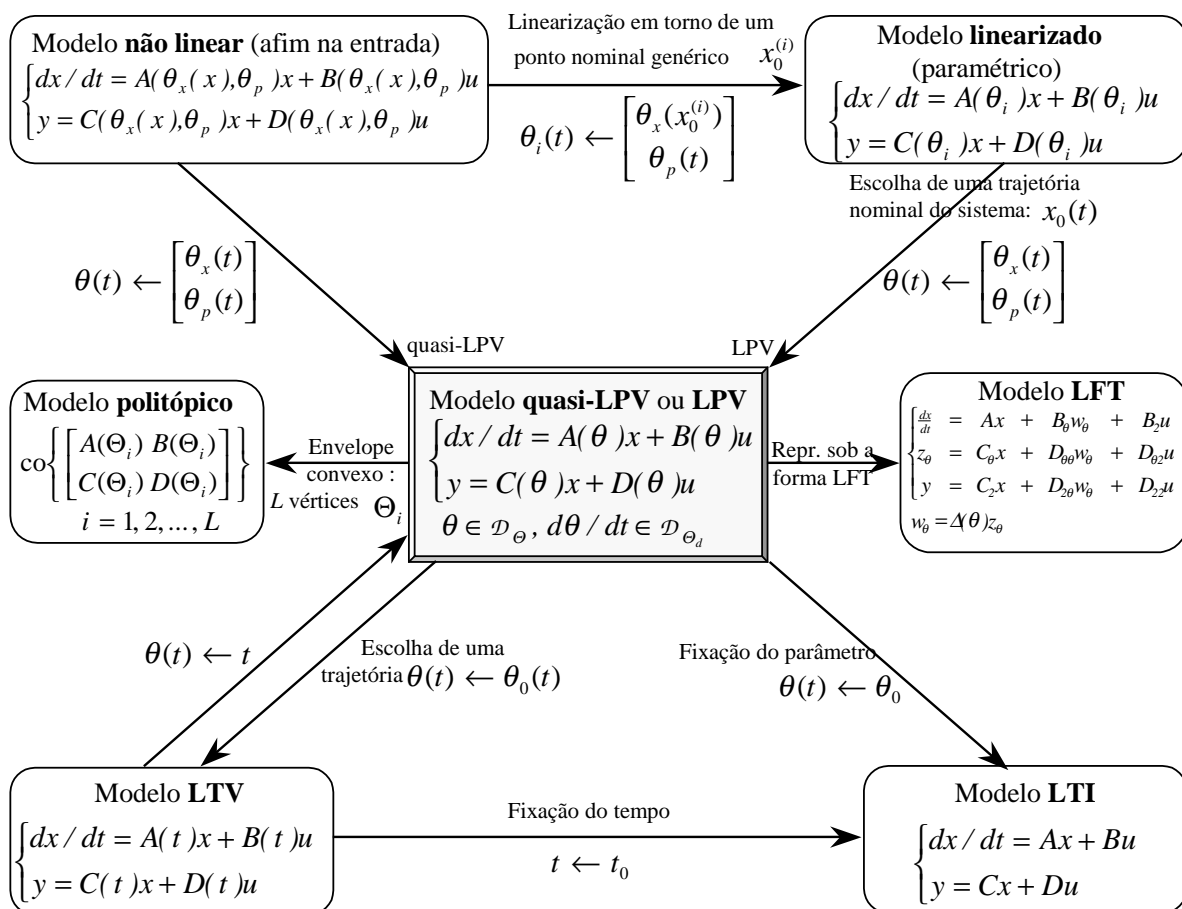


FIG. 2.3: Modelagem de sistemas não-estacionários para a síntese de controladores interpolados.

O modelo LPV ou quasi-LPV descrito nas EQ. 2.2 tolera uma dependência paramétrica muito geral que engloba a maior parte das situações práticas. Essa generalidade requer a utilização e o desenvolvimento de técnicas sofisticadas e complexas de análise e de síntese de leis de controle por interpolação de controladores. Tais técnicas envolvem frequentemente a construção de controladores interpolados que asseguram a existência de uma função de Lyapunov, geralmente dependente do parâmetro, para o sistema em malha fechada. No entanto, duas outras classes mais restritivas de modelos LPV, derivadas da forma geral das EQ. 2.2, são por vezes admissíveis (vide FIG. 2.3) e são mais adaptadas a certas metodologias específicas de interpolação de controladores.

Uma dessas classes diz respeito aos modelos de estrutura do tipo Transformação Linear Fracionária (LFT). Pode-se mostrar, fechando-se a malha  $(w_\theta, z_\theta)$ , que a dependência do tipo LFT do modelo das EQ. 2.2, FIG. 2.3, em relação ao parâmetro  $\theta(t)$  pode ser

escrita como

$$\begin{bmatrix} A(\theta) & B(\theta) \\ C(\theta) & D(\theta) \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & D_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_\theta \\ D_{2\theta} \end{bmatrix} \Delta(\theta)(I - D_{\theta\theta}\Delta(\theta))^{-1} [C_\theta \quad D_{\theta 2}] \quad (2.4)$$

onde  $\Delta(\theta)$  é uma função matricial linear de  $\theta$ . Tais modelos exigem, em geral, hipóteses que simplificam sua obtenção e podem, portanto, ser conservativos.

Uma outra classe particular de representações LPV é aquela dos modelos politópicos. Se a função matricial

$$S(\theta) := \begin{bmatrix} A(\theta) & B(\theta) \\ C(\theta) & D(\theta) \end{bmatrix}$$

é afim em  $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r]^T$ , isto é,

$$S(\theta) = S_0 + \sum_{l=1}^r \theta_l S_l \quad (2.5)$$

e os componentes escalares  $\theta_l$ ,  $l = 1, 2, \dots, r$ , evoluem (por hipótese) independentemente em um domínio limitado  $\mathcal{D}_\Theta$ , então o modelo é dito politópico. A dependência paramétrica afim da EQ. 2.5 é um caso particular da dependência paramétrica geral das EQ. 2.2 e da dependência paramétrica LFT da EQ. 2.4 e pode ser tratada por técnicas similares ou mais simples.

O método de interpolação de controladores mais utilizado no meio industrial é o que é chamado hoje de “clássico”, “convencional” ou “tradicional”. Ele se baseia em um conjunto de modelos LTI obtidos a partir da fixação do parâmetro  $\theta$  de um modelo originalmente LPV ou LTV por linearização de um modelo não-linear em torno de uma família de pontos de operação (FIG. 2.3) (SHAMMA, 1990; RUGH, 1991; KELLET, 1991; REICHERT, 1992; HYDE, 1993; NICHOLS, 1993; KAMINER, 1995; LAWRENCE, 1995; STILWELL, 1997). Um conjunto de técnicas de controle linear ( $H_2$ ,  $H_\infty$ ,  $\mu$ -síntese, PRCBI etc., e suas variantes) é, então, disponível para projetar uma família de controladores LTI que oferecem um compromisso razoável entre desempenho e robustez em torno das condições de funcionamento dadas. Quanto às estratégias para os interpolar, elas variam bastante segundo o método de síntese linear escolhido e são, na maioria das vezes, intuitivas e baseadas em uma diretiva heurística principal:

“Os controladores lineares são supostos suficientemente próximos para permitir transições suaves e para assimilar as não-estacionariedades provenientes das não-linearidades do sistema.”

A interpolação pode ser linear ou não e pode implicar tanto os coeficientes quanto os



saídas de saída dos controladores LTI. Entre as estratégias de interpolação mais utilizadas, encontram-se aquelas que consistem em interpolar, ou os coeficientes de funções de transferência (NICHOLS, 1993), ou os coeficientes de realizações de estado (KELLET, 1991; HYDE, 1993), ou ainda, quando tratar-se de um conjunto de controladores lineares robustos  $H_2$  ou  $H_\infty$ , soluções de equações de Riccati (REICHERT, 1992). O controlador interpolado convencional é, então, um sistema não-estacionário (LPV ou não-linear) obtido por interpolação simples de controladores LTI em relação às variáveis de interpolação.

A interpolação clássica de controladores encontra dificuldades teóricas relativas a questões delicadas no que se refere à estabilidade e ao desempenho durante a transição entre os controladores locais. As etapas de síntese e de interpolação são conduzidas separadamente o que não garante que o sistema não-estacionário em malha fechada seja estável e que o desempenho apresentado em torno dos pontos de projeto prevaleçam de uma forma global.

A interpolação de controladores é tratada também no contexto do controle LPV, onde funções de Lyapunov são utilizadas para definir a estabilidade e o desempenho para uma larga faixa de variação do parâmetro. Na verdade os termos “controle LPV” ou “interpolação LPV” são utilizados para designar as técnicas clássicas de interpolação de controladores onde as necessidades práticas da interpolação, ou seja, estabilidade e desempenho robusto (v. Seção 2.2), são satisfeitas de uma forma algorítmica dentro de um contexto de otimização convexa sob restrições do tipo Desigualdade Matricial Linear (LMI).

Os métodos de interpolação LPV distinguem-se das técnicas de interpolação clássicas mais pela sua maneira sistemática de tratar o problema do que pelo seu objetivo. De um ponto de vista conceitual, a interpolação do tipo LPV é, no entanto, muito diferente, já que as questões relacionadas à estabilidade e ao desempenho em tempo variante são consideradas diretamente na síntese dos controladores LPV. A tarefa mais exigente consiste em resolver problemas de otimização do tipo LMI. Isso é relativamente fácil utilizando-se os códigos de programação semi-definida disponíveis atualmente (BOYD, 1994; GAHINET, 1994b). Trata-se, na realidade, de uma extensão dos métodos de controle robusto LTI, do tipo  $H_2$  e  $H_\infty$ , aos sistemas não-estacionários LPV ou quasi-LPV. Em suma, as técnicas LPV são igualmente aplicáveis a modelos por natureza LTV ou LPV, a modelos linearizados (parametrizados por variáveis de interpolação) ou a modelos quasi-LPV. Estas vantagens explicam o repentino interesse nos últimos anos nesse tipo

de técnica (BECKER, 1993; PACKARD, 1994; APKARIAN, 1995; SCHERER, 1996; KAJIWARA, 1999).

## 2.2 ESTABILIDADE E DESEMPENHO ROBUSTO

### 2.2.1 ESTABILIDADE GLOBAL

Considere sistemas não-estacionários e não-lineares que se enquadram nas EQ. 2.1 e LPV das EQ. 2.2 e pares de sinais entrada-saída  $(w_j, z_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , que definem  $T_{w_j z_j}$ : canais suplementares de desempenho. Neste estudo, o objetivo primordial de uma lei de controle  $u = Ky$  é assegurar a estabilidade e o desempenho robusto do sistema em malha fechada. Isto é, o sistema deve ser estável e as amplitudes dos ganhos dos operadores  $T_{w_j z_j}$ , definidas por normas dos tipos  $H_2$  e/ou  $H_\infty$ , devem permanecer dentro de limites aceitáveis, para o domínio de operação do sistema.

Das várias noções de estabilidade que existem, destacam-se as seguintes, que se encontram em várias referências como, por exemplo, (KHALIL, 1996). Essas definições são válidas para sistemas quasi-LPV ou originalmente LPV (EQ. 2.2) como também para o sistema não-linear (EQ. 2.1, desde que o parâmetro  $\theta$  seja interpretado como  $\theta_p$ ), com uma condição inicial  $x(0) = x_0$  qualquer.

**Definição 2.1 (Estabilidade Exponencial Global)** *Sistemas descritos pelas EQ. 2.1 e 2.2 são estáveis e a origem  $x = 0$  é global e exponencialmente estável se existem valores constantes  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$  tais que, para uma condição inicial qualquer  $x_0$ , para todo  $\theta \in \mathcal{D}_\Theta$  e para  $u = 0$ , a trajetória do estado  $x$  satisfaz*

$$\|x\|_2 \leq \beta e^{-\alpha t} \|x_0\|_2, \quad \forall t > 0.$$

Note-se que a estabilidade exponencial implica na estabilidade assintótica uniforme e na estabilidade entrada-saída. Quando a noção de estabilidade exponencial é aplicada aos sistemas da EQ. 2.1 e da EQ. 2.2 realimentados através de um controlador  $K$ , ela implica também na estabilidade interna.

**Definição 2.2 (Estabilidade Exponencial Global via Função de Lyapunov)** *A origem  $x = 0$  dos sistemas da EQ. 2.1 e da EQ. 2.2 é global e exponencialmente estável se existe uma função escalar contínua  $V(x(t), \theta(t))$  e constantes escalares positivas  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$  tais que:*

$$(i) : \alpha_1 \|x(t)\|_2^2 \leq V(x, \theta) \leq \alpha_2 \|x(t)\|_2^2, \quad \forall \theta \in \mathcal{D}_\Theta, \quad \forall t \geq 0,$$

$$(ii) : \frac{dV(x,\theta)}{dt} \leq -\alpha_3 \|x(t)\|_2^2, \forall \theta \in \mathcal{D}_{\Theta}, \forall t \geq 0,$$

$$(iii) : V(x,\theta) \rightarrow \infty, \forall \theta \in \mathcal{D}_{\Theta} \text{ quando } \|x(t)\|_2 \rightarrow \infty.$$

Uma função  $V(x,\theta)$  que satisfaz as condições acima é chamada de função de Lyapunov. Se existe uma tal função que seja quadrática em relação ao estado  $x$ , dada por:

$$V(x) = x^T Q x,$$

onde a variável de Lyapunov  $Q$  é constante, então pode-se afirmar que os sistemas analisados são quadraticamente estáveis sobre  $\mathcal{D}_{\Theta}$ . Esta noção de estabilidade quadrática é mais restritiva que a da estabilidade exponencial.

Enfim, no caso onde o modelo LPV da EQ. 2.2 é, na verdade, uma representação quasi-LPV do sistema não-linear da EQ. 2.1, a estabilidade do modelo LPV no sentido global implica na estabilidade global do modelo não-linear se  $x(t)$  permanece na região considerada do espaço de estado. Isto se deve ao fato que toda solução  $x(t)$  do modelo não-linear nesta região limitada é também uma solução do modelo quasi-LPV. Uma vez que o parâmetro  $\theta_x$  pode variar arbitrariamente no modelo quasi-LPV, a afirmativa inversa não é válida, o que introduz um conservatismo nesta representação. Em certos exemplos, notadamente naqueles onde a velocidade de variação de  $\theta_x$  é grande, este inconveniente é tolerável em comparação com a abordagem de modelagem por linearização, onde a estabilidade do modelo LPV não implica na estabilidade do sistema não-linear.

### 2.2.2 DESEMPENHO ROBUSTO

No contexto dos sistemas LTI, liga-se geralmente a noção de desempenho à existência de um limitante superior das normas de uma função de transferência nos espaços de Hardy  $H_2$  e/ou  $H_\infty$ . Em contrapartida, quando o interesse é na classe de sistemas LPV ou LTV, a noção de função de transferência e, por conseguinte, o conceito de normas  $H_2$  e  $H_\infty$  perdem a validade. Os resultados de análise de desempenho apresentados nos capítulos subseqüentes apóiam-se sobre extensões das normas  $H_2$  e  $H_\infty$ , que estão definidos exclusivamente no domínio do tempo.

Trata-se, mais precisamente da norma  $\mathcal{L}_2$  induzida de um sistema LPV da EQ. 2.2 com o par entrada-saída adicional  $(w,z)$ . Esta norma é limitada por  $\gamma$  se para toda trajetória paramétrica no domínio  $\mathcal{D}_{\Theta} \times \mathcal{D}_{\Theta_d}$

$$\int_0^t z^T z d\tau \leq \gamma^2 \int_0^t w^T w d\tau, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall w \in \mathcal{L}_2. \quad (2.6)$$

Esta definição coincide perfeitamente com a norma  $H_\infty$  do caso LTI clássico. Nota-se aqui simplesmente a ausência de interpretação no domínio freqüencial. A norma  $\mathcal{L}_2$  induzida do canal  $T_{wz}$ , chamada às vezes de desempenho do tipo  $H_\infty$  (ou simplesmente desempenho  $H_\infty$ ), é o menor valor de  $\gamma$  tal que a relação da EQ. 2.6 seja ainda verificada:

$$\gamma := \sup_{w \in \mathcal{L}_2, \theta(t) \in \mathcal{D}_\Theta} \frac{\int_0^\infty z^T z d\tau}{\int_0^\infty w^T w d\tau}.$$

O desempenho  $H_\infty$  definido acima é o ganho do operador  $T_{wz}$  quando a entrada  $w$  e a saída  $z$  são medidas em termos de energia ou da norma  $\mathcal{L}_2$ . Todavia, é preferível, às vezes, restringir a amplitude máxima da componente  $z_j$  da saída abaixo de um certo nível, a limitar sua energia. Se a entrada  $w_j$  permanece ainda quantificada pela sua energia, pode-se definir a norma  $H_2$  generalizada

$$\nu := \sup_{\forall j, \theta \in \mathcal{D}_\Theta} \{ \|z_j(t)\| : x(0) = 0, \forall t \geq 0, \int_0^t \|w_j(\tau)\|^2 d\tau \leq 1 \}.$$

Esta norma mede a amplitude máxima do sinal  $z_j(t)$  para o conjunto de entradas  $w_j(t)$  de energia unitária, isto é, a amplitude máxima das respostas impulsionais. Ela tem uma interpretação puramente temporal no contexto dos sistemas não-estacionários e é igualmente caracterizada pela covariância do ruído de medida quando a entrada é um ruído branco Gaussiano.

Essas duas medidas de desempenho ( $H_2$  e  $H_\infty$ ) podem ser associadas à estabilidade quadrática no contexto das técnicas LMI, respectivamente, do lema do limitante real (*bounded-real lemma*) e dos gramianos de controlabilidade e de observabilidade (BOYD, 1994; GAHINET, 1994a; SCHERER, 1997) para sistemas contínuos ou discretos. Essas propriedades são exploradas pelo método LPV descrito na próxima seção.

## 2.3 UM MÉTODO LPV MULTICANAL

### 2.3.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Considere um sistema LPV contínuo no tempo com estrutura LFT

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x(t) \\ z_\Delta(t) \\ z(t) \\ y(t) \\ w_\Delta(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B_\Delta & B_1 & B_2 \\ C_\Delta & D_{\Delta\Delta} & D_{\Delta 1} & D_{\Delta 2} \\ C_1 & D_{1\Delta} & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{2\Delta} & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w_\Delta(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \\ w_\Delta(t) &= \Delta(t) z_\Delta(t), \end{aligned} \tag{2.7}$$

onde  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $\Delta(t) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ ,  $D_{12} \in \mathbf{R}^{p_1 \times m_2}$  e  $D_{21} \in \mathbf{R}^{p_2 \times m_1}$  definem as dimensões do sistema. A notação para os sinais é:  $x$  para o vetor de estados,  $w$  para entradas exógenas,  $z$  para variáveis controladas ou de desempenho,  $u$  para o sinal de controle, e  $y$  para o sinal medido.  $\Delta(t)$  é uma matriz paramétrica variante no tempo e pertencente a um conjunto politópico  $\mathcal{P}_\Delta$ , com

$$\mathcal{P}_\Delta := \text{co} \{ \Delta_1, \dots, \Delta_i, \dots, \Delta_L \} \ni 0, \quad (2.8)$$

onde  $\text{co}$  representa um envelope convexo e  $\Delta_i$  denota os vértices de  $\mathcal{P}_\Delta$ . Ou seja,

$$\Delta := \sum_{i=1}^L \alpha_i \Delta_i, \quad \sum_{i=1}^L \alpha_i = 1, \quad (2.9)$$

onde  $\alpha_i \geq 0$  são as coordenadas politópicas de  $\Delta$ . Essas coordenadas são calculadas em tempo real como funções dos parâmetros variáveis do sistema, os quais são considerados medidos e podem, portanto, ser explorados pelo controlador.

De acordo com as definições, os pares  $(w, z)$  e  $(w_\Delta, z_\Delta)$  definem os canais de desempenho e paramétrico, respectivamente. Por simplicidade de representação, assume-se, sem perda de generalidade, que  $D_{22} = 0$ .

Neste trabalho, considera-se a situação especial em que  $\Delta$  tem uma estrutura bloco-diagonal determinada por um vetor de parâmetros  $\theta := (\theta_1, \dots, \theta_r)^T$  com

$$\Delta = \text{diag}(\theta_1 I_{s_1}, \dots, \theta_r I_{s_r}) \quad (2.10)$$

Também, assume-se que  $\theta$  está contido num hiper-retângulo definido como

$$\theta_i \in [\underline{\theta}_i, \bar{\theta}_i], \quad \underline{\theta}_i < \bar{\theta}_i, \quad \forall i \geq 0. \quad (2.11)$$

Essas definições e considerações significam que:

- o parâmetro variante no tempo  $\theta$  evolui dentro de um hiper-retângulo  $\mathcal{P}_\Theta$  de  $\mathbf{R}^r$ , com

$$\mathcal{P}_\Theta := \text{co} \{ \Theta_1, \dots, \Theta_L \}, \quad (2.12)$$

onde o  $\Theta_i$ 's são os vértices de  $\mathcal{P}_\Theta$ ;

- $\Delta$  e  $\theta$  têm as mesmas coordenadas politópicas  $\{\alpha_i\}$ ;
- O número  $L$  de vértices do hiper-retângulo e a ordem  $N$  do bloco  $\Delta(\theta)$  são calculados por:

$$L = 2^r \text{ e } N = \sum_{l=1}^r s_l. \quad (2.13)$$

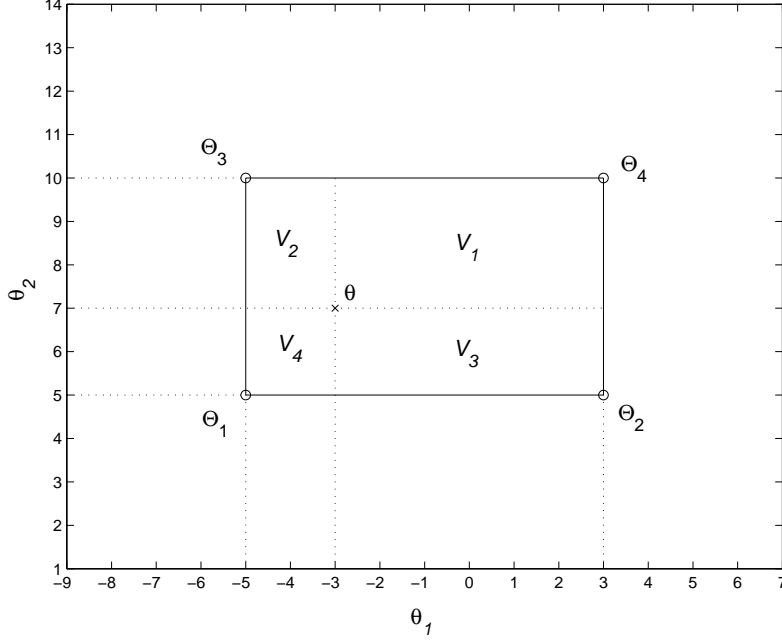


FIG. 2.4: Domínio paramétrico no espaço  $\mathbf{R}^2$ .

Neste capítulo,  $i$  ( $= 1, \dots, L$ ) indexa os vértices  $\Theta_i$  e  $\Delta_i$ ,  $j$  ( $= 1, 2, \dots$ ) indexa os canais e especificações, e  $l$  ( $= 1, \dots, r$ ) indexa os parâmetros.

Para um parâmetro que evolui em um hiper-retângulo, as coordenadas baricêntricas (ou politópicas) podem ser calculadas de uma forma direta e rápida utilizando relações de hiper-volumes. Considere o exemplo de duas dimensões representado na FIG. 2.4, onde  $\theta_1 \in [-5, 3]$  e  $\theta_2 \in [5, 10]$ . Os vértices do retângulo representativo do domínio de evolução do parâmetro são

$$\{\Theta_1, \dots, \Theta_4\} = \{[-5, 5]^T, [3, 5]^T, [-5, 10]^T, [3, 10]^T\}.$$

Um ponto  $\theta$  qualquer nesse domínio pode ser utilizado para definir sub-retângulos cujas áreas são  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Nota-se que  $V_i$  corresponde ao sub-retângulo oposto a  $\Theta_i$ . As coordenadas politópicas de  $\theta$  são calculadas em termos das relações entre cada área  $V_i$  e a área total  $V = \sum_{i=1}^4 V_i$ . Isso quer dizer que

$$\alpha_i = \frac{V_i}{V}, \quad i = 1, \dots, 4, \quad \text{com} \quad \theta = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \Theta_i.$$

Por exemplo, o ponto  $\theta = [-3, 7]^T$  pode ser representado por suas coordenadas politópicas

$$\alpha = \left[ \frac{18}{40}, \frac{6}{40}, \frac{12}{40}, \frac{4}{40} \right]^T = [0.45, 0.15, 0.3, 0.1]^T.$$

O algoritmo seguinte estende esse procedimento para hiper-retângulos gerais da EQ. 2.11 com vértices da EQ. 2.12 (PELLANDA, 2002b):

**Algoritmo 2.3** *Cálculo de Coordenadas Politópicas*

**Etapa 1:** Dado um parâmetro  $\theta := (\theta_1, \dots, \theta_r)^T$ , calcular suas coordenadas retangulares normalizadas

$$\vartheta_l := \frac{(\bar{\theta}_l - \theta_l)}{(\bar{\theta}_l - \underline{\theta}_l)}, \quad l = 1, \dots, r.$$

**Etapa 2:** Para cada vértice  $\Theta_i$ ,  $i = 1, \dots, L$ , calcular as coordenadas politópicas correspondentes

$$\alpha_i = \prod_{l=1}^r \tilde{\vartheta}_l, \quad \text{onde} \quad \tilde{\vartheta}_l = \begin{cases} \vartheta_l, & \text{se } \underline{\theta}_l \text{ for uma coordenada de } \Theta_i; \\ 1 - \vartheta_l, & \text{se } \bar{\theta}_l \text{ for uma coordenada de } \Theta_i. \end{cases}$$

Este resultado mostra que o cálculo de coordenadas baricêntricas a partir de coordenadas retangulares medidas é um procedimento numérico pouco dispendioso computacionalmente. Na realidade, ele pode ser executado prontamente em tempo real por intermédio de operações simples que consistem essencialmente em  $(r)$  normalizações e em  $(Lr - L)$  multiplicações escalares.

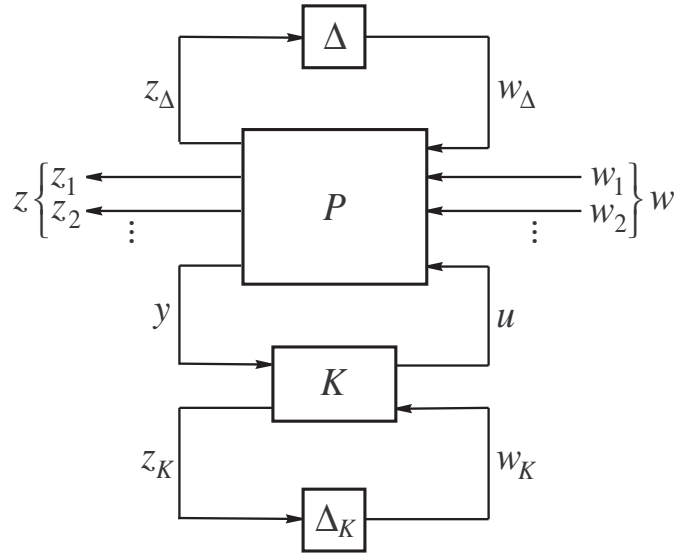


FIG. 2.5: Estrutura de controle LPV multicanal.

Para a planta LPV das EQ. 2.7 o problema de controle por tabelamento de ganhos consiste em buscar um controlador LPV com estrutura LFT

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x_K(t) \\ u(t) \\ z_K(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_K & B_{K1} & B_{K\Delta} \\ C_{K1} & D_{K11} & D_{K1\Delta} \\ C_{K\Delta} & D_{K\Delta 1} & D_{K\Delta\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_K(t) \\ y(t) \\ w_K(t) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$w_K(t) = \Delta_K(t)z_K(t),$$

onde  $A_K \in \mathbf{R}^{n \times n}$  e  $\Delta_K \in \mathbf{R}^{N \times N}$ , tal que especificações do tipo  $H_2$  e/ou  $H_\infty$  sejam satisfeitas para uma família de canais  $(w_j, z_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , onde  $w_j$  e  $z_j$  são sub-vetores de  $w$  e  $z$ , respectivamente (FIG. 2.5). Em outras palavras, limitantes superiores  $\nu_j$  da variância das saídas  $z_j$  e/ou limitantes superiores  $\gamma_j$  do ganho induzido  $L_2$  do operador linear que mapeia  $w_j$  em  $z_j$  devem ser garantidos para todas as trajetórias paramétricas admissíveis  $\Delta(t) \in \mathcal{P}_\Delta$ . A notação  $\Delta_K$  é usada para a função de interpolação que é uma função do parâmetro  $\Delta$ , isto é,  $\Delta_K(t) := \Delta_K(\Delta(t))$ .

**Nota 2.4** *Para um índice  $\nu_j$  de desempenho  $H_2$  ser bem definido no domínio do tempo contínuo, os dados do modelo de estado devem ser tais que o termo de transmissão direta em malha fechada do canal  $j$  seja nulo. Sem impor restrições ao controlador, isso pode ser alcançado desde que  $D_{11j} = 0$  e:*

- $D_{1\Delta j} = 0$  e  $D_{12j} = 0$ ; ou
- $D_{\Delta 1j} = 0$  e  $D_{21j} = 0$ .

### 2.3.2 DESEMPENHO TEMPORAL NO CONTEXTO DO CONTROLE LPV/LFT

O objetivo desta seção é mostrar que especificações no domínio do tempo podem ser interpretadas, no contexto LPV/LFT do sistema definido pelas EQ. 2.7, de uma maneira elegante em termos de um critério do tipo  $H_2$ , conforme (PELLANDA, 2002a).

Seja  $\xi(t) \in \mathbf{R}^q$  uma variável suplementar e  $\mathcal{H} \in \mathbf{R}^{q \times n}$  uma matriz de posto cheio que seleciona alguns estados importantes ou uma combinação linear destes, isto é,

$$\xi(t) = \mathcal{H}x(t). \quad (2.15)$$

O Problema de Acompanhamento de uma Dinâmica Implícita (PADI) tratado em (PELLANDA, 2002a) consiste em calcular uma lei de controle de realimentação dinâmica de saída, conforme as EQ. 2.14,  $u = \mathcal{F}_l(K, \Delta_K)y$ , onde  $\mathcal{F}_l$  é a notação para LFT inferior, para o sistema descrito nas EQ. 2.7, tal que a dinâmica em malha fechada da saída controlada  $\xi$  seja tão próxima quanto possível de uma dinâmica desejada, dada por

$$\frac{d}{dt}\eta(t) = A_d\eta(t), \quad \eta(t) \in \mathbf{R}^q, \quad (2.16)$$

para todas as trajetórias paramétricas admissíveis  $\Delta(t) \in \mathcal{P}_\Delta$ . Note que  $A_d$  é usualmente selecionada de modo a refletir especificações no domínio do tempo.

Com o paradigma PADI,  $\eta(t) = \xi(t)$ , pode-se calcular a derivada do erro a partir das EQ. 2.7 e da EQ. 2.16:

$$\frac{d}{dt}e := \mathcal{H}\left(\frac{d}{dt}x\right) - \frac{d}{dt}\eta. \quad (2.17)$$



O PADI pode então ser reformulado como um problema de minimização de um índice de desempenho quadrático da forma

$$J := \int_0^\infty \left[ \left( \frac{d}{dt} e \right)^T R_0 \left( \frac{d}{dt} e \right) + u^T R_1 u \right] dt, \quad (2.18)$$

onde uma ponderação de entrada  $R_1$  foi introduzida para uma maior flexibilidade de projeto.

Substituindo a EQ. 2.17 na EQ. 2.18, com os dados das EQ. 2.7 e da EQ. 2.16, o custo da EQ. 2.18 torna-se

$$J = \int_0^\infty [x^T R_x x + 2x^T R_{xu} u + u^T R_u u] dt, \quad (2.19)$$

onde as matrizes de ponderação  $R_x$ ,  $R_{xu}$  e  $R_u$  são funções dos dados do problema:

$$\begin{aligned} R_x &= \left[ \mathcal{H} \left( A + B_\Delta \hat{\Delta} C_\Delta \right) - A_d \mathcal{H} \right]^T R_0 \left[ \mathcal{H} \left( A + B_\Delta \hat{\Delta} C_\Delta \right) - A_d \mathcal{H} \right], \\ R_{xu} &= \left[ \mathcal{H} \left( A + B_\Delta \hat{\Delta} C_\Delta \right) - A_d \mathcal{H} \right]^T R_0 \left[ \mathcal{H} \left( B_2 + B_\Delta \hat{\Delta} D_{\Delta 2} \right) \right], \\ R_u &= \left[ \mathcal{H} \left( B_2 + B_\Delta \hat{\Delta} D_{\Delta 2} \right) \right]^T R_0 \left[ \mathcal{H} \left( B_2 + B_\Delta \hat{\Delta} D_{\Delta 2} \right) \right] + R_1. \end{aligned}$$

com

$$\hat{\Delta}(t) = \Delta(t) [I - D_{\Delta\Delta} \Delta(t)]^{-1}.$$

Portanto, o PADI consiste em uma minimização de um critério quadrático clássico com um termo de ponderação cruzada  $x^T R_{xu} u$ . Esse problema pode ser interpretado como um problema de controle LPV/LFT o qual consiste em minimizar um limitante superior  $\nu$  do índice desempenho  $H_2$  de um canal  $(w, z)$  do sistema das EQ. 2.7, definido pelas matrizes (ver (PELLANDA, 2002a))

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{\Delta 1} \\ D_{11} \\ D_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n \\ 0_{N \times n} \\ 0_{(q+m_2) \times n} \\ 0_{p_2 \times n} \end{bmatrix} \text{ e} \quad (2.20)$$

$$[C_1 \quad D_{1\Delta} \quad D_{11} \quad D_{12}] = \begin{bmatrix} C_{11} & R_0^{1/2} \mathcal{H} B_\Delta & 0_{q \times n} & R_0^{1/2} \mathcal{H} B_2 \\ 0_{m_2 \times n} & 0_{m_2 \times N} & 0_{m_2 \times n} & R_1^{1/2} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

onde

$$C_{11} = R_0^{1/2} (\mathcal{H} A - A_d \mathcal{H}).$$

Note que as condições da Nota 2.4 são atendidas e esse problema é bem definido.

É importante salientar o fato que essa maneira de abordar o PADI é muito apropriada para o contexto multicanal da Seção 2.3.1, permitindo incorporar um conjunto suplementar de restrições de desempenho  $H_2$  e/ou  $H_\infty$ .

### 2.3.3 SOLUÇÃO DO PROBLEMA

No artigo (APKARIAN, 2000) são obtidas condições de solvabilidade pouco conservativas para o problema LPV/LFT misto  $H_2/H_\infty$  multicanal em tempo discreto formulado na Seção 2.3.1. Esse artigo apresenta uma descrição compreensiva da metodologia LMI proposta, enquanto que sua aplicabilidade em um sistema LPV contínuo é investigado em (PELLANDA, 2002b). O Algoritmo 2.5 a seguir apresenta resumidamente as principais etapas do procedimento de síntese LPV. Por conveniência, as caracterizações em termos de restrições do tipo LMI, como também a estrutura de construção do controlador LPV discreto estão reproduzidas no Apêndice 8.1.

#### Algoritmo 2.5 Síntese de Controladores LPV/LFT

**Etapa 1:** Dada a planta contínua no tempo das EQ. 2.7,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) + B\vartheta(t) \\ \psi(t) &= Cx(t) + D\vartheta(t),\end{aligned}\tag{2.22}$$

com  $\vartheta := [w_\Delta^T, w^T, u^T]^T$  e  $\psi := [z_\Delta^T, z^T, y^T]^T$ , calcula-se sua correspondente descrição de estado em tempo discreto, aplicando a transformação bilinear

$$\tilde{P} := \begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{bmatrix} = \mathcal{F}_u \left( \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I & \sqrt{T_s}I \\ \sqrt{T_s}I & I \end{bmatrix} \right),\tag{2.23}$$

onde  $\mathcal{F}_u$  é a costumeira notação de LFT superior e o período de amostragem é  $T_s := 2s$ .

**Etapa 2:** Definem-se as seguintes variáveis genéricas não-simétricas de decisão, as quais são comuns a todas especificações e canais (TAB. 2.1):

- o conjunto  $\mathbf{S}_v$  de variáveis genéricas auxiliares; o conjunto  $\mathbf{K}_v$  de variáveis do controlador transformadas, cujas dimensões devem ser definidas de acordo com as dimensões do controlador da EQ. 2.14; e o conjunto  $\Delta_{\mathbf{K}_v}$  de coeficientes da função de interpolação.

**Etapa 3:** Para cada canal  $H_2$ , define-se o conjunto  $\mathbf{H}_{2v_j}$  das seguintes variáveis de decisão simétricas (TAB. 2.1):

- variáveis de Lyapunov ( $\mathbf{X}_{2j}$  e  $Z_j$ ); variáveis de “scaling” ( $\mathbf{Q}_{1j}$ ,  $\mathbf{Q}_{2j}$ ,  $\mathbf{R}_{1j}$  e  $\mathbf{R}_{2j}$ ); e uma variável de desempenho ( $\nu_j$ ).

**Etapa 4:** Para cada canal  $H_\infty$ , define-se o conjunto  $\mathbf{H}_{\infty v_j}$  das seguintes variáveis de decisão simétricas (TAB. 2.1):

- a variável de Lyapunov ( $\mathbf{X}_{\infty j}$ ); variáveis de “scaling” ( $\mathbf{Q}_{\infty j}$  e  $\mathbf{R}_{\infty j}$ ); e uma variável de desempenho ( $\gamma_j$ ).

**Etapa 5:** Para cada canal/especificação, constrói-se o sistema de restrições LMI descrito no Apêndice 8.1 e representado aqui pelas notações simplificadas abaixo:

- desempenho  $H_2$ :

$$\mathcal{L}_{H_2}(\mathbf{S}_v, \mathbf{K}_v, \Delta_{\mathbf{K}v}, \mathbf{H}_{2v}, \{\Delta_i\}, \tilde{P}_j) < 0 \quad (2.24)$$

- desempenho  $H_\infty$ :

$$\mathcal{L}_{H_\infty}(\mathbf{S}_v, \mathbf{K}_v, \Delta_{\mathbf{K}v}, \mathbf{H}_{\infty v}, \{\Delta_i\}, \tilde{P}_j) < 0 \quad (2.25)$$

onde  $\tilde{P}_j$  é o conjunto de matrizes de espaço de estados discreto da EQ. 2.23, representando a planta LPV contínua das EQ. 2.7 com somente o canal/especificação  $(w_j, z_j)$  sob consideração.

**Etapa 6:** (Problema de otimização LMI) - Basicamente, 3 tipos de problemas podem ser formulados:

- (Sínteses  $H_2$  ou  $H_\infty$  simples) Minimiza-se uma variável de desempenho específica,  $\gamma_j$  ou  $\nu_j$ , sujeita a restrições LMI das EQ. 2.24 e EQ. 2.25, impondo-se um conjunto de restrições limitantes superiores adequado para as variáveis de desempenho remanecentes ( $\gamma_\ell < \bar{\gamma}_\ell$  ou  $\nu_\ell < \bar{\nu}_\ell$ ,  $\ell = 1, 2, \dots, \ell \neq j$ ), isto é, fixando-as em valores predeterminados;

- (Síntese mista ponderada  $H_2/H_\infty$ ) Minimiza-se um critério de compromisso da forma

$$\sum_j (\alpha_j \gamma_j + \beta_j \nu_j) ,$$

sob as restrições LMI das EQ. 2.24 e EQ. 2.25, onde o  $\alpha_j$  ( $\geq 0$ ) e  $\beta_j$  ( $\geq 0$ ) são pesos escalares, impondo-se ou não algum conjunto adequado de restrições limitantes superiores  $\gamma_j < \bar{\gamma}_j$  e/ou  $\nu_j < \bar{\nu}_j$ ;

- (Problema de viabilidade) Calcula-se uma solução possível para as restrições LMI das EQ. 2.24 e EQ. 2.25, impondo-se ou não restrições limitantes superiores  $\gamma_j < \bar{\gamma}_j$  e/ou  $\nu_j < \bar{\nu}_j$ .

**Etapa 7:** (Construção do controlador LPV discreto) Uma vez que a solução do problema de otimização da Etapa 6 esteja calculada, os dados de espaço de estados do controle LPV discreto, EQ. 2.26, são facilmente obtidos como indicado abaixo:

$$\tilde{K} := \begin{bmatrix} \tilde{A}_K & \tilde{B}_{K1} & \tilde{B}_{K\Delta} \\ \tilde{C}_{K1} & \tilde{D}_{K11} & \tilde{D}_{K1\Delta} \\ \tilde{C}_{K\Delta} & \tilde{D}_{K\Delta 1} & \tilde{D}_{K\Delta\Delta} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

- Calcula-se uma fatoração SVD de  $\mathbf{U} - V_{11}^T W_{11}$ ,  $\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^T$ , e deduzem-se as matrizes inversíveis  $V_{21} = \Sigma^{1/2}\mathbf{U}^T$  e  $W_{21} = \Sigma^{1/2}\mathbf{V}^T$ , conforme as EQ. 2.27. De maneira análoga, calculam-se fatoraões SVD de  $\mathbf{M} - H_{11}^T G_{11}$  e de  $\mathbf{N} - F_{11}^T E_{11}$  e deduzem-se as matrizes invertendo-se  $H_{21}$ ,  $G_{21}$ ,  $F_{21}$  e  $E_{21}$ , de acordo com as EQ. 2.27.

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &:= V_{11}^T W_{11} + V_{21}^T W_{21}, \\ \mathbf{M} &:= H_{11}^T G_{11} + H_{21}^T G_{21}, \\ \mathbf{N} &:= F_{11}^T E_{11} + F_{21}^T E_{21}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

- Calculam-se os dados do controlador discreto da EQ. 2.26 invertendo-se as mudanças de variáveis sequencialmente como especificado a seguir.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{K11} &:= \tilde{D}_{K11}, \\ \mathbf{B}_{K1} &:= V_{21}^T \tilde{B}_{K1} + V_{11}^T \tilde{B}_2 \tilde{D}_{K11}, \\ \mathbf{C}_{K1} &:= \tilde{D}_{K11} \tilde{C}_2 W_{11} + \tilde{C}_{K1} W_{21}, \\ \mathbf{A}_K &:= V_{11}^T \tilde{A} W_{11} + V_{21}^T \tilde{A}_K W_{21} + V_{21}^T \tilde{B}_{K1} \tilde{C}_2 W_{11} \\ &\quad + V_{11}^T \tilde{B}_2 \tilde{C}_{K1} W_{21} + V_{11}^T \tilde{B}_2 \tilde{D}_{K11} \tilde{C}_2 W_{11}, \\ \mathbf{D}_{K1\Delta} &:= \tilde{D}_{K11} \tilde{D}_{2\Delta} E_{11} + \tilde{D}_{K1\Delta} E_{21}, \\ \mathbf{D}_{K\Delta 1} &:= H_{11}^T \tilde{D}_{\Delta 2} \tilde{D}_{K11} + H_{21}^T \tilde{D}_{K\Delta 1}, \\ \mathbf{B}_{K\Delta} &:= V_{11}^T \tilde{B}_{\Delta} E_{11} + V_{21}^T \tilde{B}_{K1} \tilde{D}_{2\Delta} E_{11} + V_{11}^T \tilde{B}_2 \tilde{D}_{K11} \tilde{D}_{2\Delta} E_{11} \\ &\quad + V_{21}^T \tilde{B}_{K\Delta} E_{21} + V_{11}^T \tilde{B}_2 \tilde{D}_{K1\Delta} E_{21}, \\ \mathbf{C}_{K\Delta} &:= H_{11}^T \tilde{C}_{\Delta} W_{11} + H_{11}^T \tilde{D}_{\Delta 2} \tilde{D}_{K11} \tilde{C}_2 W_{11} + H_{21}^T \tilde{D}_{K\Delta 1} \tilde{C}_2 W_{11} \\ &\quad + H_{11}^T \tilde{D}_{\Delta 2} \tilde{C}_{K1} W_{21} + H_{21}^T \tilde{C}_{K\Delta} W_{21}, \\ \mathbf{D}_{K\Delta\Delta} &:= H_{11}^T \tilde{D}_{\Delta\Delta} E_{11} + H_{11}^T \tilde{D}_{\Delta 2} \tilde{D}_{K11} \tilde{D}_{2\Delta} E_{11} \\ &\quad + H_{21}^T \tilde{D}_{K\Delta 1} \tilde{D}_{2\Delta} E_{11} + H_{11}^T \tilde{D}_{\Delta 2} \tilde{D}_{K1\Delta} E_{21} \\ &\quad + H_{21}^T \tilde{D}_{K\Delta\Delta} E_{21} \end{aligned} \quad (2.28)$$

- Deduz-se a função de interpolação do controlador

$$\begin{aligned} \Delta_K(\Delta) &:= F_{21}^{-T} \left( \sum_{i=1}^L \alpha_i \Delta_{\mathbf{K},i} - F_{11}^T \sum_{i=1}^L \alpha_i \Delta_i G_{11} \right) G_{21}^{-1} \\ &:= \sum_{i=1}^L \alpha_i \left( F_{21}^{-T} \Delta_{\mathbf{K},i} G_{21}^{-1} - F_{21}^{-T} F_{11}^T \Delta_i G_{11} G_{21}^{-1} \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Nota-se que a função de interpolação é afim em relação às coordenadas politópicas  $\alpha_i$  do bloco paramétrico  $\Delta$ . Numa implementação prática, não há necessidade de cálculo em tempo real dos termos que implicam produtos de matrizes na EQ. 2.29. De fato,  $\Delta_K(\Delta)$  pode ser reescrita como abaixo:

$$\Delta_K(\Delta) := \sum_{i=1}^L \alpha_i \Phi_i, \quad \text{com } \Phi_i := (F_{21}^{-T} \Delta_{\mathbf{K},i} G_{21}^{-1} - F_{21}^{-T} F_{11}^T \Delta_i G_{11} G_{21}^{-1}), \quad (2.30)$$

onde as matrizes  $\Phi_i$  podem ser calculadas “off line” e as coordenadas politópicas  $\alpha_i$  são determinadas em tempo real conforme o Algoritmo 2.3.

**Etapa 8:** Usando-se o resultado da EQ. 2.26, recuperam-se os dados do correspondente controlador LPV em tempo contínuo das EQ. 2.14,

$$K := \begin{bmatrix} A_K & B_{K1} & B_{K\Delta} \\ C_{K1} & D_{K11} & D_{K1\Delta} \\ C_{K\Delta} & D_{K\Delta 1} & D_{K\Delta\Delta} \end{bmatrix},$$

pela aplicação da transformação bilinear inversa

$$K = \mathcal{F}_u \left( \tilde{K}, \begin{bmatrix} -I & \sqrt{2}I \\ \sqrt{2}I & -I \end{bmatrix} \right).$$

Convém ressaltar que o controlador final  $K$  da EQ. 2.14, calculado pelo algoritmo acima, garante a existência, para cada canal/especificação, de funções de Lyapunov quadráticas em relação ao estado do sistema em malha fechada. Estas funções são dependentes das variáveis de Lyapunov  $\mathbf{X}_{2j}$ ,  $\mathbf{X}_{\infty j}$  e  $Z_j$ , definidas na Tabela 2.1, Assim, garante-se a estabilidade e os desempenhos  $H_2$  e  $H_\infty$  em malha fechada estabelecidos para os diversos canais.

TAB. 2.1: Variáveis de decisão.

Conj	Variáveis	Dimensão <sup>(*)</sup>	Número de variáveis escalares
$S_v$	$U, V_{11}, W_{11}$	$n \times n$	$3n^2$
	$M, N, E_{11}, F_{11}, G_{11}, H_{11}$	$N \times N$	$6N^2$
$K_v$	$A_K, B_{K1}, B_{K\Delta}, C_{K1}, C_{K\Delta},$ $D_{K11}, D_{K1\Delta}, D_{K\Delta 1}, D_{K\Delta\Delta}$	Apropriada	$n^2 + N^2 + 2nN +$ $(n + N)(m_2 + p_2) + m_2p_2$
$\Delta_{Kv}$	$\Delta_{K,i}, i = 1, \dots, L$	$N \times N$	$LN^2/2$
$H_{2v}$	$X_{2j}$	$2n \times 2n$	$n(2n + 1)$
	$Z_j$	$p_{1j} \times p_{1j}$	$p_{1j}(p_{1j} + 1)/2$
	$Q_{1j}, Q_{2j}, R_{1j}, R_{2j}$	$2N \times 2N$	$4N(2N + 1)$
	$\nu_j$	Escalar	1
$H_{\infty v}$	$X_{\infty j}$	$2n \times 2n$	$n(2n + 1)$
	$Q_{\infty j}, R_{\infty j}$	$2N \times 2N$	$2N(2N + 1)$
	$\gamma_j$	Escalar	1

(\*) As várias dimensões são definidas nas EQ. 2.7 e EQ. 2.13.

### 3 METODOLOGIA DE MODELAGEM DE SEP PARA APLICAÇÃO DE SÍNTESES LPV/LFT

Neste capítulo é apresentada uma metodologia em quatro etapas para a adequação de um modelo linearizado, em torno de um ponto de operação genérico, de um sistema máquina-barra infinita às técnicas de controle LPV que exigem estrutura de dependência paramétrica do tipo LFT, conforme o modelo das EQ. 2.7.

No problema de estabilidade de SEP, os parâmetros que definem o seu ponto de operação são determinados pelo cálculo do fluxo de potência da rede elétrica. Este cálculo consiste essencialmente na determinação das tensões (módulos e ângulos) das barras, da distribuição dos fluxos de potência e de algumas outras grandezas algébricas de interesse. Neste trabalho, as variações das condições operativas no tempo são consideradas suficientemente lentas. Para determinação de pontos de operação, foi utilizado o método de Newton-Raphson, muito estudado na literatura (ELGERD, 1978; MONTICELLI, 1983; STEVENSON, 1986).

Na modelagem clássica de SEP, utilizada para análise de sua dinâmica, surgem equações puramente algébricas, oriundas tanto do modelo das máquinas síncronas quanto da rede elétrica. Após a eliminação das variáveis algébricas da forma de estado aumentada (Seção 3.1), surge uma forma LPV inicial. Esta inclui parâmetros medidos, direta ou indiretamente, dependentes da potência ativa nominal ( $P$ ). Caso a abordagem de síntese escolhida inclua incertezas na reatância da linha, o modelo LPV inicial pode ainda conter parâmetros incertos dependentes da variação da susceptância.

A partir desse primeiro modelo LPV, que apresenta uma dependência paramétrica geral, conforme o modelo das EQ. 2.2, através de uma escolha conveniente do par de vetores  $(\omega_\Delta, z_\Delta)$ , chega-se a uma primeira forma LPV/LFT (v. FIG. 2.5 e EQ. 2.7). Contudo, o número de variáveis de projeto, no problema formulado no capítulo precedente, cresce sobremodo de acordo com a variedade de parâmetros e com a ordem de  $\Delta$  na estrutura LFT, tornando-o impraticável numericamente. Torna-se então, imperiosa a busca de um modelo LPV/LFT de ordem reduzida e dependente somente do parâmetro medido  $P$  e, se for o caso, do parâmetro incerto da linha, os quais definem completamente as condições operativas do sistema.

Para a obtenção do modelo LPV/LFT final, tratável computacionalmente, foi desen-

volvuda uma metodologia adequada, cujas etapas estão descritas nas Seções 3.2 a 3.5 e resumidas na Seção 3.6 com o Algoritmo 3.3.

### 3.1 FORMA DE ESTADO AUMENTADA OU IMPLÍCITA DO SEP

O objetivo desta seção é apresentar os conjuntos de equações diferenciais e algébricas referentes à dinâmica do gerador síncrono, à dinâmica do Regulador Automático de Tensão (RAT) e ao modelo da rede elétrica para o SEP do tipo máquina barra-infinita

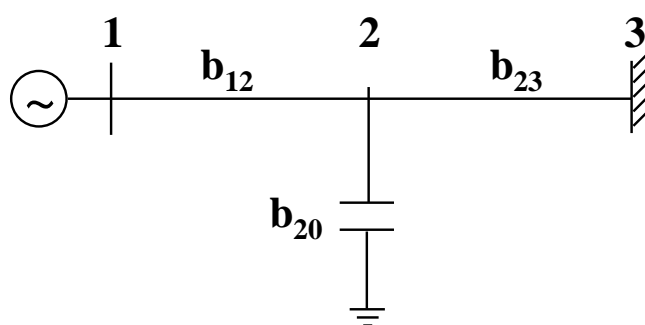


FIG. 3.1: Sistema máquina-barra infinita.

descrito em (MARTINS, 1990), ilustrado na FIG. 3.1<sup>1</sup>, e utilizado como base para a obtenção do modelo LPV/LFT inicial (Etapa 1). Esses conjuntos de equações, após linearizados em torno de um ponto de operação genérico, compõem a forma aumentada ou implícita do SEP.

O modelo compreende, então, um gerador síncrono, com seu RAT, conectado à uma barra infinita (barra 3) através de uma linha de transmissão representada pelas susceptâncias  $b_{12}$  e  $b_{23}$ . No meio da linha (barra 2) encontra-se instalado um banco de capacitores (susceptância  $b_{20}$ ). Supondo que se deseje estabilizar um modo de estabilização local, à barra 3 pode-se considerar conectado um sistema de grande porte (de inércia muito maior do que a inércia do que a do gerador local) que mantém a sua tensão constante, praticamente imune à dinâmica da usina.

Para facilitar os cálculos as grandezas tais como impedâncias, potências, tensões, correntes e frequências são comumente expressas como percentagem ou como por-unidade

---

<sup>1</sup>Os dados numéricos utilizados em (MARTINS, 1990) para o modelo considerado estão reproduzidos no Apêndice 8.2.



(pu), ou seja, são grandezas normalizadas em relação a um valor base ou valor de referência especificado para cada uma (STEVENSON, 1986).

### 3.1.1 DINÂMICA DO GERADOR

A Dinâmica do gerador é representada pelas equações de Park simplificadas,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_q'' &= \frac{1}{T_{d0}''}[-E_q'' + E_q' - (X_d' - X_d'')I_d] \\
\frac{d}{dt}E_d'' &= \frac{1}{T_{q0}''}[-E_d'' + (X_q - X_q'')I_q] \\
\frac{d}{dt}E_q' &= \frac{1}{T_{d0}'}[-E_q' + E_{fd} - (X_d - X_d')I_d] \\
\frac{d}{dt}\omega &= \frac{1}{2H}[P_{mec} - V_d I_d - V_q I_q] \\
&= \frac{1}{2H}[P_{mec} - (V_{r1} \sin \delta - V_{m1} \cos \delta)I_d - (V_{r1} \cos \delta + V_{m1} \sin \delta)I_q] \\
\frac{d}{dt}\delta &= \omega_{sinc}(\omega - 1) \\
0 &= -E_d'' + r_a I_d - X_q'' I_q + V_{r1} \sin \delta - V_{m1} \cos \delta \\
0 &= -E_q'' + X_d'' I_d + r_a I_q + V_{r1} \cos \delta + V_{m1} \sin \delta
\end{aligned} \tag{3.1}$$

as quais linearizadas transformam-se em,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Delta E_q'' &= \frac{1}{T_{d0}''}[-\Delta E_q'' + \Delta E_q' - (X_d' - X_d'')\Delta I_d] \\
\frac{d}{dt}\Delta E_d'' &= \frac{1}{T_{q0}''}[-\Delta E_d'' + (X_q - X_q'')\Delta I_q] \\
\frac{d}{dt}\Delta E_q' &= \frac{1}{T_{d0}'}[-\Delta E_q' + \Delta E_{fd} - (X_d - X_d')\Delta I_d] \\
\frac{d}{dt}\Delta\omega &= \frac{1}{2H}[\Delta P_{mec} + (-v_q i_d + v_d i_q)\Delta\delta - v_d \Delta I_d - v_q \Delta I_q \\
&\quad + (-i_d \sin \delta_0 - i_q \cos \delta_0)\Delta V_{r1} + (i_d \cos \delta_0 - i_q \sin \delta_0)\Delta V_{m1}] \\
\frac{d}{dt}\Delta\delta &= \omega_{sinc}\Delta\omega \\
0 &= -\Delta E_d'' + v_q \Delta\delta + r_a \Delta I_d - X_q'' \Delta I_q + \Delta V_{r1} \sin \delta_0 - \Delta V_{m1} \cos \delta_0 \\
0 &= -\Delta E_q'' - v_d \Delta\delta + X_d'' \Delta I_d + r_a \Delta I_q + \Delta V_{r1} \cos \delta_0 + \Delta V_{m1} \sin \delta_0
\end{aligned} \tag{3.2}$$

onde o símbolo  $\Delta$  representa aqui uma variação incremental em torno de um ponto de equilíbrio genérico do sistema  $(v_d, i_d, v_q, i_q, \delta_0)$  e  $\Delta P_{mec}$  é definida nula, pois a variação da potência mecânica <sup>2</sup> é considerada suficientemente lenta na análise a pequenas perturbações.

### 3.1.2 DINÂMICA DO RAT

A dinâmica do RAT ou AVR (*Automatic Voltage Regulator*) é representada por uma equação diferencial de primeira ordem, EQ. 3.3, com uma entrada de controle adicional

---

<sup>2</sup>Controlada pelo regulador de velocidade.

$V_{pss}$ :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_{fd} &= -\frac{1}{T_{a1}}E_{fd} + \frac{K_{a1}}{T_{a1}}(V_{ref} + V_{pss} - |V_1|), \quad \text{com} \\ |V_1| &= \sqrt{V_{r1}^2 + V_{m1}^2} \\ V_{ref} &= |V_1| = 1 \text{ pu.}\end{aligned}\tag{3.3}$$

O sinal  $V_{pss}$  é a saída de um controlador suplementar denominado Pss, (*Power system stabilizer*), (MARTINS, 1990; PELLANDA, 1993) o qual é comumente concebido por técnicas clássicas e que deseja-se substituir por um controlador LPV/LFT das EQ. 2.14.

Linearizando o conjunto de EQ. 3.4, obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Delta E_{fd} &= -\frac{1}{T_{a1}}\Delta E_{fd} + \frac{K_{a1}}{T_{a1}}[\Delta V_{ref} + \Delta V_{pss} - (v_{r1}/|v_1|)\Delta V_{r1} - (v_{m1}/|v_1|)\Delta V_{m1}] \\ &= -\frac{1}{T_{a1}}\Delta E_{fd} + \frac{K_{a1}}{T_{a1}}\{\Delta V_{ref} + \Delta V_{pss} - [(v_d \sin \delta_0 + v_q \cos \delta_0)/|v_1|]\Delta V_{r1} \\ &\quad - [(-v_d \cos \delta_0 + v_q \sin \delta_0)/|v_1|]\Delta V_{m1}\} \\ \Delta V_{ref} &= 0 \text{ pu} \\ |v_1| &= \sqrt{v_{r1}^2 + v_{m1}^2} = 1 \text{ pu}\end{aligned}\tag{3.4}$$

onde o símbolo  $\Delta$  representa aqui uma variação incremental em torno de um ponto de equilíbrio do sistema  $(v_d, i_d, v_q, i_q, \delta_0)$ .

**Nota 3.1** *Supõe-se que o valor nominal do módulo da tensão na barra 1 é  $|v_1| = 1$  pu, pois o sistema é considerado em equilíbrio e, portanto  $V_{ref} = |V_1| = 1$  pu. Isso significa que a barra 1 é do tipo PV (Potência, Tensão) no algoritmo para o cálculo do fluxo de potência, somente variando o ângulo de fase da barra 1.*

### 3.1.3 MODELO DA LINHA-BARRA INFINITA

Nas equações algébricas e matriciais a seguir estão representadas: a rede de transmissão de corrente alternada, através da sua formulação por matriz admitância nodal (STEVENSON, 1986) na EQ. 3.5 e na EQ. 3.6; expressões relativas à conexão rede elétrica-gerador nas EQ. 3.7, EQ. 3.8, EQ. 3.9; e as equações linearizadas que integram as equações da forma aumentada do SEP, oriundas da linha-barra infinita, nas EQ. 3.10.

A equação matricial nodal com os fasores de tensão e corrente das barras, decom-

postos pelas respectivas partes reais e imaginárias, é dada por

$$\begin{bmatrix} I_{m_1} \\ I_{r_1} \\ I_{m_2} \\ I_{r_2} \\ I_{m_3} \\ I_{r_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{m_1} \\ I_{r_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = Y \begin{bmatrix} V_{r_1} \\ V_{m_1} \\ V_{r_2} \\ V_{m_2} \\ V_{r_3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

onde

$$Y = \begin{bmatrix} b_{12} & g_{12} & -b_{12} & -g_{12} & 0 & 0 \\ g_{12} & -b_{12} & -g_{12} & b_{12} & 0 & 0 \\ -b_{12} & -g_{12} & (b_{12} + b_{23} + b_{20}) & (g_{12} + g_{23} + g_{20}) & -b_{23} & -g_{23} \\ -g_{12} & b_{12} & (g_{12} + g_{23} + g_{20}) & -(b_{12} + b_{23} + b_{20}) & -g_{23} & b_{23} \\ 0 & 0 & -b_{23} & -g_{23} & (b_{23} + b_{30}) & (g_{23} + g_{30}) \\ 0 & 0 & -g_{23} & b_{23} & (g_{23} + g_{30}) & -(b_{23} + b_{30}) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Como o fasor  $\dot{V}_3$ , tensão da barra 3 (barra infinita) é a referência do sistema, ou seja,  $V_3 \angle 0$  e  $V_3 = |\dot{V}_3|$  constante e igual a 1, as duas últimas linhas e colunas da equação matricial acima podem ser desconsideradas na linearização, como será visto adiante.

Transformando  $I_d$  e  $I_q$  (referencial interno do gerador) para  $I_{r_1}$  e  $I_{m_1}$ , por intermédio da EQ. 3.7,

$$\begin{bmatrix} I_{m_1} \\ I_{r_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \delta & \sin \delta \\ \sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_d \\ I_q \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

e linearizando as igualdades matriciais EQ. 3.5 a EQ. 3.7 temos:

$$\begin{bmatrix} \Delta I_{m_1} \\ \Delta I_{r_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{12} & g_{12} & -b_{12} & -g_{12} \\ g_{12} & -b_{12} & -g_{12} & b_{12} \\ -b_{12} & -g_{12} & (b_{12} + b_{23} + b_{20}) & (g_{12} + g_{23} + g_{20}) \\ -g_{12} & b_{12} & (g_{12} + g_{23} + g_{20}) & -(b_{12} + b_{23} + b_{20}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_{r_1} \\ \Delta V_{m_1} \\ \Delta V_{r_2} \\ \Delta V_{m_2} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

e

$$\begin{bmatrix} \Delta I_{m_1} \\ \Delta I_{r_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \delta_0 & \sin \delta_0 & i_d \sin \delta_0 + i_q \cos \delta_0 \\ \sin \delta_0 & \cos \delta_0 & i_d \cos \delta_0 - i_q \sin \delta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta I_d \\ \Delta I_q \\ \Delta \delta \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Substituindo a EQ. 3.9 na EQ. 3.8 obtém-se as equações algébricas da linha-barra infinita,

EQ. 3.10, que também compõem as equações da forma de estado aumentada do SEP.

$$\begin{aligned}
0 &= -(I_d \sin \delta_0 + I_q \cos \delta_0) \Delta \delta + \cos(\delta_0) \Delta I_d - \sin(\delta_0) \Delta I_q \\
&\quad + b_{12} \Delta V_{r_1} + g_{12} \Delta V_{m_1} - b_{12} \Delta V_{r_2} - g_{12} \Delta V_{m_2} \\
0 &= -(I_d \cos \delta_0 - I_q \sin \delta_0) \Delta \delta - \sin(\delta_0) \Delta I_d - \cos(\delta_0) \Delta I_q \\
&\quad + g_{12} \Delta V_{r_1} - b_{12} \Delta V_{m_1} - g_{12} \Delta V_{r_2} + b_{12} \Delta V_{m_2} \\
0 &= -b_{12} \Delta V_{r_1} - g_{12} \Delta V_{m_1} + (b_{12} + b_{23} + b_{20}) \Delta V_{r_2} + (g_{12} + g_{23} + g_{20}) \Delta V_{m_2} \\
0 &= -g_{12} \Delta V_{r_1} + b_{12} \Delta V_{m_1} + (g_{12} + g_{23} + g_{20}) \Delta V_{r_2} - (b_{12} + b_{23} + b_{20}) \Delta V_{m_2}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Cabe ressaltar que os valores nominais  $(v_d, i_d, v_q, i_q, \delta_0)$  resultam do cálculo do fluxo de potência e, neste caso, são funções de  $P$  unicamente.

### 3.1.4 SINOPSE

Os conjuntos de equações diferenciais e algébricas, lineares num ponto de operação genérico, EQ. 3.2, EQ. 3.4 e EQ. 3.10, referem-se à dinâmica do gerador, à dinâmica do RAT e ao modelo da rede elétrica, respectivamente. Esses compõem a forma de estado aumentada ou implícita do SEP que, em suma, tem a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x &= J_1(\theta_{ini})x + J_2(\theta_{ini})r + B_x u \\
0 &= J_3(\theta_{ini})x + J_4(\theta_{ini})r + B_r u \\
y &= C_x x + C_r r
\end{aligned} \tag{3.11}$$

onde  $x = [\Delta E_q^u, \Delta E_d^u, \Delta E_q^i, \Delta \omega, \Delta \delta, \Delta E_{fd}]^T$  é o vetor de estados,  $\theta_{ini}$  é o vetor de parâmetros nominais,  $r = [\Delta I_d, \Delta I_q, \Delta V_{r_1}, \Delta V_{m_1}, \Delta V_{r_2}, \Delta V_{m_2}]^T$  é o vetor de variáveis algébricas,  $y$  é o vetor de saída,  $u$  é o vetor de entrada de controle. Neste trabalho  $\theta_{ini} = [i_d, i_q, v_d, v_q, \cos \delta_0, \sin \delta_0]^T$  determina o ponto de operação e considera-se  $y = \Delta \omega$ . O sinal de controle é idêntico à saída do controlador Pss,  $u = \Delta V_{pss}$ , uma vez que a referência é 1 pu ( $\Delta V_{ref} = 0$ ).

Um modelo inicial do tipo descrito na EQ. 3.11 não é adequado para a síntese LPV por três motivos principais:

- existência de variáveis (vetor  $r$ ) e equações algébricas;
- a dependência do modelo em relação ao  $\theta_{ini}$  não é da forma LFT;
- os elementos do vetor paramétrico  $\theta_{ini}$  carregam informações redundantes.

As duas primeiras restrições impedem a aplicação da síntese por questões estruturais; a última pode conduzir a controladores conservativos e/ou levar a um número de variáveis

de projeto proibitivo do ponto de vista computacional (APKARIAN, 2000; PELLANDA, 2002b). Torna-se, então, imperiosa a eliminação das variáveis algébricas e a busca de uma estrutura LFT de ordem reduzida que dependa somente da potência ativa nominal gerada  $P$ , a qual define completamente o ponto de operação, ou da incerteza na linha  $\delta b_{23}$ , dependendo da estratégia de síntese LPV a ser adotada.

Conforme anunciado anteriormente, o significado de cada variável, assim como o valor numérico das constantes do modelo acima, estão disponíveis em (MARTINS, 1990) e no Apêndice 8.2.

Na próxima seção verifica-se que o vetor  $\theta_{ini}$  pode sofrer mudanças. Também, a saída e a entrada podem incorporar canais de desempenho. Isso deve-se a pequenas alterações na formulação da forma de estado implícita, visando adequar o modelo a uma determinada estratégia de síntese LPV.

## 3.2 OBTENÇÃO DO MODELO LPV INICIAL-ETAPA 1

Nesta seção, o objetivo é apresentar a primeira etapa da metodologia citada na Seção 1.3 e obter, a partir da forma aumentada das EQ. 3.11, três modelos LPV análogos ao da EQ. 2.2. Inicialmente, na Seção 3.2.1, prepara-se o modelo para uma síntese  $H_2$  que resolva o PADI, descrito na Seção 2.3.2. Na Seção 3.2.2, objetiva-se preparar o modelo para uma síntese  $H_\infty$  ou  $H_2/H_\infty$ , onde o canal  $H_\infty$  trata uma incerteza na susceptância da linha ( $\delta b_{23}$ ) e o canal  $H_2$ , o PADI. Finalmente, na Seção 3.2.3, o modelo é preparado para a mesma estratégia de controle da Seção 3.2.2, mas de uma forma diferente, onde a incerteza  $\delta b_{12}$  é modelada indiretamente conforme (TARANTO, 1995).

### 3.2.1 MODELO LPV INICIAL PARA SÍNTESES COM CRITÉRIO DO TIPO $H_2$

Empregando-se as relações das EQ. 3.12, elimina-se da forma aumentada ou implícita das EQ. 3.11, composta pelas EQ. 3.2, EQ. 3.4 e EQ. 3.10, o vetor de variáveis algébricas  $r$ , obtendo-se um modelo LPV inicial:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= A(\theta)x + B(\theta)u \\ y &= C(\theta)x + D(\theta)u \\ A(\theta) &= J_1(\theta_{ini}) - J_2(\theta_{ini})J_4(\theta_{ini})^{-1}J_3(\theta_{ini}) \\ B(\theta) &= B_x - J_2(\theta_{ini})J_4(\theta_{ini})^{-1}B_r \\ C(\theta) &= C_x - C_r J_4(\theta_{ini})^{-1}J_3(\theta_{ini}) \\ D(\theta) &= -C_r J_4(\theta_{ini})^{-1}B_r \end{aligned} \tag{3.12}$$

onde

$$\begin{aligned}
x &= [\Delta E_q^{\parallel}, \Delta E_d^{\parallel}, \Delta E_q^{\perp}, \Delta\omega, \Delta\delta, \Delta E_{fd}]^T, \\
\theta_{ini} &= [i_d, i_q, v_d, v_q, \cos \delta_0, \sin \delta_0]^T, \\
\theta &= [i_d, i_q, v_d, v_q]^T, \\
u &= \Delta V_{pss}, \\
y &= \Delta\omega,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

com  $J_4(\theta)$  inversível.

Observa-se que o modelo LPV inicial das EQ. 3.12 e EQ. 3.13 não envolve os parâmetros  $\cos(\delta_0)$  e  $\sin(\delta_0)$ , os quais são eliminados pelas operações algébricas. O modelo LPV referido pode ser obtido pela execução do programa Maple do Apêndice 8.3.1, cujo resultado é explicitado abaixo:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \Delta E_q^{\parallel} &= \alpha_1 \Delta E_q^{\parallel} + \alpha_2 \Delta E_q^{\perp} + (\alpha_3 i_q + \alpha_4 v_d) \Delta\delta \\
\frac{d}{dt} \Delta E_d^{\parallel} &= \alpha_5 \Delta E_d^{\parallel} + (\alpha_6 i_d + \alpha_7 v_q) \Delta\delta \\
\frac{d}{dt} \Delta E_q^{\perp} &= \alpha_8 \Delta E_q^{\parallel} + \alpha_9 \Delta E_q^{\perp} + (\alpha_{10} i_q + \alpha_{11} v_d) \Delta\delta - \alpha_9 \Delta E_{fd} \\
\frac{d}{dt} \Delta\omega &= (\alpha_{12} v_d + \alpha_{13} i_q) \Delta E_q^{\parallel} + (-\alpha_{12} v_q + \alpha_{13} i_d) \Delta E_d^{\parallel} \\
&\quad + (\alpha_{14} v_q i_d - \alpha_{14} v_d i_q + \alpha_{15} i_d^2 + \alpha_{15} i_q^2 + \alpha_{16} v_q^2 + \alpha_{16} v_d^2) \Delta\delta \\
\frac{d}{dt} \Delta\delta &= \omega_{sinc} \Delta\omega \\
\frac{d}{dt} \Delta E_{fd} &= \alpha_{17} v_q \Delta E_q^{\parallel} + \alpha_{17} v_d \Delta E_d^{\parallel} + (\alpha_{18} v_d i_d + \alpha_{18} v_q i_q) \Delta\delta + \alpha_{19} \Delta E_{fd} \\
&\quad + \alpha_{20} \Delta V_{pss}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$y = \Delta\omega$$

$\alpha_i \in \mathbf{R}$  são coeficientes conhecidos via Maple (v. Apêndice 8.3.1).

### 3.2.2 MODELO LPV INICIAL PARA SÍNTESES COM CRITÉRIO DO TIPO $H_2/H_\infty$ - (CASO 1)

Dada a forma aumentada ou implícita da EQ. 3.11, composta pelas EQ. 3.2, EQ. 3.4, EQ. 3.10, substitui-se  $b_{23} = (-2, 00 + \delta b_{23})\text{pu}$ , com a incerteza na linha de transmissão  $0, 5\text{pu} \leq \delta b_{23} \leq -1\text{pu}$ , e obtém-se a segunda forma LPV procurada, EQ 3.12, onde neste caso,

$$\begin{aligned}
 x &= [\Delta E_q'', \Delta E_d'', \Delta E_q', \Delta \omega, \Delta \delta, \Delta E_{fd}]^T, \\
 \theta_{ini} &= [i_d, i_q, v_d, v_q, \delta b_{23}, \delta \beta_{23}, \cos \delta_0, \sin \delta_0]^T, \\
 \theta(P, \delta b_{23}) &= [i_d, i_q, v_d, v_q, \delta b_{23}, \delta \beta_{23}]^T, \\
 u &= \Delta V_{pss}, \\
 y &= \Delta \omega.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Assim, essa forma LPV inicial pode ser obtida executando-se o programa Maple do Apêndice 8.3.2, cujo resultado é explicitado abaixo:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \Delta E_q'' &= (\alpha_1 \delta \beta_{23} + \alpha_2 \delta b_{23} \delta \beta_{23}) \Delta E_q'' + \alpha_3 \Delta E_q' \\
 &\quad + (\alpha_4 i_q \delta \beta_{23} + \alpha_5 i_q \delta b_{23} \delta \beta_{23} + \alpha_6 v_d \delta \beta_{23} + \alpha_7 v_d \delta b_{23} \delta \beta_{23}) \Delta \delta \\
 \frac{d}{dt} \Delta E_d'' &= (\alpha_8 \delta \beta_{23} + \alpha_9 \delta b_{23} \delta \beta_{23}) \Delta E_d'' \\
 &\quad + (\alpha_{10} i_d \delta \beta_{23} + \alpha_{11} i_d \delta b_{23} \delta \beta_{23} + \alpha_{12} v_q \delta \beta_{23} + \alpha_{13} v_q \delta b_{23} \delta \beta_{23}) \Delta \delta \\
 \frac{d}{dt} \Delta E_q' &= (\alpha_{14} \delta \beta_{23} + \alpha_{15} \delta b_{23} \delta \beta_{23}) \Delta E_q'' + \alpha_{16} \Delta E_q' \\
 &\quad + (\alpha_{17} i_q \delta \beta_{23} + \alpha_{18} i_q \delta b_{23} \delta \beta_{23} + \alpha_{19} v_d \delta \beta_{23} + \alpha_{20} v_d \delta b_{23} \delta \beta_{23}) \Delta \delta + \alpha_{21} \Delta E_{fd} \\
 \frac{d}{dt} \Delta \omega &= (\alpha_{22} v_d \delta \beta_{23} + \alpha_{23} v_d \delta b_{23} \delta \beta_{23} + \alpha_{24} i_q \delta \beta_{23} + \alpha_{25} i_q \delta b_{23} \delta \beta_{23}) \Delta E_q'' \\
 &\quad + (-\alpha_{22} v_q \delta \beta_{23} - \alpha_{23} v_q \delta b_{23} \delta \beta_{23} + \alpha_{24} i_d \delta \beta_{23} + \alpha_{25} i_d \delta b_{23} \delta \beta_{23}) \Delta E_d'' \\
 &\quad + (\alpha_{30} v_q i_d \delta \beta_{23} + \alpha_{26} v_q i_d \delta b_{23} \delta \beta_{23} - \alpha_{30} v_d i_q \delta \beta_{23} + \alpha_{27} v_d i_q \delta b_{23} \delta \beta_{23} \\
 &\quad + \alpha_{31} i_d^2 \delta \beta_{23} + \alpha_{28} i_d^2 \delta b_{23} \delta \beta_{23} + \alpha_{31} i_q^2 \delta \beta_{23} + \alpha_{28} i_q^2 \delta b_{23} \delta \beta_{23} \\
 &\quad + \alpha_{32} v_q^2 \delta \beta_{23} + \alpha_{29} v_q^2 \delta b_{23} \delta \beta_{23} + \alpha_{32} v_d^2 \delta \beta_{23} + \alpha_{29} v_d^2 \delta b_{23} \delta \beta_{23}) \Delta \delta \\
 \frac{d}{dt} \Delta \delta &= \omega_{sinc} \Delta \omega \\
 \frac{d}{dt} \Delta E_{fd} &= (\alpha_{33} v_q \delta \beta_{23} + \alpha_{34} v_q \delta b_{23} \delta \beta_{23}) \Delta E_q'' + (\alpha_{33} v_d \delta \beta_{23} + \alpha_{34} v_d \delta b_{23} \delta \beta_{23}) \Delta E_d'' \\
 &\quad + (\alpha_{35} v_d i_d \delta \beta_{23} + \alpha_{36} v_d i_d \delta b_{23} \delta \beta_{23} + \alpha_{35} v_q i_q \delta \beta_{23} + \alpha_{36} v_q i_q \delta b_{23} \delta \beta_{23}) \Delta \delta \\
 &\quad + \alpha_{37} \Delta E_{fd} + \alpha_{38} \Delta V_{pss} \\
 y &= \Delta \omega \\
 \alpha_i &\in \mathbf{R} \text{ são coeficientes conhecidos via Maple (v. Apêndice 8.3.2).}
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

**Nota 3.2**  $i_d = f(P, \delta b_{23})$ ,  $i_q = f(P, \delta b_{23})$ ,  $v_d = f(P, \delta b_{23})$ ,  $v_q = f(P, \delta b_{23})$ ,  $\delta \beta_{23} = f(\delta b_{23}) \cong 1/(-56673 + 19000 \delta b_{23})$  com o Maple em *Digits* := 20.

### 3.2.3 MODELO LPV INICIAL PARA SÍNTESES COM CRITÉRIO DO TIPO $H_2/H_\infty$ - (CASO 2)

Nesta seção adota-se uma abordagem diferente para a modelagem da incerteza na linha de transmissão entre as barras 1 e 2, conforme (TARANTO, 1995). Supõe-se uma linha adicional de susceptância  $\delta b_{12}$  em paralelo com a susceptância nominal  $b_{12} = -2$ . A mudança no fluxo de corrente causada pela mudança na capacidade da linha de transmissão é compensada por injeções de corrente  $\delta I_1$  na barra do gerador e  $-\delta I_1$  na barra 2. A corrente de injeção é:

$$\delta I_1 = \delta b_{12}(\Delta V_1 - \Delta V_2).$$

Então a EQ. 3.8 deve ser alterada para

$$\begin{bmatrix} \Delta I_{m_1} + \delta I_{m_1} \\ \Delta I_{r_1} + \delta I_{r_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{12} & g_{12} & -b_{12} & -g_{12} \\ g_{12} & -b_{12} & -g_{12} & b_{12} \\ -b_{12} & -g_{12} & (b_{12} + b_{23} + b_{20}) & (g_{12} + g_{23} + g_{20}) \\ -g_{12} & b_{12} & (g_{12} + g_{23} + g_{20}) & -(b_{12} + b_{23} + b_{20}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_{r_1} \\ \Delta V_{m_1} \\ \Delta V_{r_2} \\ \Delta V_{m_2} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

e, conseqüentemente, a EQ. 3.10, para:

$$\begin{aligned} 0 &= -(I_d \sin \delta_0 + I_q \cos \delta_0) \Delta \delta + \cos(\delta_0) \Delta I_d - \sin(\delta_0) \Delta I_q \\ &\quad + b_{12} \Delta V_{r_1} + g_{12} \Delta V_{m_1} - b_{12} \Delta V_{r_2} - g_{12} \Delta V_{m_2} - \delta I_{m_1} \\ 0 &= -(I_d \cos \delta_0 - I_q \sin \delta_0) \Delta \delta - \sin(\delta_0) \Delta I_d - \cos(\delta_0) \Delta I_q \\ &\quad + g_{12} \Delta V_{r_1} - b_{12} \Delta V_{m_1} - g_{12} \Delta V_{r_2} + b_{12} \Delta V_{m_2} - \delta I_{r_1} \\ 0 &= -b_{12} \Delta V_{r_1} - g_{12} \Delta V_{m_1} + (b_{12} + b_{23} + b_{20}) \Delta V_{r_2} + (g_{12} + g_{23} + g_{20}) \Delta V_{m_2} \\ 0 &= -g_{12} \Delta V_{r_1} + b_{12} \Delta V_{m_1} + (g_{12} + g_{23} + g_{20}) \Delta V_{r_2} - (b_{12} + b_{23} + b_{20}) \Delta V_{m_2} \end{aligned} \quad (3.18)$$

A partir das EQ. 3.2, EQ. 3.4 e EQ. 3.18, obtém-se uma forma aumentada ou implícita análoga a da EQ. 3.11. Eliminando as variáveis algébricas do vetor  $r$  deste modelo aumentado, chega-se ao terceiro modelo LPV inicial procurado, conforme a EQ. 3.12, onde agora:

$$\begin{aligned} x &= [\Delta E_q^u, \Delta E_d^u, \Delta E_q^l, \Delta \omega, \Delta \delta, \Delta E_{fd}]^T, \\ \theta_{ini} &= [i_d, i_q, v_d, v_q, \cos \delta_0, \sin \delta_0]^T, \\ \theta &= \theta_{ini} = [i_d, i_q, v_d, v_q, \cos \delta_0, \sin \delta_0]^T, \\ u &= [\delta I_{r_1}, \delta I_{m_1}, \Delta V_{pss}]^T, \\ y &= [\Delta V_{r_1} - \Delta V_{r_2}, \Delta V_{m_1} - \Delta V_{m_2}, \Delta \omega]^T \triangleq [\Delta V_{r_{12}}, \Delta V_{m_{12}}, \Delta \omega]^T, \end{aligned} \quad (3.19)$$

Observa-se que as duas primeiras entradas,  $\delta I_{r_1}$  e  $\delta I_{m_1}$ , juntamente com as duas primeiras saídas,  $\Delta V_{r_{12}}$  e  $\Delta V_{m_{12}}$ , definem o canal  $(w, z)$  de desempenho  $H_\infty$ . O bloco



de incerteza, neste caso, é uma matriz quadrada de ordem 2 que é uma função direta e linear de  $\delta b_{12}$ .

Analogamente aos dois casos anteriores, o modelo LPV definido pelas EQ. 3.12 e EQ. 3.19 pode ser calculado pelo programa Maple do Apêndice 8.3.3:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Delta E_q^u &= \alpha_1\Delta E_q^u + \alpha_2\Delta E_q^l + (\alpha_3i_q + \alpha_4v_d)\Delta\delta + \beta_1\sin(\delta_0)\delta I_{r_1} - \beta_1\cos(\delta_0)\delta I_{m_1} \\
\frac{d}{dt}\Delta E_d^u &= \alpha_5\Delta E_d^u + (\alpha_6i_d + \alpha_7v_q)\Delta\delta + \beta_2\cos(\delta_0)\delta I_{r_1} + \beta_2\sin(\delta_0)\delta I_{m_1} \\
\frac{d}{dt}\Delta E_q^l &= \alpha_8\Delta E_q^u + \alpha_9\Delta E_q^l + (\alpha_{10}i_q + \alpha_{11}v_d)\Delta\delta - \alpha_9\Delta E_{fd} + \beta_3\sin(\delta_0)\delta I_{r_1} \\
&\quad - \beta_3\cos(\delta_0)\delta I_{m_1} \\
\frac{d}{dt}\Delta\omega &= (\alpha_{12}v_d + \alpha_{13}i_q)\Delta E_q^u + (-\alpha_{12}v_q + \alpha_{13}i_d)\Delta E_d^u \\
&\quad + (\alpha_{14}v_qi_d - \alpha_{14}v_di_q + \alpha_{15}i_d^2 + \alpha_{15}i_q^2 + \alpha_{16}v_q^2 + \alpha_{16}v_d^2)\Delta\delta \\
&\quad + \beta_4v_d(\sin(\delta_0)\delta I_{r_1} - \cos(\delta_0)\delta I_{m_1}) + \beta_4v_q(\cos(\delta_0)\delta I_{r_1} + \sin(\delta_0)\delta I_{m_1}) \\
&\quad + \beta_5i_d(\cos(\delta_0)\delta I_{r_1} + \sin(\delta_0)\delta I_{m_1}) - \beta_5i_q(\sin(\delta_0)\delta I_{r_1} - \cos(\delta_0)\delta I_{m_1}) \\
\frac{d}{dt}\Delta\delta &= \omega_{sinc}\Delta\omega \\
\frac{d}{dt}\Delta E_{fd} &= \alpha_{17}v_q\Delta E_q^u + \alpha_{17}v_d\Delta E_d^u + (\alpha_{18}v_di_d + \alpha_{18}v_qi_q)\Delta\delta + \alpha_{19}\Delta E_{fd} \\
&\quad + \beta_7v_d(\cos(\delta_0)\delta I_{r_1} + \sin(\delta_0)\delta I_{m_1}) - \beta_7v_q(\sin(\delta_0)\delta I_{r_1} - \cos(\delta_0)\delta I_{m_1}) + \beta_6\Delta V_{pss} \\
\Delta V_{r_{12}} &= \cos(\delta_0)(\beta_9\Delta E_q^u + \beta_{10}i_q\Delta\delta + \beta_9v_d\Delta\delta) + \sin(\delta_0)(\beta_9\Delta E_d^u + \beta_{10}i_d\Delta\delta - \beta_9v_q\Delta\delta) \\
&\quad + \beta_{10}\delta I_{m_1} \\
\Delta V_{m_{12}} &= \sin(\delta_0)(\beta_9\Delta E_q^u + \beta_{10}i_q\Delta\delta + \beta_9v_d\Delta\delta) + \cos(\delta_0)(-\beta_9\Delta E_d^u - \beta_{10}i_d\Delta\delta + \beta_9v_q\Delta\delta) \\
&\quad - \beta_{10}\delta I_{r_1} \\
\Delta\omega &= \beta_8\Delta\omega \therefore \beta_8 = 1
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$\alpha_i, \beta_i \in \mathbf{R}$  são coeficientes <sup>3</sup> conhecidos via Maple (v. Apêndice 8.3.3).

---

<sup>3</sup>Os coeficientes  $\alpha_i$  são idênticos ao do modelo da EQ. 3.14.

### 3.3 DEDUÇÃO DE ESTRUTURAS LPV/LFT INICIAIS E VALIDAÇÕES-ETAPA 2

A meta desta seção é cumprir a segunda etapa da metodologia de modelagem que consiste em deduzir manualmente <sup>4</sup> estruturas LFT iniciais em relação à  $\Delta(\theta)$ , para os três modelos LPV obtidos na Seção 3.2, e executar as validações desses modelos.

#### 3.3.1 MODELO LFT INICIAL PARA SÍNTESES COM CRITÉRIO DO TIPO $H_2$

A partir do modelo LPV das EQ. 3.14, deduz-se a primeira variante LFT do modelo de SEP, definindo-se os vetores  $w_\Delta = [w_1, \dots, w_{12}]^T$  e  $z_\Delta = [z_1, \dots, z_{12}]^T$ ,

$$\begin{aligned}
w_1 &:= i_d z_1 & \therefore z_1 &= \Delta\delta \\
w_2 &:= i_d z_2 & \therefore z_2 &= \alpha_{13}\Delta E_d^n + \alpha_{15}w_1 \\
w_3 &:= i_q z_3 & \therefore z_3 &= \Delta\delta \\
w_4 &:= i_q z_4 & \therefore z_4 &= \alpha_{13}\Delta E_q^n + \alpha_{15}w_3 \\
w_5 &:= v_d z_5 & \therefore z_5 &= \Delta\delta \\
w_6 &:= v_d z_6 & \therefore z_6 &= \alpha_{12}\Delta E_q^n + \alpha_{16}w_5 \\
w_7 &:= v_d z_7 & \therefore z_7 &= -\alpha_{14}w_3 \\
w_8 &:= v_d z_8 & \therefore z_8 &= \alpha_{17}\Delta E_d^n + \alpha_{18}w_1 \\
w_9 &:= v_q z_9 & \therefore z_9 &= \Delta\delta \\
w_{10} &:= v_q z_{10} & \therefore z_{10} &= -\alpha_{12}\Delta E_d^n + \alpha_{16}w_9 \\
w_{11} &:= v_q z_{11} & \therefore z_{11} &= \alpha_{14}w_1 \\
w_{12} &:= v_q z_{12} & \therefore z_{12} &= \alpha_{17}\Delta E_q^n + \alpha_{18}w_3,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

obtém-se uma forma LFT inicial para o referido modelo LPV:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Delta E_q^n &= \alpha_1\Delta E_q^n + \alpha_2\Delta E_q^i + \alpha_3w_3 + \alpha_4w_5 \\
\frac{d}{dt}\Delta E_d^n &= \alpha_5\Delta E_d^n + \alpha_6w_1 + \alpha_7w_9 \\
\frac{d}{dt}\Delta E_q^i &= \alpha_8\Delta E_q^n + \alpha_9\Delta E_q^i + \alpha_{10}w_3 + \alpha_{11}w_5 - \alpha_9\Delta E_{fd} \\
\frac{d}{dt}\Delta\omega &= w_2 + w_4 + w_6 + w_7 + w_{10} + w_{11} \\
\frac{d}{dt}\Delta\delta &= \omega_{sinc}\Delta\omega \\
\frac{d}{dt}\Delta E_{fd} &= \alpha_{19}\Delta E_{fd} + w_8 + w_{12} + \alpha_{20}\Delta V_{ps} \\
y &= \Delta\omega \\
w_\Delta &= \Delta(\theta(P))z_\Delta,
\end{aligned} \tag{3.22}$$

com  $\Delta(\theta(P)) = \text{diag}(i_d I_2, i_q I_2, v_d I_4, v_q I_4)$  e  $I_{r_i}$  matrizes identidade de ordem  $r_i$ .

---

<sup>4</sup>Esta dedução da estrutura LFT, que não é única, pode ser automatizada com um software específico, não disponibilizado.

A validação pode ser feita calculando-se, para um número de pontos suficientemente grande da gama de variação de  $\Delta(\theta(P))$ , o modelo das EQ. 3.22,  $G_\Delta(s, \theta) = \mathcal{F}_u(G(s), \Delta(\theta))$ , e comparando-o com o modelo LPV das EQ. 3.14,  $G_0(s)$ , produzido numericamente via Matlab, conforme abaixo:

$$\bar{\sigma}_m(\theta) := \sup_{\omega \in \mathbf{R}} \{\bar{\sigma}[G_\Delta(j\omega) - G_0(j\omega)]\},$$

onde  $\bar{\sigma}(X)$  é o valor singular máximo de  $X$ . O escalar positivo  $\bar{\sigma}_m(\theta)$  equivale, para valores fixos de  $\theta$  no domínio de estabilidade, à norma  $H_\infty$  da diferença dos modelos,

$$\|G_\Delta(s) - G_0(s)\|_\infty.$$

A FIG. 3.2 ilustra a validação do modelo fechado  $M - \Delta$ . Observa-se um erro pratica-

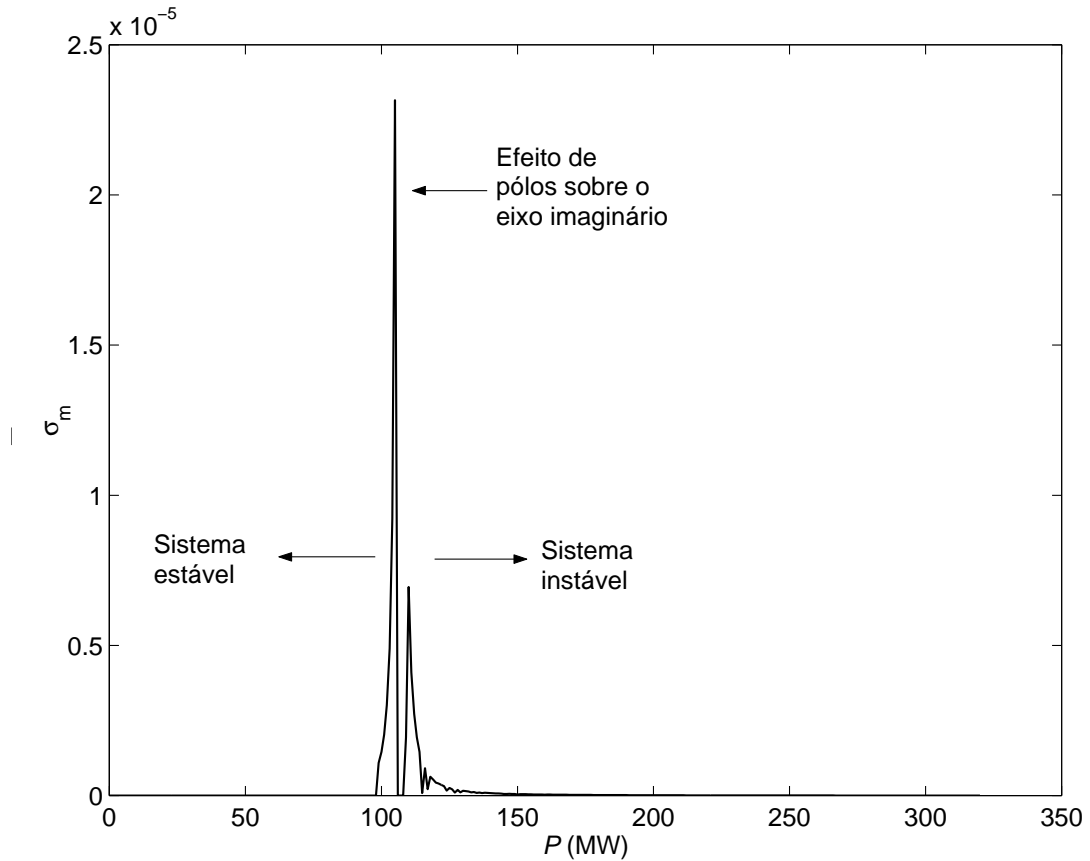


FIG. 3.2: Validação do modelo LFT inicial (para síntese  $H_2$ ).

mente nulo para toda a faixa de variação da potência, até o limite de convergência do algoritmo de cálculo do fluxo de carga.

### 3.3.2 MODELO LFT INICIAL PARA SÍNTESES COM CRITÉRIO DO TIPO $H_2/H_\infty$ - (CASO 1)

A partir do modelo LPV das EQ. 3.16, deduz-se a segunda variante LFT do modelo de SEP, definindo-se os vetores  $w_\Delta = [w_1, \dots, w_{28}]^T$  e  $z_\Delta = [z_1, \dots, z_{28}]^T$ ,

$$\begin{aligned}
w_1 &:= i_d z_1 \therefore z_1 = \Delta \delta \\
w_2 &:= i_d z_2 \therefore z_2 = \alpha_{25} \Delta E_d^n + \alpha_{28} w_1 \\
w_3 &:= i_d z_3 \therefore z_3 = \alpha_{24} \Delta E_d^n + \alpha_{31} w_1 \\
w_4 &:= i_q z_4 \therefore z_4 = \Delta \delta \\
w_5 &:= i_q z_5 \therefore z_5 = \alpha_{25} \Delta E_q^n + \alpha_{28} w_4 \\
w_6 &:= i_q z_6 \therefore z_6 = \alpha_{24} \Delta E_q^n + \alpha_{31} w_4 \\
w_7 &:= v_d z_7 \therefore z_7 = \Delta \delta \\
w_8 &:= v_d z_8 \therefore z_8 = \alpha_{23} \Delta E_q^n + \alpha_{29} w_7 \\
w_9 &:= v_d z_9 \therefore z_9 = w_4 \\
w_{10} &:= v_d z_{10} \therefore z_{10} = \alpha_{34} \Delta E_d^n + \alpha_{36} w_1 \\
w_{11} &:= v_d z_{11} \therefore z_{11} = \alpha_{22} \Delta E_q^n + \alpha_{32} w_7 \\
w_{12} &:= v_d z_{12} \therefore z_{12} = \alpha_{33} \Delta E_d^n + \alpha_{35} w_1 \\
w_{13} &:= v_q z_{13} \therefore z_{13} = \Delta \delta \\
w_{14} &:= v_q z_{14} \therefore z_{14} = -\alpha_{22} \Delta E_d^n + \alpha_{32} w_{13} \\
w_{15} &:= v_q z_{15} \therefore z_{15} = w_1 \\
w_{16} &:= v_q z_{16} \therefore z_{16} = \alpha_{34} \Delta E_q^n + \alpha_{36} w_4 \\
w_{17} &:= v_q z_{17} \therefore z_{17} = \alpha_{33} \Delta E_q^n + \alpha_{35} w_4 \\
w_{18} &:= v_q z_{18} \therefore z_{18} = -\alpha_{23} \Delta E_d^n + \alpha_{29} w_{13} \\
w_{19} &:= \delta b_{23} z_{19} \therefore z_{19} = \alpha_2 \Delta E_q^n + \alpha_5 w_4 + \alpha_7 w_7 \\
w_{20} &:= \delta b_{23} z_{20} \therefore z_{20} = \alpha_9 \Delta E_d^n + \alpha_{11} w_1 + \alpha_{13} w_{13} \\
w_{21} &:= \delta b_{23} z_{21} \therefore z_{21} = \alpha_{15} \Delta E_q^n + \alpha_{18} w_4 + \alpha_{20} w_7 \\
w_{22} &:= \delta b_{23} z_{22} \therefore z_{22} = w_2 + w_5 + w_8 - \alpha_{26} w_9 + \alpha_{26} w_{15} + w_{18} \\
w_{23} &:= \delta b_{23} z_{23} \therefore z_{23} = w_{10} + w_{16} \\
w_{24} &:= \delta \beta_{23} z_{24} \therefore z_{24} = \alpha_1 \Delta E_q^n + \alpha_4 w_4 + \alpha_6 w_7 + w_{19} \\
w_{25} &:= \delta \beta_{23} z_{25} \therefore z_{25} = \alpha_8 \Delta E_d^n + \alpha_{10} w_1 + \alpha_{12} w_{13} + w_{20} \\
w_{26} &:= \delta \beta_{23} z_{26} \therefore z_{26} = \alpha_{14} \Delta E_q^n + \alpha_{17} w_4 + \alpha_{19} w_7 + w_{21} \\
w_{27} &:= \delta \beta_{23} z_{27} \therefore z_{27} = w_3 + w_6 - \alpha_{30} w_9 + w_{11} + w_{14} + \alpha_{30} w_{15} + w_{22} \\
w_{28} &:= \delta \beta_{23} z_{28} \therefore z_{28} = w_{12} + w_{17} + w_{23}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

obtém-se uma forma LFT inicial para o referido modelo LPV das EQ. 3.16:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Delta E_q^u &= \alpha_3\Delta E_q^l + w_{24} \\
\frac{d}{dt}\Delta E_d^u &= w_{25} \\
\frac{d}{dt}\Delta E_q^l &= \alpha_{16}\Delta E_q^l + \alpha_{21}\Delta E_{fd} + w_{26} \\
\frac{d}{dt}\Delta\omega &= w_{27} \\
\frac{d}{dt}\Delta\delta &= \omega_{sinc}\Delta\omega \\
\frac{d}{dt}\Delta E_{fd} &= \alpha_{37}\Delta E_{fd} + w_{28} + \alpha_{38}\Delta V_{pss} \\
y &= \Delta\omega \\
w_\Delta &= \Delta(\theta(P, \delta b_{23}))z_\Delta,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

com  $\Delta(\theta(P, \delta b_{23})) = \text{diag}(i_d I_3, i_q I_3, v_d I_6, v_q I_6, \delta b_{23} I_5, \delta \beta_{23} I_5)$ .

Analogamente ao caso anterior, a validação pode ser feita calculando-se, para um número de pontos suficientemente grande da gama de variação de  $\Delta(\theta(P, \delta b_{23}))$ , o modelo EQ. 3.24,  $G_\Delta(s, \theta) = \mathcal{F}_u(G(s), \Delta(\theta))$ , e comparando-o com o modelo LPV EQ. 3.16.

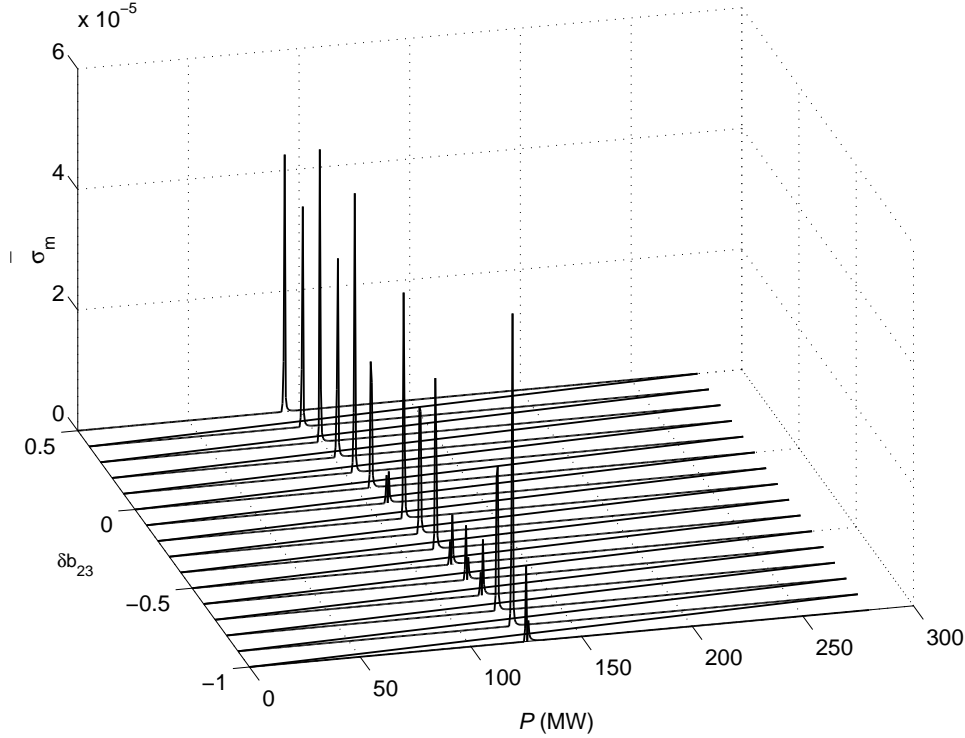


FIG. 3.3: Validação do modelo LFT inicial (para síntese  $H_2/H_\infty$ -caso 1).

A FIG. 3.3 ilustra a validação do modelo fechado  $M - \Delta$ . Observa-se, igualmente, um erro desprezível em relação ao modelo LPV inicial, o que demonstra que não houve perda de informação na obtenção da forma LFT.

### 3.3.3 MODELO LFT INICIAL PARA SÍNTESES COM CRITÉRIO DO TIPO $H_2/H_\infty$ - (CASO 2)

A partir do modelo LPV das EQ. 3.20, deduz-se a terceira variante LFT do modelo de SEP, definindo-se os vetores  $w_\Delta = [w_1, \dots, w_{26}]^T$  e  $z_\Delta = [z_1, \dots, z_{26}]^T$ ,

$$\begin{aligned}
w_1 &:= i_d z_1 \therefore z_1 = \Delta \delta \\
w_2 &:= i_d z_2 \therefore z_2 = \alpha_{13} \Delta E_d'' + \alpha_{15} w_1 \\
w_3 &:= i_d z_3 \therefore z_3 = w_{19} + w_{24} \\
\\
w_4 &:= i_q z_4 \therefore z_4 = \Delta \delta \\
w_5 &:= i_q z_5 \therefore z_5 = \alpha_{13} \Delta E_q'' + \alpha_{15} w_4 \\
w_6 &:= i_q z_6 \therefore z_6 = w_{23} - w_{21} \\
\\
w_7 &:= v_d z_7 \therefore z_7 = \Delta \delta \\
w_8 &:= v_d z_8 \therefore z_8 = \alpha_{12} \Delta E_q'' + \alpha_{16} w_7 \\
w_9 &:= v_d z_9 \therefore z_9 = -\alpha_{14} w_4 \\
w_{10} &:= v_d z_{10} \therefore z_{10} = \alpha_{17} \Delta E_d'' + \alpha_{18} w_1 \\
w_{11} &:= v_d z_{11} \therefore z_{11} = w_{19} + w_{24} \\
w_{12} &:= v_d z_{12} \therefore z_{12} = w_{23} - w_{21} \\
\\
w_{13} &:= v_q z_{13} \therefore z_{13} = \Delta \delta \\
w_{14} &:= v_q z_{14} \therefore z_{14} = -\alpha_{12} \Delta E_d'' + \alpha_{16} w_{13} \\
w_{15} &:= v_q z_{15} \therefore z_{15} = \alpha_{14} w_1 \\
w_{16} &:= v_q z_{16} \therefore z_{16} = \alpha_{17} \Delta E_q'' + \alpha_{18} w_4 \\
w_{17} &:= v_q z_{17} \therefore z_{17} = w_{23} - w_{21} \\
w_{18} &:= v_q z_{18} \therefore z_{18} = w_{19} + w_{24} \\
\\
w_{19} &:= \cos(\delta_0) z_{19} \therefore z_{19} = \delta I_{r_1} \\
w_{20} &:= \cos(\delta_0) z_{20} \therefore z_{20} = \beta_9 \Delta E_q'' + \beta_{10} w_4 + \beta_9 w_7 \\
w_{21} &:= \cos(\delta_0) z_{21} \therefore z_{21} = \delta I_{m_1} \\
w_{22} &:= \cos(\delta_0) z_{22} \therefore z_{22} = -\beta_9 \Delta E_d'' - \beta_{10} w_1 + \beta_9 w_{13} \\
\\
w_{23} &:= \sin(\delta_0) z_{23} \therefore z_{23} = \delta I_{r_1} \\
w_{24} &:= \sin(\delta_0) z_{24} \therefore z_{24} = \delta I_{m_1} \\
w_{25} &:= \sin(\delta_0) z_{25} \therefore z_{25} = \beta_9 \Delta E_d'' + \beta_{10} w_1 - \beta_9 w_{13} \\
w_{26} &:= \sin(\delta_0) z_{26} \therefore z_{26} = \beta_9 \Delta E_q'' + \beta_{10} w_4 + \beta_9 w_7
\end{aligned} \tag{3.25}$$

obtém-se uma forma LFT inicial para o referido modelo LPV das EQ. 3.20:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Delta E_q^u &= \alpha_1\Delta E_q^u + \alpha_2\Delta E_q^l + \alpha_3w_4 + \alpha_4w_7 + \beta_1w_{23} - \beta_1w_{21} \\
\frac{d}{dt}\Delta E_d^u &= \alpha_5\Delta E_d^u + \alpha_6w_1 + \alpha_7w_{13} + \beta_2w_{19} + \beta_2w_{24} \\
\frac{d}{dt}\Delta E_q^l &= \alpha_8\Delta E_q^u + \alpha_9\Delta E_q^l - \alpha_9\Delta E_{fd} + \alpha_{10}w_4 + \alpha_{11}w_7 + \beta_3w_{23} - \beta_3w_{21} \\
\frac{d}{dt}\Delta\omega &= w_2 + w_5 + w_8 + w_9 + w_{14} + w_{15} + \beta_4w_{12} + \beta_4w_{18} + \beta_5w_3 - \beta_5w_6 \\
\frac{d}{dt}\Delta\delta &= \omega_{sinc}\Delta\omega \\
\frac{d}{dt}\Delta E_{fd} &= \alpha_{19}\Delta E_{fd} + w_{10} + w_{16} + \beta_7w_{11} - \beta_7w_{17} + \beta_6\Delta V_{pss} \\
\Delta V_{r_1} - \Delta V_{r_2} &\triangleq \Delta V_{r_{12}} = w_{20} + w_{25} + \beta_{10}\delta I_{m_1} \\
\Delta V_{m_1} - \Delta V_{m_2} &\triangleq \Delta V_{m_{12}} = w_{22} + w_{26} - \beta_{10}\delta I_{r_1} \\
\Delta\omega &= \beta_8\Delta\omega \therefore \beta_8 = 1 \\
w_\Delta &= \Delta(\theta(P))z_\Delta,
\end{aligned} \tag{3.26}$$

com  $\Delta(\theta(P)) = \text{diag}(i_d I_3, i_q I_3, v_d I_6, v_q I_6, \cos(\delta_0) I_4, \sin(\delta_0) I_4)$ .

Analogamente aos 2 casos anteriores, a validação é feita calculando-se, para um número de pontos suficientemente grande da gama de variação de  $\Delta(\theta(P))$ , o modelo EQ. 3.26,  $G_\Delta(s, \theta) = \mathcal{F}_u(G(s), \Delta(\theta))$ , e comparando-o com o modelo LPV EQ. 3.20.

A FIG. 3.4 ilustra a validação do modelo fechado  $M - \Delta$ , o que confirma a precisão do modelo LFT obtido.

### 3.4 ELIMINAÇÃO DE PARÂMETROS INTERMEDIÁRIOS-ETAPA 3

Observa-se que o bloco paramétrico  $\Delta(\theta)$  nos modelos LPV/LFT iniciais, das EQ. 3.22, EQ. 3.24 e EQ. 3.26, podem depender tanto de parâmetros intermediários, considerados medidos indiretamente,  $\theta_p = [i_d, i_q, v_d, v_q, \delta_0]^T$ , ou de parâmetros incertos  $\theta_\delta = [\delta b_{23}, \delta \beta_{23}]^T$ . Sabe-se, no entanto, que todos os elementos de  $\theta_p$  dependem unicamente da potência ativa gerada ( $P$ ) e que os elementos de  $\theta_\delta$  dependem unicamente de  $\delta b_{23}$ . A diversidade de parâmetros e a existência de parâmetros redundantes em  $\Delta(\theta)$  podem conduzir a controladores conservativos, uma vez que trajetórias paramétricas irrealistas podem ser levadas em consideração. Outro inconveniente é que a ordem do bloco diagonal paramétrico  $\Delta(\theta)$  pode ser grande o suficiente para inviabilizar computacionalmente a síntese, devido ao grande número de variáveis de projeto (v. TAB. 2.1). Nesta seção, são apresentadas duas formulações desenvolvidas durante este trabalho (Seções 3.4.1 e 3.4.2), constituindo, conforme a necessidade, a terceira etapa da metodologia proposta, cujo objetivo é eliminar os parâmetros intermediários, enquanto que a redução de ordem do bloco paramétrico, quarta etapa, é objeto da Seção 3.5.

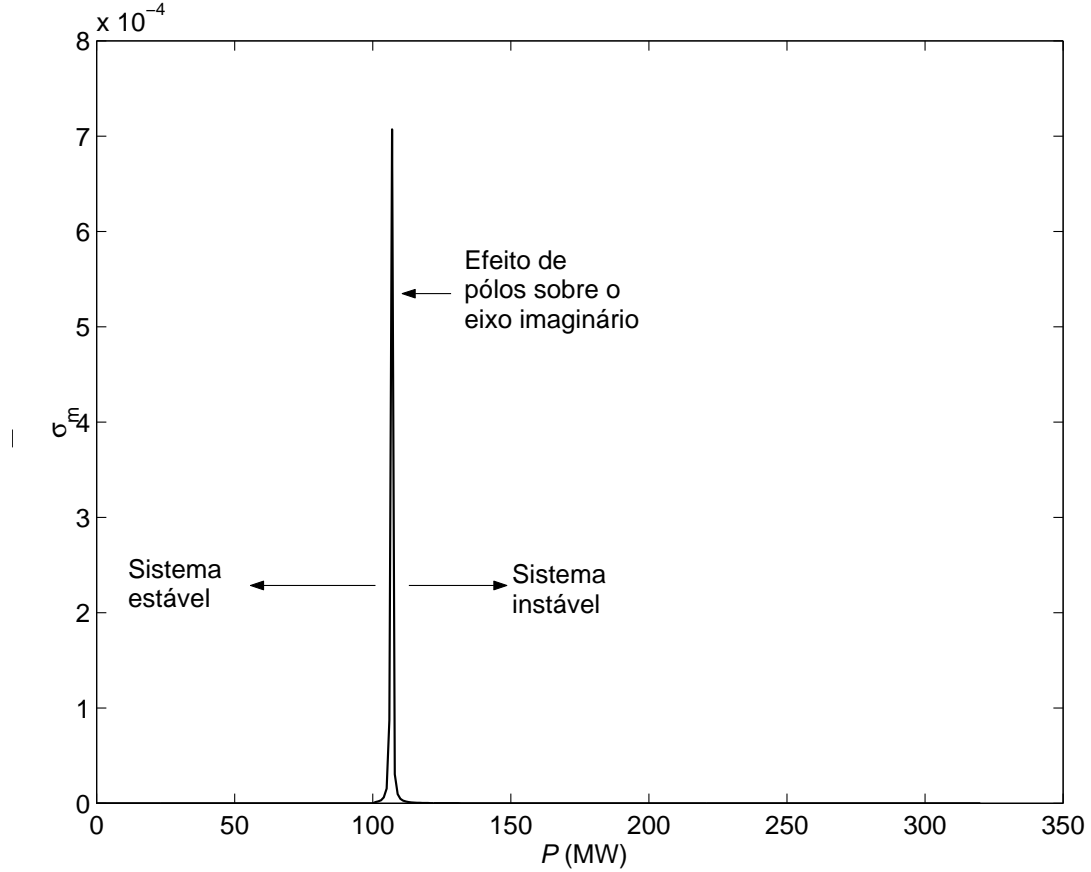


FIG. 3.4: Validação do modelo LFT inicial (para síntese  $H_2/H_\infty$ -caso 2).

### 3.4.1 MODELOS LPV/LFT DEPENDENTES DE PARÂMETROS MEDIDOS

Esta seção trata dos modelos cujos parâmetros intermediários a serem eliminados dependem somente de  $P$ , ou seja, aqueles das EQ. 3.22 e EQ. 3.26. Estas representações podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}x &= Ax + B_\Delta w_\Delta + B_2 u \\
 z_\Delta &= C_\Delta x + D_{\Delta\Delta} w_\Delta + D_{\Delta 2} u \\
 y &= C_2 x + D_{2\Delta} w_\Delta + D_{22} u \\
 w_\Delta &= \Delta(\theta) z_\Delta
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

onde  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $D_{\Delta\Delta} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ ,  $D_{22} \in \mathbf{R}^{p_2 \times m_2}$ , com  $k$  parâmetros,  $\theta_j = f_j(P)$ ,  $j = 1, \dots, k$ , repetidos segundo a estrutura  $[l_1, \dots, l_k]$ , ou seja,  $\Delta(\theta) = \text{diag}(\theta_1 I_{l_1}, \dots, \theta_k I_{l_k})$  e  $N = \sum l_j$ . Então, busca-se uma representação com o bloco paramétrico do tipo  $\Delta(P) = \text{diag}(P I_{2N})$ , onde apareça somente  $P$  na diagonal principal.

A idéia é aproximar, numericamente, as funções de dependência dos parâmetros



intermediários em relação a  $P$  por funções quadráticas do tipo

$$\theta_j = f(P) \cong a_{0j} + a_{1j}P + a_{2j}P^2 \quad (3.28)$$

Os coeficientes dos ajustes quadráticos podem ser calculados pelo método dos mínimos quadrados:  $\hat{a}_j = [a_{0j}, a_{1j}, a_{2j}]^T = [X_j^T X_j]^{-1} X_j^T Y_j$ , onde  $Y_j$  é o vetor com valores do parâmetro  $\theta_j$ , obtidos via fluxo de carga, ao longo de uma faixa discretizada de  $P$ ,  $P_1, P_2, \dots, P_{\bar{n}}$ , e

$$X_j = \begin{bmatrix} 1 & P_1 & P_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & P_{\bar{n}} & P_{\bar{n}}^2 \end{bmatrix}. \quad (3.29)$$

Substituindo a EQ. 3.28, para cada parâmetro intermediário ajustado, nas EQ. 3.27, obtém-se a nova forma LFT procurada:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= \mathbb{A}x + \mathbb{B}_\Delta W_\Delta + \mathbb{B}_2 u \\ Z_\Delta &= \mathbb{C}_\Delta x + \mathbb{D}_{\Delta\Delta} W_\Delta + \mathbb{D}_{\Delta 2} u \\ y &= \mathbb{C}_2 x + \mathbb{D}_{2\Delta} W_\Delta + \mathbb{D}_{22} u \\ W_\Delta &= \Delta(P) Z_\Delta \end{aligned} \quad (3.30)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= [A + B_\Delta(I_N - \Delta_0 D_{\Delta\Delta})^{-1} \Delta_0 C_\Delta] \\ \mathbb{B}_\Delta &= [B_\Delta(I_N - \Delta_0 D_{\Delta\Delta})^{-1}; \quad 0_{n \times N}] \\ \mathbb{B}_2 &= [B_\Delta(I_N - \Delta_0 D_{\Delta\Delta})^{-1} \Delta_0 D_{\Delta 2} + B_2] \\ \mathbb{C}_\Delta &= \begin{bmatrix} \Delta_1 F_1 \\ \Delta_2 F_1 \end{bmatrix} \mathbb{D}_{\Delta\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 F_2 & I_N \\ \Delta_2 F_2 & 0_{N \times N} \end{bmatrix} \mathbb{D}_{\Delta 2} = \begin{bmatrix} \Delta_1 F_3 \\ \Delta_2 F_3 \end{bmatrix} \\ \mathbb{C}_2 &= [C_2 + D_{2\Delta}(I_N - \Delta_0 D_{\Delta\Delta})^{-1} \Delta_0 C_\Delta] \\ \mathbb{D}_{2\Delta} &= [D_{2\Delta}(I_N - \Delta_0 D_{\Delta\Delta})^{-1}; \quad 0_{p_2 \times N}] \\ \mathbb{D}_{22} &= [D_{2\Delta}(I_N - \Delta_0 D_{\Delta\Delta})^{-1} \Delta_0 D_{\Delta 2} + D_{22}] \\ \Delta(P) &= \text{diag}(P I_{2N}) \end{aligned} \quad (3.31)$$

com

$$\begin{aligned} F_1 &= [C_\Delta + D_{\Delta\Delta}(I_N - \Delta_0 D_{\Delta\Delta})^{-1} \Delta_0 C_\Delta] \\ F_2 &= [D_{\Delta\Delta}(I_N - \Delta_0 D_{\Delta\Delta})^{-1}] \\ F_3 &= [D_{\Delta\Delta}(I_N - \Delta_0 D_{\Delta\Delta})^{-1} \Delta_0 D_{\Delta 2} + D_{\Delta 2}] \\ \Delta_0 &= \text{diag}(a_{0_1} I_{l_1}, a_{0_2} I_{l_2}, \dots, a_{0_k} I_{l_k}) \\ \Delta_1 &= \text{diag}(a_{1_1} I_{l_1}, a_{1_2} I_{l_2}, \dots, a_{1_k} I_{l_k}) \\ \Delta_2 &= \text{diag}(a_{2_1} I_{l_1}, a_{2_2} I_{l_2}, \dots, a_{2_k} I_{l_k}) \end{aligned}$$

### 3.4.2 MODELOS LPV/LFT DEPENDENTE DE PARÂMETROS MEDIDOS E PARÂMETROS INCERTOS

De forma análoga à seção precedente, busca-se aqui uma nova representação LFT para o modelo da EQ. 3.24, onde os parâmetros intermediários dependem tanto de  $P$  quanto de  $\delta b_{23}$ .

O modelo da EQ. 3.24 pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x &= Ax + B_{\Delta_p}w_{\Delta_p} + B_{\Delta_\delta}w_{\Delta_\delta} + B_2u \\
z_{\Delta_p} &= C_{\Delta_p}x + D_{\Delta\Delta_{pp}}w_{\Delta_p} + D_{\Delta\Delta_{p\delta}}w_{\Delta_\delta} + D_{\Delta 2_p}u \\
z_{\Delta_\delta} &= C_{\Delta_\delta}x + D_{\Delta\Delta_{\delta p}}w_{\Delta_p} + D_{\Delta\Delta_{\delta\delta}}w_{\Delta_\delta} + D_{\Delta 2_\delta}u \\
y &= C_2x + D_{2\Delta_p}w_{\Delta_p} + D_{2\Delta_\delta}w_{\Delta_\delta} + D_{22}u \\
w_\Delta &= \Delta(\theta)z_\Delta
\end{aligned} \tag{3.32}$$

onde  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $D_{\Delta\Delta_{pp}} \in \mathbf{R}^{N_p \times N_p}$ ,  $D_{\Delta\Delta_{\delta\delta}} \in \mathbf{R}^{N_\delta \times N_\delta}$ ,  $D_{22} \in \mathbf{R}^{p_2 \times m_2}$ . Os  $k$  parâmetros medidos  $\theta_j = f_j(P, \delta b_{23})$ ,  $j = 1, \dots, k$  são repetidos segundo a estrutura  $[l_1, \dots, l_k]$ , e as  $\kappa$  incertezas  $\bar{\theta}_i = f_i(\delta b_{23})$ ,  $i = 1, \dots, \kappa$  são repetidas segundo a estrutura  $[\iota_1, \dots, \iota_\kappa]$ , ou seja,  $\Delta(\theta) = \text{diag}(\theta_1 I_{l_1}, \dots, \theta_k I_{l_k}, \dots, \bar{\theta}_\kappa I_{\iota_\kappa})$ ,  $N_p = \sum l_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , e  $N_\delta = \sum \iota_i$ ,  $i = 1, \dots, \kappa$ .

Assim, a estrutura LFT procurada é a seguinte:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x &= Ax + \mathbb{B}_\Delta W_\Delta + \mathbb{B}_2 u \\
Z_\Delta &= \mathbb{C}_\Delta x + \mathbb{D}_{\Delta\Delta} W_\Delta + \mathbb{D}_{\Delta 2} u \\
y &= \mathbb{C}_2 x + \mathbb{D}_{2\Delta} W_\Delta + \mathbb{D}_{22} u \\
W_\Delta &= \Delta(P, \delta b_{23}) Z_\Delta
\end{aligned} \tag{3.33}$$

onde  $\Delta(P, \delta b_{23}) = \text{diag}(PI_{2N_p}, \delta b_{23}I_{3N_p+2N_\delta}), \mathbb{N}_p = 2N_p, \mathbb{N}_\delta = 3N_p + 2N_\delta,$

$$\begin{aligned}
\mathbb{A} &= [A + B_{\Delta_p}F_7 + B_{\Delta_\delta}F_8] \\
\mathbb{B}_\Delta &= [B_{\Delta_p}F_3 + B_{\Delta_\delta}F_4 \quad 0_{n \times N_p} \quad B_{\Delta_p}F_3 + B_{\Delta_\delta}F_4 \quad 0_{n \times N_p} \quad 0_{n \times N_p} \quad 0_{n \times N_\delta} \quad B_{\Delta_p}F_2 + B_{\Delta_\delta}F_1] \\
\mathbb{B}_2 &= [B_2 + B_{\Delta_p}F_5 + B_{\Delta_\delta}F_6] \\
\mathbb{C}_\Delta &= \begin{bmatrix} \Delta_1 F_9 \\ \Delta_{11} F_9 \\ \Delta_2 F_9 \\ \Delta_{22} F_9 \\ \Delta_{12} F_9 \\ \Delta_{\delta\delta} F_{10} \\ \Delta_{1\delta} F_{10} \end{bmatrix} \quad \mathbb{D}_{\Delta 2} = \begin{bmatrix} \Delta_1 F_{15} \\ \Delta_{11} F_{15} \\ \Delta_2 F_{15} \\ \Delta_{22} F_{15} \\ \Delta_{12} F_{15} \\ \Delta_{\delta\delta} F_{16} \\ \Delta_{1\delta} F_{16} \end{bmatrix} \\
\mathbb{D}_{\Delta\Delta} &= \begin{bmatrix} \Delta_1 F_{11} & I_{N_p} & \Delta_1 F_{11} & 0_{N_p} & I_{N_p} & 0_{N_p \times N_\delta} & \Delta_1 F_{13} \\ \Delta_{11} F_{11} & 0_{N_p} & \Delta_{11} F_{11} & 0_{N_p} & 0_{N_p} & 0_{N_p \times N_\delta} & \Delta_{11} F_{13} \\ \Delta_2 F_{11} & 0_{N_p} & \Delta_2 F_{11} & I_{N_p} & 0_{N_p} & 0_{N_p \times N_\delta} & \Delta_2 F_{13} \\ \Delta_{22} F_{11} & 0_{N_p} & \Delta_{22} F_{11} & 0_{N_p} & 0_{N_p} & 0_{N_p \times N_\delta} & \Delta_{22} F_{13} \\ \Delta_{12} F_{11} & 0_{N_p} & \Delta_{12} F_{11} & 0_{N_p} & 0_{N_p} & 0_{N_p \times N_\delta} & \Delta_{12} F_{13} \\ \Delta_{\delta\delta} F_{12} & 0_{N_\delta \times N_p} & \Delta_{\delta\delta} F_{12} & 0_{N_\delta \times N_p} & 0_{N_\delta \times N_p} & 0_{N_\delta} & \Delta_{\delta\delta} F_{14} \\ \Delta_{1\delta} F_{12} & 0_{N_\delta \times N_p} & \Delta_{1\delta} F_{12} & 0_{N_\delta \times N_p} & 0_{N_\delta \times N_p} & I_{N_\delta} & \Delta_{1\delta} F_{14} \end{bmatrix} \\
\mathbb{C}_2 &= [C_2 + D_{2\Delta_p}F_7 + D_{2\Delta_\delta}F_8] \\
\mathbb{D}_{2\Delta} &= [D_{2\Delta_p}F_3 + D_{2\Delta_\delta}F_4 \quad 0_{p_2 \times N_p} \quad D_{2\Delta_p}F_3 + D_{2\Delta_\delta}F_4 \quad 0_{p_2 \times N_p} \quad 0_{p_2 \times N_p} \quad 0_{p_2 \times N_\delta} \quad D_{2\Delta_p}F_2 + D_{2\Delta_\delta}F_1] \\
\mathbb{D}_{22} &= [D_{22} + D_{2\Delta_p}F_5 + D_{2\Delta_\delta}F_6]
\end{aligned} \tag{3.34}$$

e

$$\begin{aligned}
F_0 &= [(I_{N_p} - \Delta_0 D_{\Delta\Delta_{pp}})^{-1}] \\
F_1 &= [[I_{N_\delta} - \Delta_{0\delta}(D_{\Delta\Delta_{\delta\delta}} + D_{\Delta\Delta_{\delta p}}F_0\Delta_0 D_{\Delta\Delta_{p\delta}})]^{-1}] \\
F_2 &= [F_0\Delta_0 D_{\Delta\Delta_{p\delta}}F_1] \\
F_3 &= [F_0 + F_2\Delta_{0\delta}D_{\Delta\Delta_{\delta p}}F_0] \\
F_4 &= [F_1\Delta_{0\delta}D_{\Delta\Delta_{\delta p}}F_0] \\
F_5 &= [F_0\Delta_0 D_{\Delta 2_p} + F_2\Delta_{0\delta}(D_{\Delta 2_\delta} + D_{\Delta\Delta_{\delta p}}F_0\Delta_0 D_{\Delta 2_p})] \\
F_6 &= [F_1\Delta_{0\delta}(D_{\Delta 2_\delta} + D_{\Delta\Delta_{\delta p}}F_0\Delta_0 D_{\Delta 2_p})] \\
F_7 &= [F_0\Delta_0 C_{\Delta_p} + F_2\Delta_{0\delta}(C_{\Delta_\delta} + D_{\Delta\Delta_{\delta p}}F_0\Delta_0 C_{\Delta_p})] \\
F_8 &= [F_1\Delta_{0\delta}(C_{\Delta_\delta} + D_{\Delta\Delta_{\delta p}}F_0\Delta_0 C_{\Delta_p})] \\
F_9 &= [C_{\Delta_p} + D_{\Delta\Delta_{pp}}F_7 + D_{\Delta\Delta_{p\delta}}F_8] \\
F_{10} &= [C_{\Delta_\delta} + D_{\Delta\Delta_{\delta p}}F_7 + D_{\Delta\Delta_{\delta\delta}}F_8] \\
F_{11} &= [D_{\Delta\Delta_{pp}}F_3 + D_{\Delta\Delta_{p\delta}}F_4] \\
F_{12} &= [D_{\Delta\Delta_{\delta p}}F_3 + D_{\Delta\Delta_{\delta\delta}}F_4] \\
F_{13} &= [D_{\Delta\Delta_{p\delta}}F_1 + D_{\Delta\Delta_{pp}}F_2] \\
F_{14} &= [D_{\Delta\Delta_{\delta\delta}}F_1 + D_{\Delta\Delta_{\delta p}}F_2] \\
F_{15} &= [D_{\Delta 2_p} + D_{\Delta\Delta_{pp}}F_5 + D_{\Delta\Delta_{p\delta}}F_6] \\
F_{16} &= [D_{\Delta 2_\delta} + D_{\Delta\Delta_{\delta p}}F_5 + D_{\Delta\Delta_{\delta\delta}}F_6]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= \text{diag}(a_{0_1} I_{l_1}, a_{0_2} I_{l_2}, \dots, a_{0_k} I_{l_k}) \\
\Delta_1 &= \text{diag}(a_{1_1} I_{l_1}, a_{1_2} I_{l_2}, \dots, a_{1_k} I_{l_k}) \\
\Delta_{11} &= \text{diag}(a_{11_1} I_{l_1}, a_{11_2} I_{l_2}, \dots, a_{11_k} I_{l_k}) \\
\Delta_2 &= \text{diag}(a_{2_1} I_{l_1}, a_{2_2} I_{l_2}, \dots, a_{2_k} I_{l_k}) \\
\Delta_{12} &= \text{diag}(a_{12_1} I_{l_1}, a_{12_2} I_{l_2}, \dots, a_{12_k} I_{l_k}) \\
\Delta_{22} &= \text{diag}(a_{22_1} I_{l_1}, a_{22_2} I_{l_2}, \dots, a_{22_k} I_{l_k}) \\
\Delta_{0\delta} &= \text{diag}(a_{0\delta_1} I_{l_1}, a_{0\delta_2} I_{l_2}, \dots, a_{0\delta_k} I_{l_k}) \\
\Delta_{1\delta} &= \text{diag}(a_{1\delta_1} I_{l_1}, a_{1\delta_2} I_{l_2}, \dots, a_{1\delta_k} I_{l_k}) \\
\Delta_{\delta\delta} &= \text{diag}(a_{\delta\delta_1} I_{l_1}, a_{\delta\delta_2} I_{l_2}, \dots, a_{\delta\delta_k} I_{l_k}) \\
\theta_j &= f_j(P, \delta b_{23}) \cong a_{0_j} + a_{1_j} P + a_{11_j} P^2 + a_{2_j} (\delta b_{23}) + a_{12_j} P (\delta b_{23}) + a_{22_j} (\delta b_{23})^2 \\
\bar{\theta}_i &= f_i(\delta b_{23}) \cong a_{0\delta_i} + a_{1\delta_i} (\delta b_{23}) + a_{\delta\delta_i} (\delta b_{23})^2
\end{aligned}$$

Os coeficientes dos ajustes biquadráticos são calculados pelo método dos mínimos quadrados:

$\hat{a}_j = [a_{0_j}, a_{1_j}, a_{11_j}, a_{2_j}, a_{12_j}, a_{22_j}]^T = [X_j^T X_j]^{-1} X_j^T Y_j$ , onde  $Y_j$  é o vetor com valores do parâmetro  $\theta_j$ , obtidos via fluxo de carga, ao longo de um *grid* de  $P$  x  $\delta b_{23}$ .

$$X_j = \begin{bmatrix} 1 & P_1 & P_1^2 & (\delta b_{23})_1 & P_1(\delta b_{23})_1 & (\delta b_{23})_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & P_{\bar{n}} & P_{\bar{n}}^2 & (\delta b_{23})_{\bar{n}} & P_{\bar{n}}(\delta b_{23})_{\bar{n}} & (\delta b_{23})_{\bar{n}}^2 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

Os coeficientes do ajuste quadrático são, igualmente, calculados pelo método dos mínimos quadrados:

$\bar{a}_i = [a_{0\delta_i}, a_{1\delta_i}, a_{\delta\delta_i}]^T = [\bar{X}_i^T \bar{X}_i]^{-1} \bar{X}_i^T \bar{Y}_i$ , onde  $\bar{Y}_i$  é o vetor com valores do parâmetro  $\bar{\theta}_i$ , obtidos via cálculo direto  $\delta\beta_{23} = f(\delta b_{23}) \cong 1/(-56673 + 19000\delta b_{23})$ , ao longo da faixa da incerteza  $\delta b_{23}$ .

$$\bar{X}_i = \begin{bmatrix} 1 & (\delta b_{23})_1 & (\delta b_{23})_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & (\delta b_{23})_{\bar{n}} & (\delta b_{23})_{\bar{n}}^2 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

### 3.5 REDUÇÃO DE ORDEM DA NOVA FORMA LPV/LFT DO SEP-ETAPA 4

Os modelos LPV/LFT das EQ. 3.30 e EQ. 3.33 têm um bloco  $\Delta(\theta)$  de ordem muito elevada, o que justifica uma nova etapa para a metodologia de modelagem, visando à redução do bloco paramétrico. O método de decomposição de Kalman, assim como o método de decomposição em valores singulares (SVD), utilizados em (BOUKARIM,

1998), procuram reduzir a ordem do modelo LFT por blocos de parâmetros sucessivamente. Esses métodos são utilizados nesta seção e constituem a quarta etapa da metodologia proposta.

A redução de ordem pode ocorrer em pelo menos duas situações. A primeira possibilidade é devido ao fato que alguns caminhos da representação LFT ou  $M - \Delta$  podem não estar conectados. A segunda possibilidade é que as variações de algumas entradas em  $M$  com respeito a certos parâmetros podem não ser independentes, isto é, algumas entradas podem ser redundantes. Os métodos a seguir são baseados em conceitos de controlabilidade e observabilidade para identificar realizações não-mínimas, contudo eles não garantem a minimalidade do modelo reduzido.

### 3.5.1 MÉTODO SVD

A computação numérica da decomposição de Kalman (v. Seção 3.5.2) pode ser pobremente condicionada para modelos de ordem elevada. Por isso um algoritmo mais prático consiste em aplicar primeiro o método da decomposição em valores singulares (SVD) para tentar eliminar diretamente os subespaços não-controláveis e não-observáveis.

Considere a LFT EQ. 3.33, já particionada segundo a partição do bloco  $\Delta(\theta)$ :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x &= \mathbf{A}x + \mathbf{B}_{\Delta_p}W_{\Delta_p} + \mathbf{B}_{\Delta_\delta}W_{\Delta_\delta} + \mathbf{B}_2u \\
Z_{\Delta_p} &= \mathbf{C}_{\Delta_p}x + \mathbf{D}_{\Delta\Delta_{pp}}W_{\Delta_p} + \mathbf{D}_{\Delta\Delta_{p\delta}}W_{\Delta_\delta} + \mathbf{D}_{\Delta 2p}u \\
Z_{\Delta_\delta} &= \mathbf{C}_{\Delta_\delta}x + \mathbf{D}_{\Delta\Delta_{\delta p}}W_{\Delta_p} + \mathbf{D}_{\Delta\Delta_{\delta\delta}}W_{\Delta_\delta} + \mathbf{D}_{\Delta 2\delta}u \\
y &= \mathbf{C}_2x + \mathbf{D}_{2\Delta_p}W_{\Delta_p} + \mathbf{D}_{2\Delta_\delta}W_{\Delta_\delta} + \mathbf{D}_{22}u \\
W_\Delta &= \Delta(\theta)Z_\Delta \\
\Delta(\theta) &= \text{diag}(PI_{\mathbb{N}_p}, \delta b_{23}I_{\mathbb{N}_\delta})
\end{aligned} \tag{3.37}$$

O método SVD consiste das seguintes etapas:

1. Definir  $M_{11} \triangleq \mathbf{D}_{\Delta\Delta_{pp}}$ ;  $M_{12} \triangleq \mathbf{D}_{\Delta\Delta_{p\delta}}$ ;  $N_1 \triangleq [\mathbf{C}_{\Delta_p}:\mathbf{D}_{\Delta 2p}]$ ;  $M_{21} \triangleq \mathbf{D}_{\Delta\Delta_{\delta p}}$ ;  $P_1 \triangleq [\mathbf{B}_{\Delta_p}^T:\mathbf{D}_{2\Delta_p}^T]^T$  e  $M_{22} \triangleq \mathbf{D}_{\Delta\Delta_{\delta\delta}}$ ;  $N_2 \triangleq [\mathbf{C}_{\Delta_\delta}:\mathbf{D}_{\Delta 2\delta}]$ ;  $P_2 \triangleq [\mathbf{B}_{\Delta_\delta}^T:\mathbf{D}_{2\Delta_\delta}^T]^T$ .
2. Se a matriz  $[M_{11}:M_{12}:N_1]$  tem uma deficiência de posto igual a  $d$ , então sua SVD produz  $[M_{11}:M_{12}:N_1] = U\Sigma V^T$ , onde  $U$  e  $V$  são matrizes unitárias e

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.38}$$

Eliminar as  $d$  últimas linhas e colunas de  $U^T M_{11}U$ , remanescendo a matriz reduzida  $\widehat{M}_{11}$ ; eliminar as  $d$  últimas linhas de  $U^T M_{12}$  e de  $U^T N_1$ , remanescendo as

respectivas matrizes reduzidas  $\widehat{M}_{12}$  e  $\widehat{N}_1$ ; eliminar as  $d$  últimas colunas de  $M_{21}U$  e de  $P_1U$ , remanescendo as respectivas matrizes reduzidas  $\widehat{M}_{21}$  e  $\widehat{P}_1$ . Resumindo, aplicar a SVD sobre as matrizes  $M_{11}, M_{12}, N_1, M_{21}, P_1$ , para eliminar os subespaços não-controláveis e não-observáveis, resultando nas respectivas matrizes reduzidas  $\widehat{M}_{11}, \widehat{M}_{12}, \widehat{N}_1, \widehat{M}_{21}, \widehat{P}_1$ .

3. Se a matriz  $[M_{22}:\widehat{M}_{21}:N_2]$  tem uma deficiência de posto igual a  $q$ , então sua SVD produz  $[M_{22}:\widehat{M}_{21}:N_2] = U_1 \Sigma_1 V_1^T$ , onde  $U_1$  e  $V_1$  são matrizes unitárias e

$$\Sigma_1 = \begin{bmatrix} \Sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

Eliminar as  $q$  últimas linhas e colunas de  $U_1^T M_{22} U_1$ , remanescendo a matriz reduzida  $\widehat{M}_{22}$ ; eliminar as  $q$  últimas linhas de  $U_1^T \widehat{M}_{21}$  e de  $U_1^T N_2$ , remanescendo as respectivas matrizes reduzidas  $\widehat{M}_{21}$  e  $\widehat{N}_2$ ; eliminar as  $q$  últimas colunas de  $\widehat{M}_{12} U_1$  e de  $P_2 U_1$ , remanescendo as respectivas matrizes reduzidas  $\widehat{M}_{12}$  e  $\widehat{P}_2$ . Resumindo, aplicar a SVD sobre as matrizes  $M_{22}, \widehat{M}_{21}, N_2, \widehat{M}_{12}, P_2$ , para eliminar os subespaços não-controláveis e não-observáveis, resultando nas respectivas matrizes reduzidas  $\widehat{M}_{22}, \widehat{M}_{21}, \widehat{N}_2, \widehat{M}_{12}, \widehat{P}_2$ .

4. Repetir as etapas 2 e 3 para as matrizes reduzidas resultantes até que nenhuma redução possa ser alcançada.
5. Recuperar as matrizes reduzidas LFT.

### 3.5.2 MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO DE KALMAN

Considere a LFT da EQ. 3.37. O método de redução baseado na decomposição de Kalman consiste das seguintes etapas:

1. Definir as triplas

$$(M_{11}, [M_{12}:N_1], \begin{bmatrix} M_{21} \\ P_1 \end{bmatrix}) \text{ e } (M_{22}, [M_{21}:N_2], \begin{bmatrix} M_{12} \\ P_2 \end{bmatrix})$$

onde  $M_{11} \triangleq \mathbb{D}_{\Delta\Delta_{pp}}$ ;  $M_{12} \triangleq \mathbb{D}_{\Delta\Delta_{p\delta}}$ ;  $N_1 \triangleq [\mathbb{C}_{\Delta_p}:\mathbb{D}_{\Delta_{2p}}]$ ;  $M_{21} \triangleq \mathbb{D}_{\Delta\Delta_{\delta p}}$ ;  $P_1 \triangleq [\mathbb{B}_{\Delta_p}^T:\mathbb{D}_{\Delta_{2p}}^T]^T$  e  $M_{22} \triangleq \mathbb{D}_{\Delta\Delta_{\delta\delta}}$ ;  $N_2 \triangleq [\mathbb{C}_{\Delta_\delta}:\mathbb{D}_{\Delta_{2\delta}}]$ ;  $P_2 \triangleq [\mathbb{B}_{\Delta_\delta}^T:\mathbb{D}_{\Delta_{2\delta}}^T]^T$ .

2. Aplicar a decomposição de Kalman para a primeira tripla e reter somente os subespaços controláveis e observáveis para obter a tripla reduzida  $(\overline{M}_{11}, [\overline{M}_{12}:\overline{N}_1], \begin{bmatrix} \overline{M}_{21} \\ \overline{P}_1 \end{bmatrix})$

correspondente ao modelo reduzido em relação ao parâmetro  $P$ :

$$\begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ z_2 \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{12} & \bar{N}_1 \\ \bar{M}_{21} & M_{22} & N_2 \\ \bar{P}_1 & P_2 & F_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_1 \\ w_2 \\ \xi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{w}_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1(P) & 0 \\ 0 & \Delta_2(\delta b_{23}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$F_0 = \begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & D_{22} \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x \\ y \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

onde  $\bar{\Delta}_1$  é de dimensão menor que a original  $\Delta_1$ .

3. Aplicar a decomposição de Kalman para a tripla reduzida  $(M_{22}, [\bar{M}_{21}:N_2], \begin{bmatrix} \bar{M}_{12} \\ P_2 \end{bmatrix})$  do modelo reduzido da EQ. 3.40 e reter somente os subespaços controláveis e observáveis para obter a tripla reduzida

$$(\bar{M}_{22}, [\bar{\bar{M}}_{21}:\bar{N}_2], \begin{bmatrix} \bar{\bar{M}}_{12} \\ \bar{P}_2 \end{bmatrix})$$

correspondente ao modelo reduzido em relação ao parâmetro  $P$  e à incerteza  $\delta b_{23}$ :

$$\begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{M}_{11} & \bar{M}_{12} & \bar{N}_1 \\ \bar{\bar{M}}_{21} & \bar{M}_{22} & \bar{N}_2 \\ \bar{P}_1 & \bar{P}_2 & F_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \\ \xi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{w}_1 \\ \bar{w}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1(P) & 0 \\ 0 & \bar{\Delta}_2(\delta b_{23}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$F_0 = \begin{bmatrix} A & B_2 \\ C_2 & D_{22} \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}x \\ y \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$$

onde  $\bar{\Delta}_2$  é de dimensão menor que a original  $\Delta_2$ .

4. Repetir as etapas 2 e 3 para as matrizes reduzidas resultantes até que nenhuma redução possa ser alcançada.
5. Recuperar as matrizes reduzidas LFT.

### 3.6 RESUMO

Este capítulo abordou o desenvolvimento de uma metodologia para a obtenção de modelos para síntese LPV/LFT, a partir da forma aumentada ou implícita do SEP tipo

máquina-barras infinita. Obtevem-se três variantes do sistema estudado, todos estruturados segundo o modelo LPV/LFT, com ordens reduzidas, e dependentes somente do parâmetro medido  $P$  e da incerteza  $\delta b_{23}$ , quando necessária e segundo a estratégia de síntese escolhida. Para uma melhor compreensão da metodologia global, o Algoritmo 3.3 apresenta todas as etapas de uma forma mais resumida.

**Algoritmo 3.3** *Obtenção do modelo LFT*

**Etapa 1: Obtenção do modelo LPV inicial.** *De posse da forma aumentada, a seguinte formulação é aplicada para eliminação das variáveis algébricas:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x &= A(\theta)x + B(\theta)u \\ y &= C(\theta)x + D(\theta)u \\ A(\theta) &= J_1(\theta_{ini}) - J_2(\theta_{ini})J_4(\theta_{ini})^{-1}J_3(\theta_{ini}) \\ B(\theta) &= B_x - J_2(\theta_{ini})J_4(\theta_{ini})^{-1}B_r \\ C(\theta) &= C_x - C_rJ_4(\theta_{ini})^{-1}J_3(\theta_{ini}) \\ D(\theta) &= -C_rJ_4(\theta_{ini})^{-1}B_r \end{aligned} \tag{3.42}$$

com  $J_4(\theta)$  inversível e  $\theta$  sendo o vetor de parâmetros intermediários.

**Etapa 2: Dedução da estrutura LPV/LFT inicial e validação.** *Após deduzir uma realização LFT ou  $M - \Delta(\theta)$ , a validação pode ser feita calculando-se, para um número de pontos suficientemente grande da gama de variação de  $\Delta(\theta)$ , o modelo  $M - \Delta(\theta)$ ,  $G_\Delta(s, \theta) = \mathcal{F}_u(G(s), \Delta(\theta))$ , e comparando-o com o modelo LPV da etapa anterior,  $G_0(s)$ , produzido numericamente via Matlab, conforme abaixo:*

$$\bar{\sigma}_m(\theta) := \sup_{\omega \in \mathbf{R}} \{\bar{\sigma}[G_\Delta(j\omega) - G_0(j\omega)]\},$$

que equivale, no domínio de estabilidade, à norma  $H_\infty$  da diferença dos modelos,  $\|G_\Delta(s) - G_0(s)\|_\infty$ , para valores fixos de  $\theta$ .

**Etapa 3: Eliminação de parâmetros intermediários.** *Inicialmente os valores de cada parâmetro são calculados pelo fluxo de carga, para uma determinada faixa normalizada de  $P$  e, se for o caso de  $\delta b_{23}$ . Em seguida se procede a ajustes (bi)quadráticos. O método dos mínimos quadrados é empregado para o cálculo dos termos polinomiais. Uma vez obtidos os termos polinomiais, aplica-se a formulação desenvolvida para a obtenção de uma nova realização LFT de ordem maior, porém com relação direta ao parâmetro medido  $P$  e, se for o caso, em relação à incerteza  $\delta b_{23}$ .*



**Etapa 4: Redução de ordem da nova forma LPV/LFT e validação.** *Os modelos LPV/LFT oriundos da etapa anterior apresentam seus blocos paramétricos,  $\Delta(\theta)$ , com ordens geralmente incompatíveis para o processo de síntese LPV, justificando esta nova etapa que, ao adaptar os métodos de decomposição de Kalman e SVD, reduz as formas LPV/LFT por intermédio da eliminação de subespaços não-controláveis e não-observáveis. O algoritmo computacional de decomposição de Kalman pode gerar mal-condicionamento para modelos de ordem elevada. Assim, a opção é aplicar o algoritmo com o método de redução SVD, seguido do método de decomposição de Kalman. São considerados "zeros" os valores singulares de magnitude menor que  $10^{-5}$ . Após a obtenção da estrutura  $M - \Delta(P)$  ou  $M - \Delta(P, \delta b_{23})$  reduzida, a validação pode ser feita de forma análoga à da segunda etapa, comparando-o com o modelo LPV da primeira etapa,  $G_0(s)$ .*

**Nota 3.4** *Os algoritmos apresentados dizem respeito ao caso particular do modelo de SEP escolhido onde existem somente um parâmetro medido e uma incerteza, porém são válidos analogamente para quaisquer quantidade de parâmetros.*

No próximo capítulo a metodologia descrita acima é ilustrada numericamente.

## 4 OBTENÇÃO DOS MODELOS LPV/LFT REDUZIDOS

Neste capítulo, são mostrados os resultados da aplicação das duas últimas etapas da metodologia descrita no Algoritmo 3.3 nas três variantes do modelo do SEP apresentadas no Capítulo 3. Busca-se sobretudo eliminar informações redundantes e reduzir as ordens dos blocos paramétricos obtidos, conforme a metodologia apresentada nas Seções 3.4, 3.5. É importante notar que a execução das duas primeiras etapas do Algoritmo 3.3, referentes à modelagem LPV do SEP e à obtenção do modelo LPV/LFT inicial, estão apresentadas inteiramente no Capítulo 3, ao longo das Seções 3.1, 3.2 e 3.3.

### 4.1 ESTRUTURA LFT REDUZIDA PARA SÍNTESES COM CRITÉRIO DO TIPO $H_2$

As Subseções 3.2.1 e 3.3.1 cumprem as duas primeiras etapas previstas pelo método proposto para este caso. Para uma melhor visualização da perda de precisão na etapa de eliminação dos parâmetros intermediários, a FIG. 4.1 reproduz os resultados mostrados na FIG. 3.2 para uma faixa de potências escolhida como de interesse para a síntese ( $180 \text{ MW} \leq P \leq 320 \text{ MW}$ ). Esses resultados são relativos à validação (Etapa 2 do Algoritmo 3.3) do modelo fechado  $M - \Delta$  da EQ. 3.22 em relação ao modelo LPV mais preciso da EQ. 3.14.

Na Etapa 3, para os ajustes quadráticos visualizados pela FIG. 4.2, foi utilizada a potência base de 300 MW para a faixa de interesse. De posse dos coeficientes polinomiais da função quadrática ajustada, constantes da TAB. 4.1, aplicou-se a formulação desenvolvida na Subseção 3.4.1, obtendo-se uma estrutura LFT com  $\Delta(P) = \text{diag}(PI_{2,12}) = \text{diag}(PI_{24})$ .

TAB. 4.1: Coeficientes dos ajustes quadráticos (para síntese  $H_2$ ).

	$i_d$	$i_q$	$v_d$	$v_q$
$a_0$	0.3920	0.2105	0.5473	0.8309
$a_1$	-0.5023	0.3469	0.9019	-0.9439
$a_2$	1.1851	-0.2667	-0.6935	0.7668

A quarta etapa é realizada aplicando-se os algoritmos de redução de ordem da estrutura LFT, SVD e de decomposição de Kalman, vistos na Seção 3.5. O resultado é uma

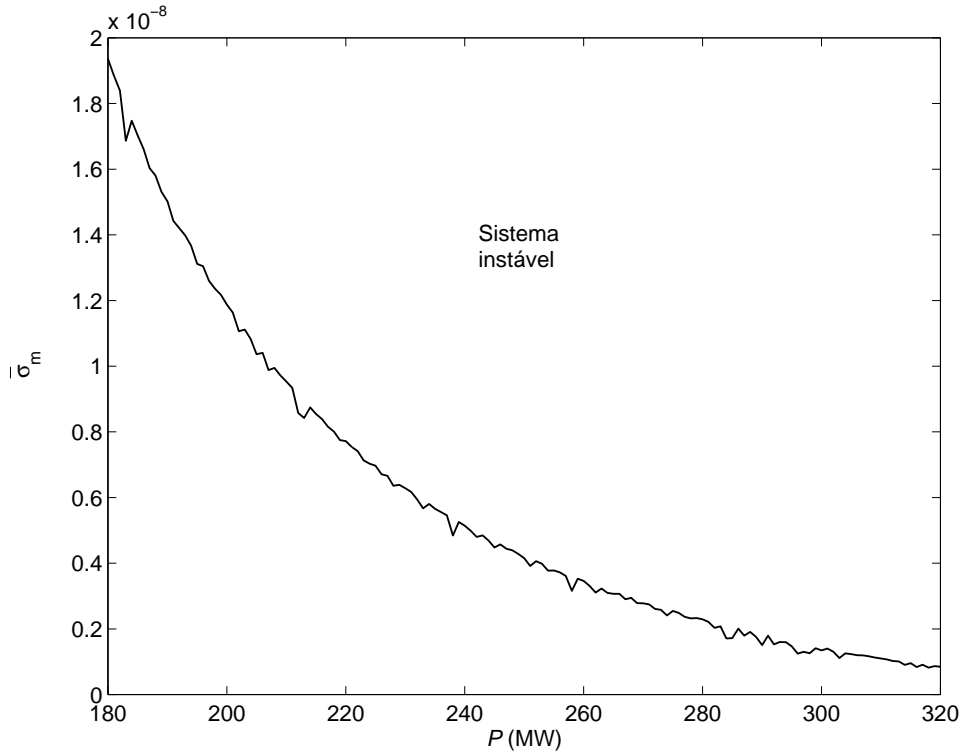


FIG. 4.1: Validação do modelo LFT da EQ. 3.22.

nova estrutura LFT com  $\Delta(P) = \text{diag}(PI_6)$ , ou seja, de ordem muito menor do que a inicial (24). A FIG. 4.3 ilustra a validação deste modelo reduzido, conforme o critério já abordado na Seção 3.3. Nota-se que, devido aos erros de ajustes na eliminação dos parâmetros intermediários, houve uma certa perda de informação.

#### 4.2 ESTRUTURA LFT REDUZIDA PARA SÍNTESES COM CRITÉRIO DO TIPO $H_2/H_\infty$ -(CASO 1)

As Subseções 3.2.2 e 3.3.2 cumprem as duas primeiras etapas previstas pelo método proposto para este caso. A FIG. 4.4 reproduz os resultados mostrados na FIG. 3.3 para uma faixa de interesse escolhida,  $180 \text{ MW} \leq P \leq 280 \text{ MW}$  e  $-0.5 \leq \delta b_{23} \leq 1$ . Este resultado valida o modelo LFT da EQ. 3.24 em relação ao modelo LPV mais preciso da EQ. 3.16.

Na Etapa 3, para os ajustes (bi)quadráticos visualizados pelas figuras FIG. 4.5, FIG. 4.6, FIG. 4.7, FIG. 4.8 e FIG. 4.9, foi utilizada a potência base de 300MW para a faixa escolhida dos parâmetros. De posse dos coeficientes polinomiais das funções (bi)quadráticas ajustadas, constantes da TAB. 4.2, aplicou-se a formulação desenvolvida

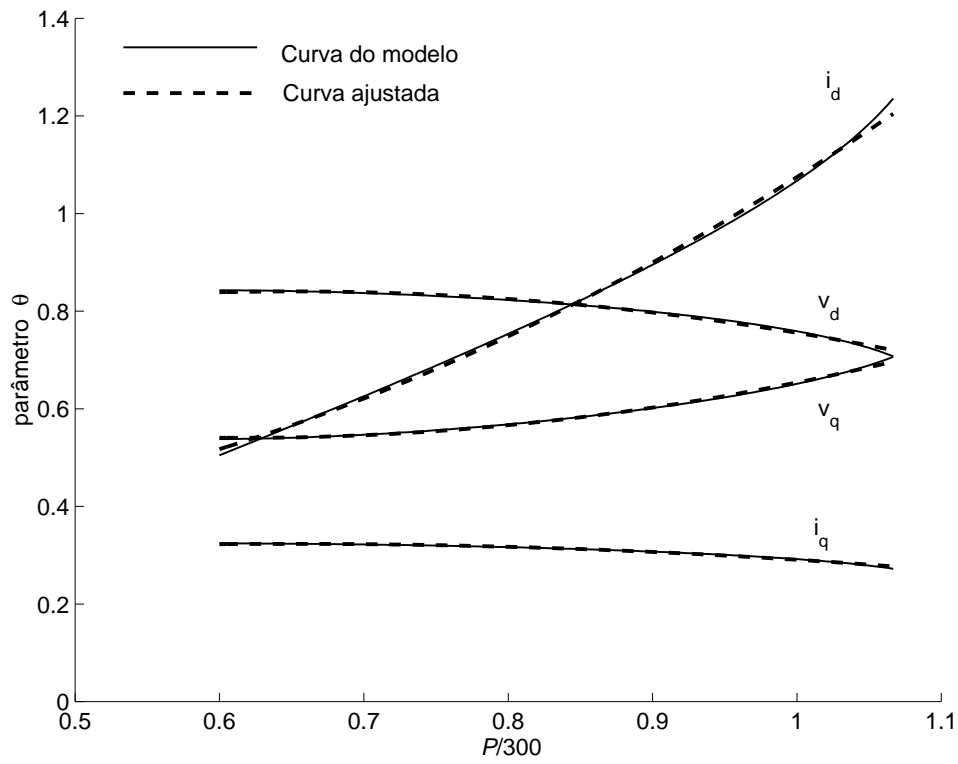


FIG. 4.2: Ajustes dos parâmetros.

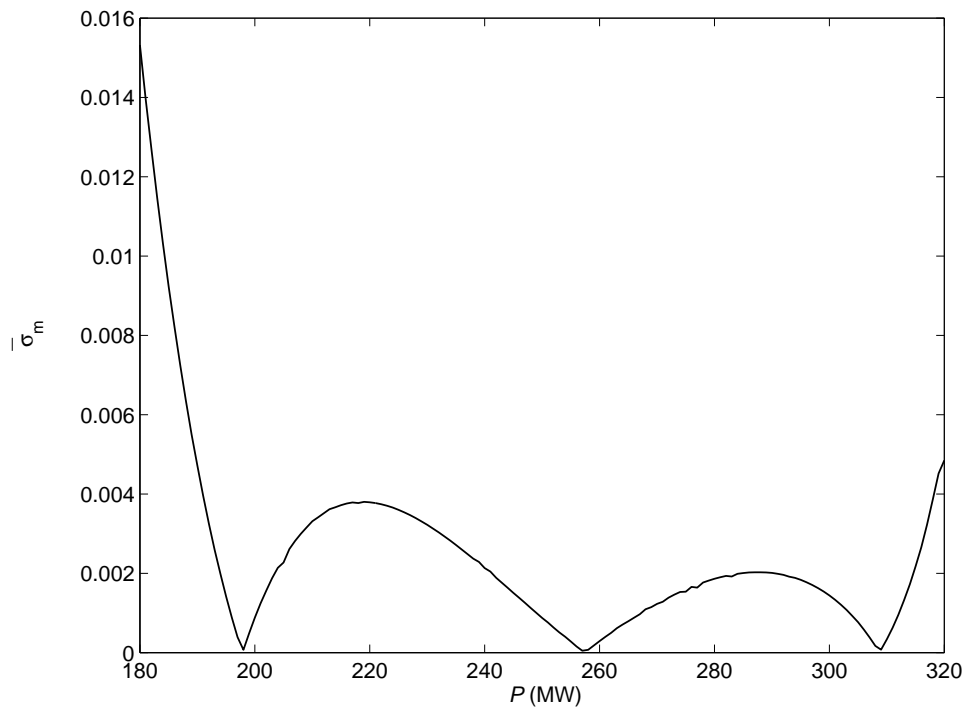


FIG. 4.3: Validação LFT reduzida x LPV (para síntese  $H_2$ ).

na Subseção 3.4.2, obtendo-se uma estrutura LFT com

$$\Delta(P, \delta b_{23}) = \text{diag}(PI_{2.18}, \delta b_{23}I_{(3.18+2.10)}) = \text{diag}(PI_{36}, \delta b_{23}I_{74}).$$

A etapa de redução de ordem resulta numa nova estrutura LFT com  $\Delta(P, \delta b_{23}) =$

TAB. 4.2: Coeficientes dos ajustes (bi)quadráticos (caso 1).

	$i_d$	$i_q$	$v_d$	$v_q$	$\delta b_{23}$	$\delta \beta_{23}$
$a_0$	0.0288	0.2630	0.6838	0.7289	-	-
$a_1$	0.4236	0.2188	0.5688	-0.7045	-	-
$a_{11}$	0.6077	-0.1912	-0.4971	0.6334	-	-
$a_2$	-0.1095	0.0411	0.1069	-0.1363	-	-
$a_{12}$	0.1806	-0.0719	-0.1868	0.2417	-	-
$a_{22}$	0.0208	-0.0095	-0.0247	0.0320	-	-
$a_{0\delta}$	-	-	-	-	0	-0.00001768474426
$a_{1\delta}$	-	-	-	-	1	-0.00000604892586
$a_{\delta\delta}$	-	-	-	-	0	-0.00000164241998

$\text{diag}(PI_7, \delta b_{23}I_{10})$ . A FIG. 4.10 ilustra a validação do modelo fechado  $M - \Delta$  de ordem reduzida em relação ao modelo LPV (primeira etapa), conforme o critério já abordado na Seção 3.3. Note que, devido aos ajustes, houve uma pequena perda de informação.

#### 4.3 ESTRUTURA LFT REDUZIDA PARA SÍNTESES COM CRITÉRIO DO TIPO $H_2/H_\infty$ -(CASO 2)

As Subseções 3.2.3 e 3.3.3 cumprem as duas primeiras etapas previstas pelo método proposto para este caso. A FIG. 4.11 reproduz os resultados mostrados na FIG. 3.4 para uma faixa paramétrica de interesse escolhida,  $180 \text{ MW} \leq P \leq 320 \text{ MW}$ . Este resultado valida o modelo LFT da EQ. 3.26 em relação ao modelo LPV mais preciso da EQ. 3.20.

Na Etapa 3, para os ajustes (bi)quadráticos visualizados pela figura FIG. 4.12, foi utilizada a potência base de 300MW para a faixa escolhida de  $P$ . De posse dos coeficientes polinomiais das funções quadráticas ajustadas, constantes da TAB. 4.3, aplicou-se a formulação desenvolvida na Subseção 3.4.1, obtendo-se uma estrutura LFT com  $\Delta(P) = \text{diag}(PI_{2.26}) = \text{diag}(PI_{52})$ .

A etapa de redução de ordem resulta numa nova estrutura LFT com  $\Delta(P) = \text{diag}(PI_{14})$ . A FIG. 4.13 ilustra a validação do modelo fechado  $M - \Delta$  de ordem reduzida em relação ao modelo LPV (primeira etapa), conforme o critério já abordado na Seção 3.3. Note que, devido aos ajustes, aqui também houve uma pequena perda de informação.

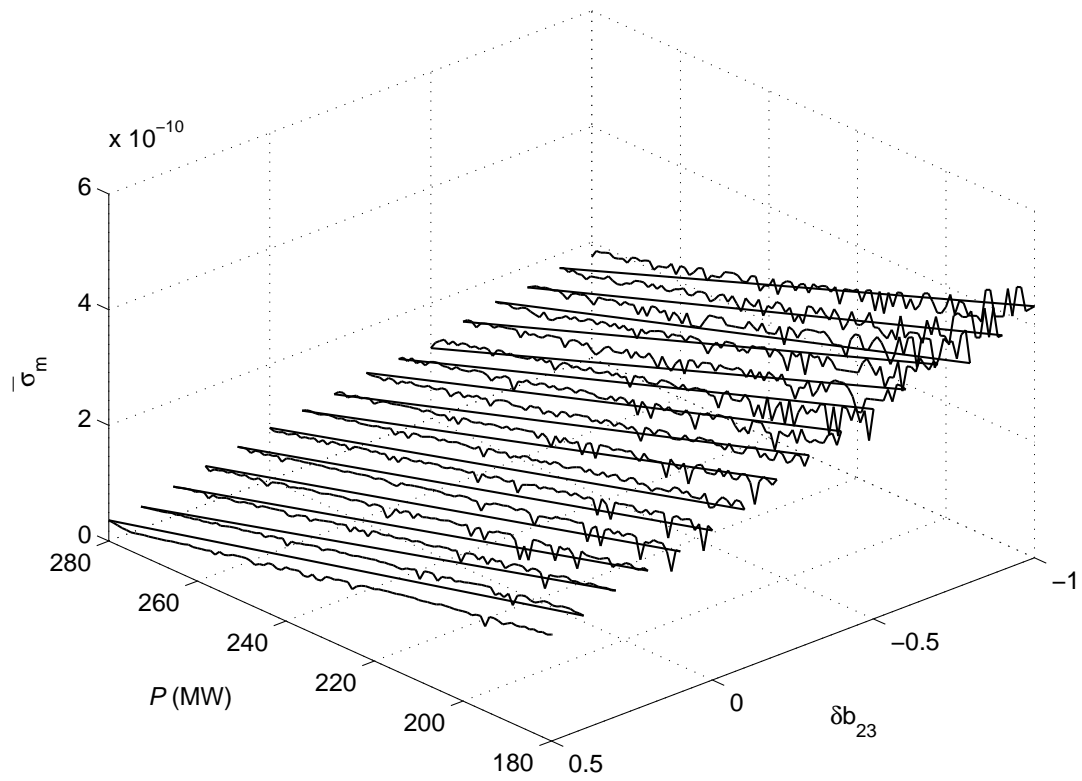


FIG. 4.4: Validação LFT inicial x LPV (caso 1).

TAB. 4.3: Coeficientes dos ajustes quadráticos (caso 2).

	$i_d$	$i_q$	$v_d$	$v_q$	$\cos \delta_0$	$\sin \delta_0$
$a_0$	0.3919	0.2104	0.5472	0.8308	0.3331	0.6491
$a_1$	-0.5022	0.3468	0.9019	-0.9438	-0.3262	1.0697
$a_2$	1.1850	-0.2667	-0.6934	0.7668	-0.4472	-0.8225

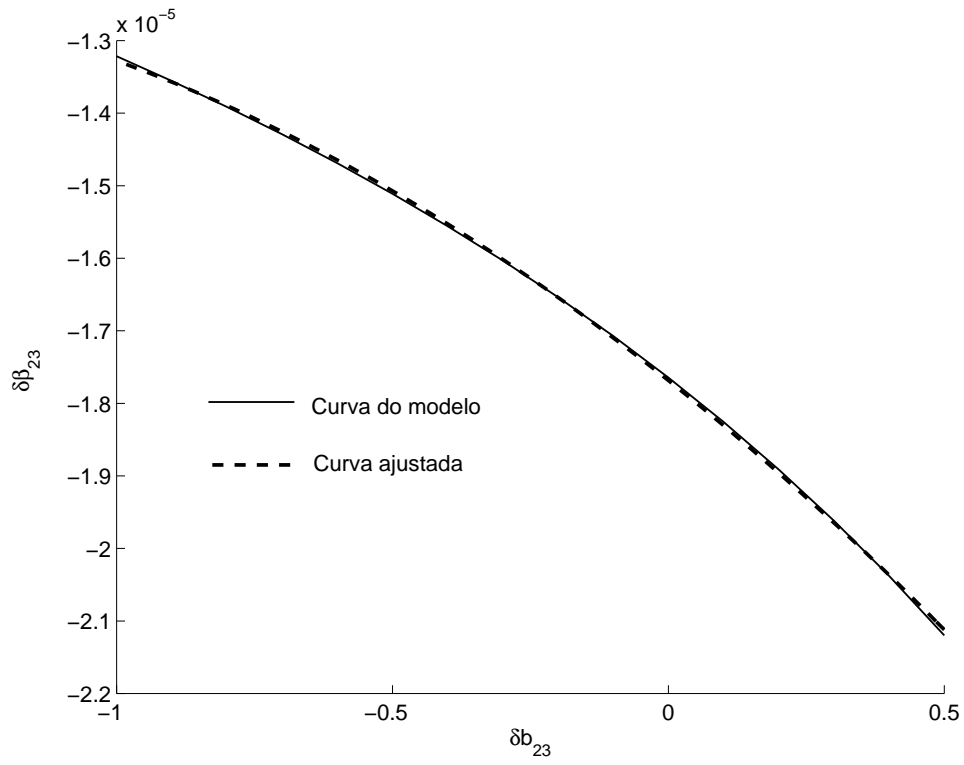


FIG. 4.5: Ajuste do parâmetro  $\delta\beta_{23}$ .

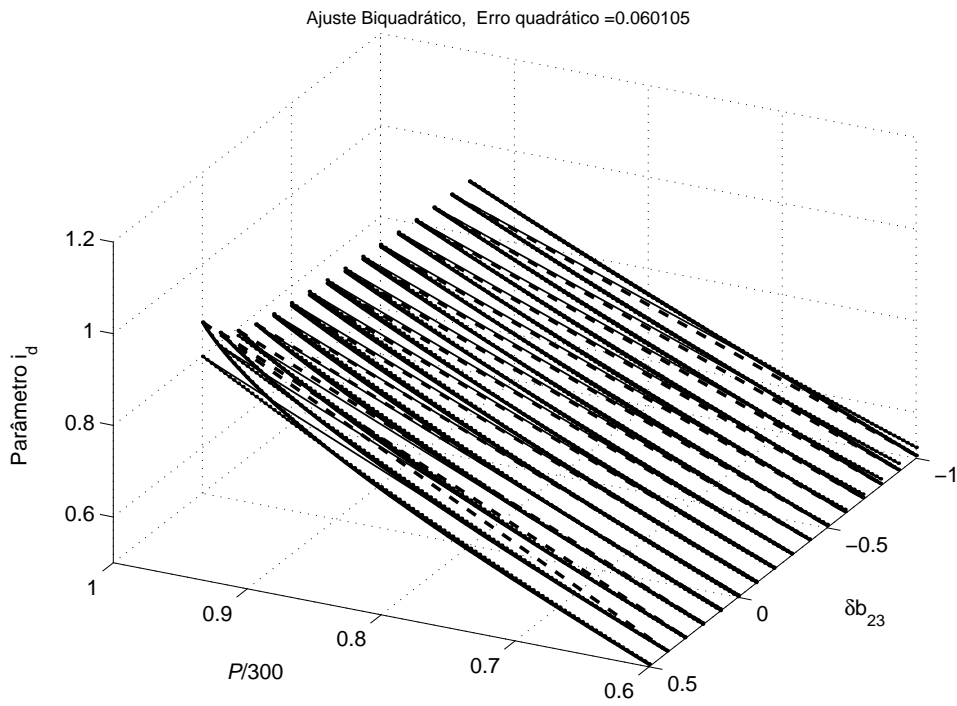


FIG. 4.6: Ajuste do parâmetro  $i_d$ .

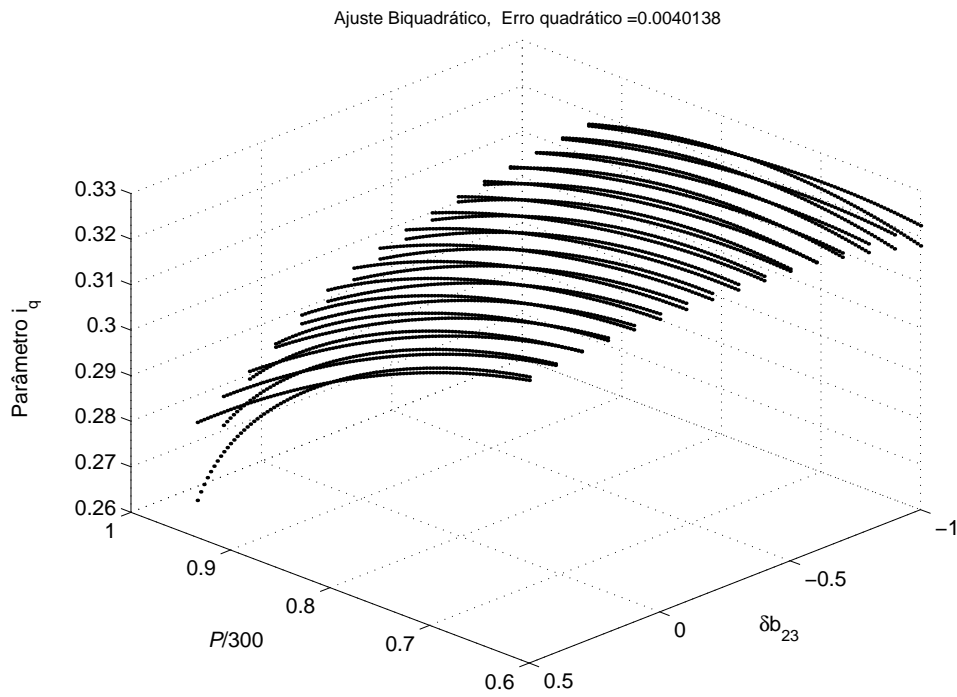


FIG. 4.7: Ajuste do parâmetro  $i_q$ .

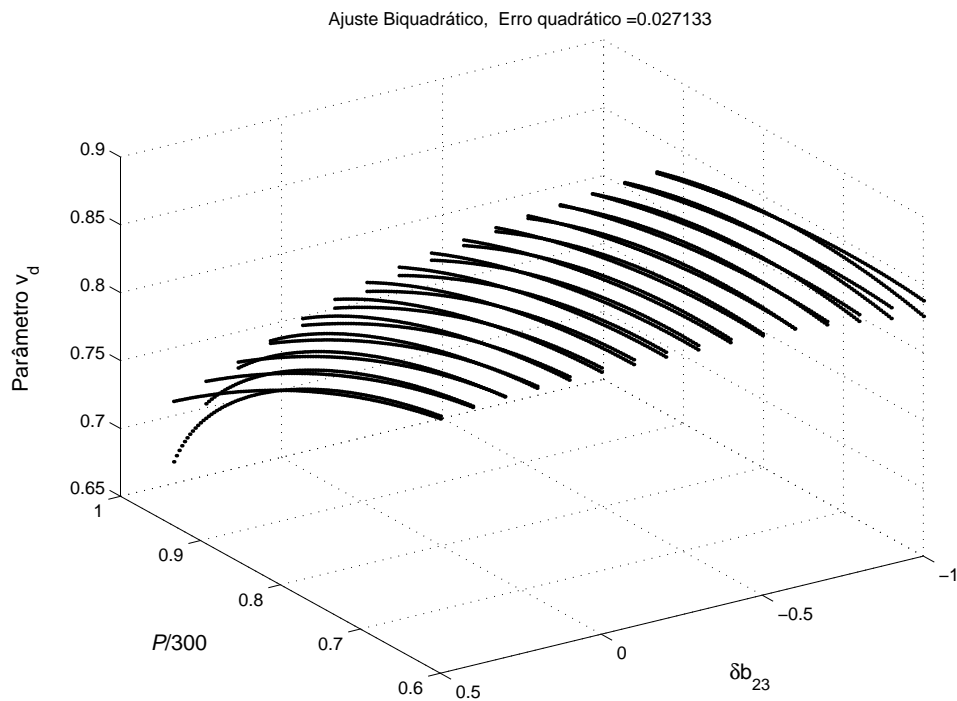


FIG. 4.8: Ajuste do parâmetro  $v_d$ .



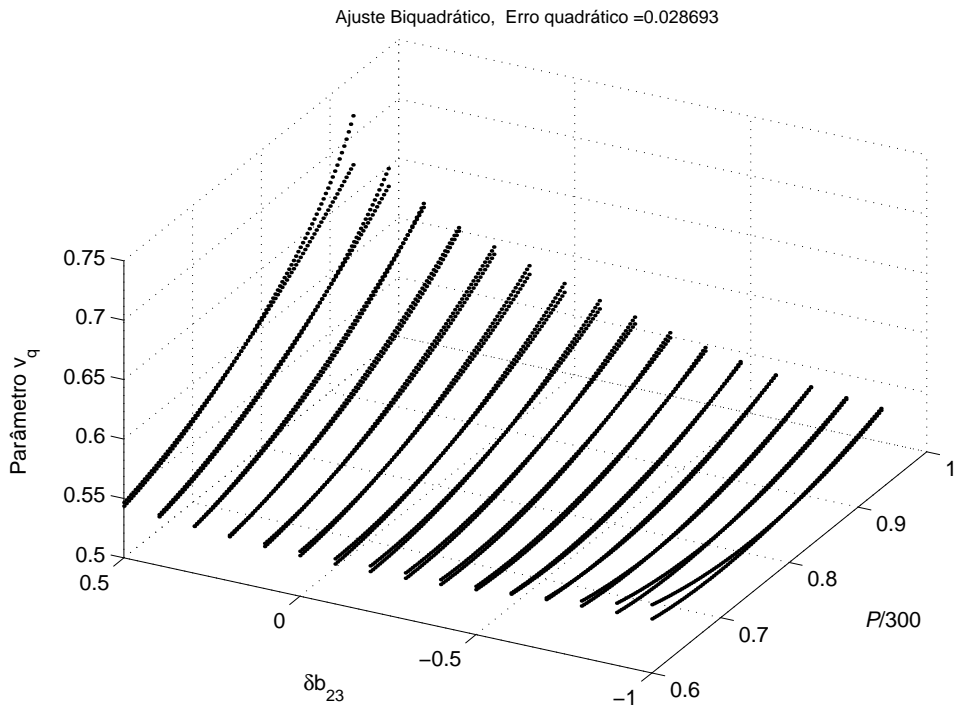


FIG. 4.9: Ajuste do parâmetro  $v_q$ .

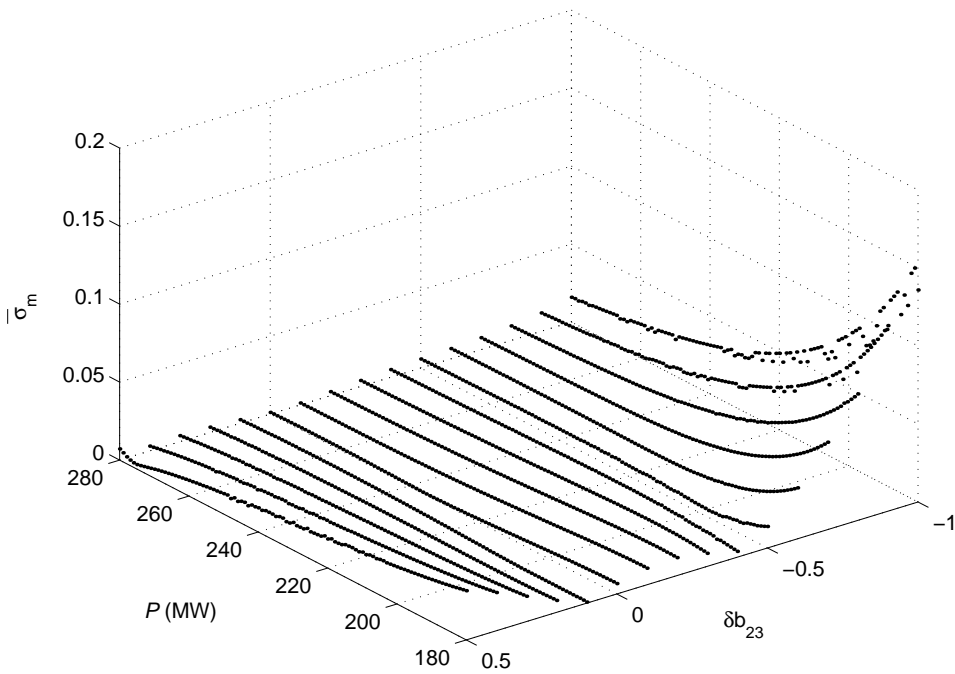


FIG. 4.10: Validação LFT reduzida x LPV (caso 1).

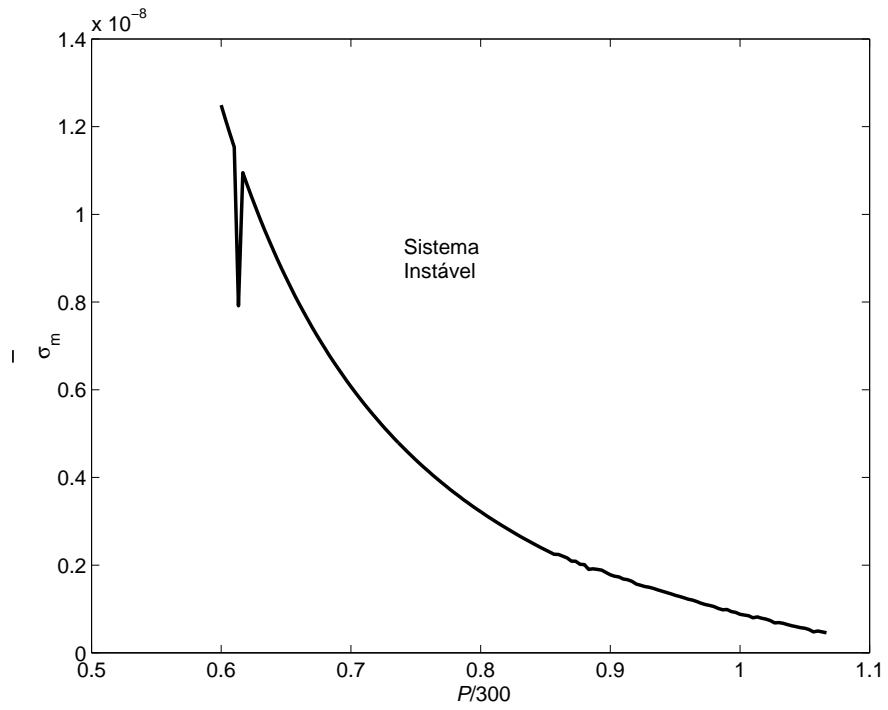


FIG. 4.11: Validação LFT inicial x LPV (caso 2).

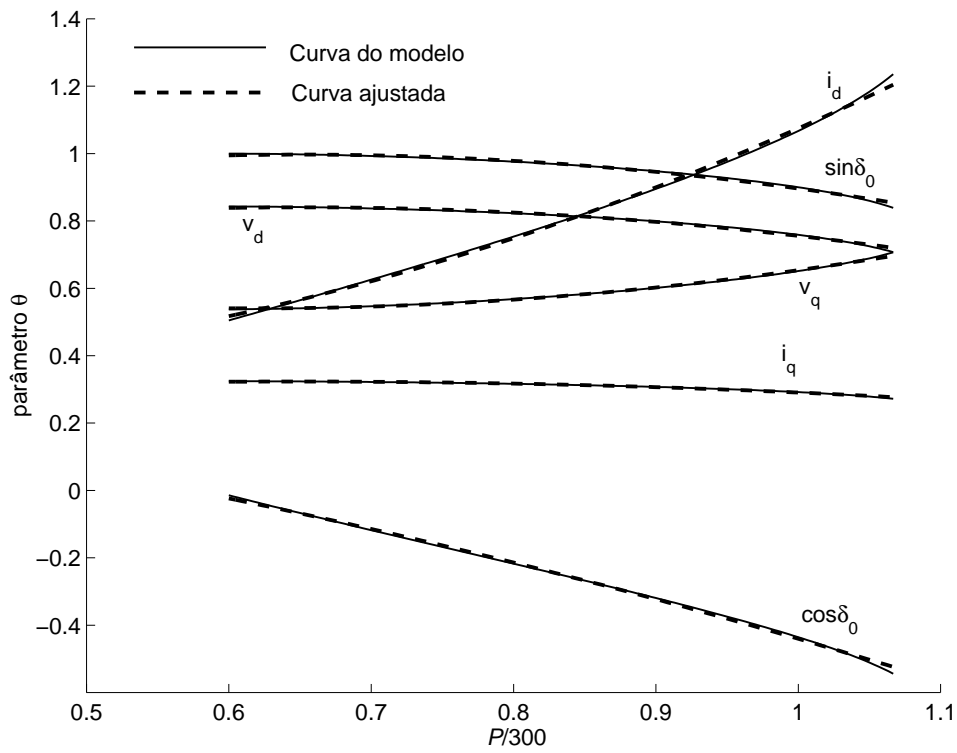


FIG. 4.12: Ajustes dos parâmetros.

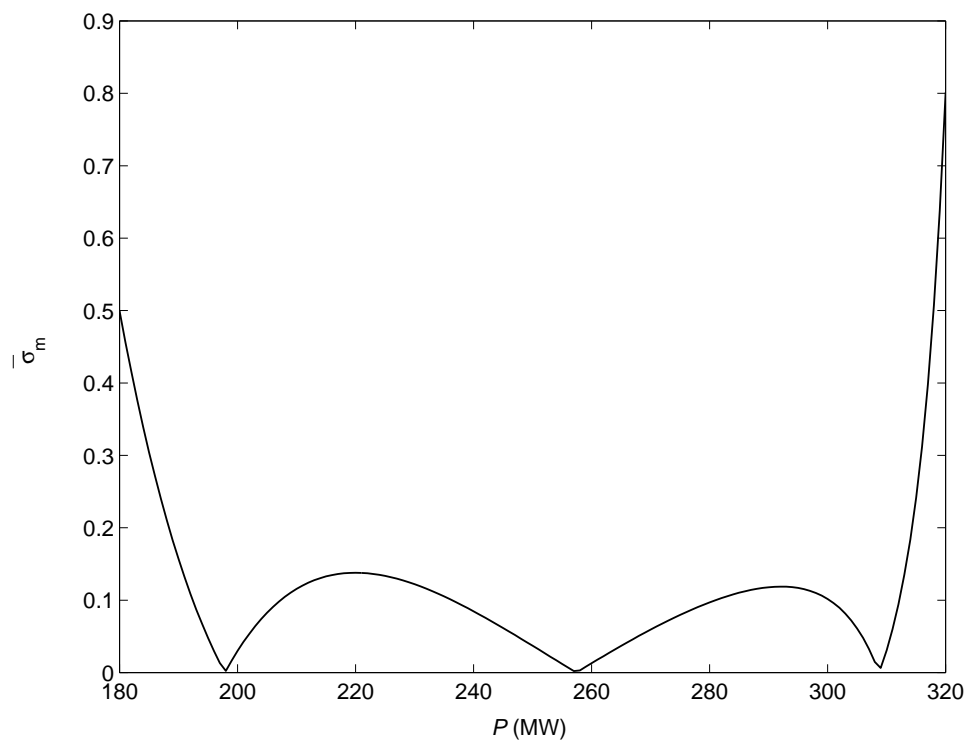


FIG. 4.13: Validação LFT reduzida x LPV (caso 2).

## 5 RESULTADOS NUMÉRICOS DE SÍNTESE LPV

Neste capítulo, a técnica LPV apresentada na Seção 2.3 é aplicada a um dos modelos de síntese LPV/LFT produzidos pelo método proposto no Capítulo 3. O objetivo é mostrar, através do projeto de um controlador LPV/LFT com critério do tipo  $H_2$ , que as metodologias tratadas neste trabalho são aplicáveis ao problema de estabilidade local de SEP e apresentam algumas vantagens em relação a técnicas clássicas usuais e a técnicas modernas de controle robusto já aplicadas ao problema.

Assim, foi sintetizado um controlador da forma especificada na EQ. 2.14, utilizando o modelo de síntese LPV/LFT obtido na Seção 4.1. Este modelo considerou o canal de desempenho  $H_2$  definido pelas matrizes EQ. 2.20 e EQ. 2.21, onde foram adotados os valores  $R_0 = I_n$ ,  $R_1 = 0$  e  $\mathcal{H} = I_n$ . A matriz  $A_d$  foi escolhida por alocação de pólos (fórmula de Ackermann), a partir da matriz dinâmica de malha aberta do modelo LPV, EQ. 3.14, com  $P = 250$  MW, que é o centro da faixa escolhida, de forma que a taxa de amortecimento de seus autovalores não fosse menor que 0,15. Ou seja  $A_d = A(250/300) - BK_C$ , onde  $K_C$  foi calculado de forma que:

$$\lambda(A_d) = [-0.33, -38.2, -13.06, -0.68 \pm 4.5j, -0.21 \pm 1.39j]^T.$$

Além disso, foi considerada a planta de síntese em série com um filtro passa alta (*washout*) idêntico ao utilizado em (MARTINS, 1990),

$$\omega_f(s) = \frac{3s}{3s + 1} \Delta\omega,$$

e realimentado o sinal  $\omega_f(s)$ . Os dados numéricos do controlador (estável) sintetizado pelo uso do Algoritmo 2.5, com o canal  $H_2$  descrito acima, são mostrados na página seguinte. Nota-se que a matriz  $A_K$  é da mesma ordem do modelo de síntese.

$$A_K = \begin{bmatrix} -37.753 & 6.4386 & -1.4325 & -0.3174 & 8.1916 & 0.0347 & 0.0297 \\ -9.5356 & -7.9956 & 0.4626 & 4.2394 & -17.026 & 1.0567 & -0.0270 \\ 4.4037 & 7.2129 & -2.1626 & -2.5250 & 8.0635 & -0.6165 & 0.0097 \\ -1.9937 & -4.6716 & 2.8255 & -1.4182 & -1.5738 & -1.6131 & -0.0042 \\ 9.0975 & 18.810 & -10.701 & 13.930 & -52.210 & 8.0702 & -0.3144 \\ 0.9113 & 1.5406 & -0.8688 & 1.6404 & -13.396 & -1.3674 & -0.0292 \\ 0.0338 & 0.0595 & -0.0339 & 0.0480 & -0.3848 & -0.1015 & -0.9931 \end{bmatrix},$$

$$B_K = \begin{bmatrix} -33263 & -1.4544e-8 & -4.5282e-9 & -1.5906e-5 & -2.6901e-6 & 0.00068 & -0.00095 \\ -4006.4 & 1.7767e-9 & -6.970e-10 & 7.5347e-5 & 1.115e-5 & 0.00023 & 8.7518e-5 \\ 1903.8 & -1.7587e-9 & 1.7486e-9 & -2.5171e-5 & 2.9217e-6 & 4.7007e-5 & -0.00017 \\ -880.9 & 1.0221e-9 & -9.5625e-9 & 4.0126e-6 & -2.8292e-5 & -0.00045 & -0.00035 \\ 4046.3 & 6.6457e-9 & -4.2717e-9 & 0.000113 & -1.8216e-6 & -0.000156 & 1.2921e-5 \\ 401.52 & 2.0321e-9 & 6.6528e-10 & 7.3553e-5 & 4.5505e-6 & 2.3039e-5 & -0.00050 \\ 14.923 & 3.1077e-9 & -9.2405e-9 & -1.1095e-5 & -1.1913e-5 & -0.00027 & 5.0181e-5 \end{bmatrix},$$

$$C_K = \begin{bmatrix} 0.6565 & 0.0716 & -0.0354 & -0.0399 & 0.0201 & 0.0034 & -0.0003 \\ 0.0487 & 0.0297 & -0.0103 & -0.0112 & 0.0050 & -0.0050 & 3.9e-5 \\ 0.3214 & -0.5097 & 0.1553 & 0.1937 & -0.2054 & 0.0727 & -0.0002 \\ 7456.4 & -238.39 & -523.75 & 168.39 & -278.25 & 50.019 & 2.4311 \\ -29924 & 3475.8 & -1261.2 & -415.26 & 4033.5 & -110.71 & 12.443 \\ 11023 & 1007.4 & -1166.6 & -445.79 & 149.27 & -220.1 & -3.7879 \\ -5820 & -1702.4 & 631.46 & 613.56 & 56.619 & 313.08 & 6.8989 \end{bmatrix},$$

$$D_K = \begin{bmatrix} 559.85 & 0.0073 & -0.0185 & -1.1e-5 & -9.8e-7 & -1.6e-5 & 1.4e-5 \\ 40.853 & 0.0979 & 0.0678 & 1.4e-6 & -1.0e-6 & -1.1e-6 & -1.2e-6 \\ 231.6 & -0.1134 & -0.0785 & 8.2e-5 & 1.6e-6 & 3.6e-5 & 3.3e-5 \\ 6.39e+6 & 1.0e-5 & -5.8e-6 & 0.2228 & 0.0630 & 0.3458 & 0.3969 \\ -2.44e+7 & 1.1e-5 & 4.3e-5 & -0.4289 & -0.2066 & 1.6984 & -0.4764 \\ 9.66e+6 & -7.3e-6 & -4.2e-6 & 0.0027 & -0.0141 & 0.7580 & 0.0722 \\ -4.74e+6 & 7.1e-6 & 2.3e-6 & 0.0614 & 0.0347 & -0.4578 & 0.0692 \end{bmatrix},$$

com

$$\Delta_K(\Delta) = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \Phi_i,$$

onde

$$\Phi_1 = -\Phi_2 = \begin{bmatrix} -0.5875 & -0.0135 & 1.2e-6 & -3.4e-7 & -8.2e-7 & 5.7e-8 \\ 0.0104 & -0.7039 & -1.8e-6 & 4.5e-6 & 5.1e-6 & 1.2e-5 \\ 1.5e-5 & 8.7e-5 & 0.9128 & 0.1527 & -0.0009 & 0.0824 \\ -1.2e-5 & -0.0003 & -0.0360 & -0.9528 & -0.0531 & -0.7819 \\ -4.8e-7 & 5.3e-5 & -0.0175 & 0.0221 & -0.9028 & -0.0084 \\ -3.1e-6 & -4.5e-5 & 0.0300 & -0.0342 & -0.2912 & -1.2777 \end{bmatrix}$$

e  $\alpha_1, \alpha_2$  são calculados em tempo real pelo Algoritmo 2.3.

A FIG. 5.1 mostra a excursão dos pólos do sistemas de malha fechada para uma faixa de potência  $180 \text{ MW} \leq P \leq 320 \text{ MW}$ . Nota-se que todos os autovalores do sistema cumprem as especificação de desempenho em relação à taxa de amortecimento  $\xi \geq 0,15$ .

As FIG. 5.2 e 5.4 mostram as respostas em malha fechada a pequenas perturbações em  $\Delta V_{ref}$  (pulso de amplitude 0,01 pu e duração de 0,1 s) para o controlador LPV projetado, em três pontos de operação. Cabe ressaltar que o controlador adapta-se de acordo com a variação da potência nominal considerada medida e que o modelo do SEP utilizado nas simulações é o original da EQ. 3.14. As FIG. 5.3 e 5.5 mostram as respostas para as mesmas perturbações quando utiliza-se o controlador fixo  $P_{ss1}(s)$  de (MARTINS, 1990), o qual foi projetado via métodos clássicos de controle, considerando ainda um compensador estático de reativo adicional instalado na barra 2. Verifica-se que o controlador LPV mantém um desempenho temporal aceitável para uma faixa consideravelmente maior do que o clássico. Com este, o sistema de malha fechada torna-se instável em  $P \cong 301 \text{ MW}$ , enquanto que com o LPV o sistema mantém não só a estabilidade, como também o desempenho temporal prescrito, para toda a faixa contínua de operação considerada.

Finalmente, observa-se que perda de informação, devido ao erro de ajuste na eliminação dos parâmetros intermediários, do modelo de síntese não afetou o desempenho, em malha fechada, do controlador LPV, quando testado com o modelo original. Ressalta-se, ainda, que as liberdades adicionais do PADI,  $R_0$  e  $R_1$ , podem ser utilizadas para balancear o esforço de controle com o grau de desempenho esperado, evitando saturações do atuador. Estes resultados estão também relatados em (ASSIS, 2002).

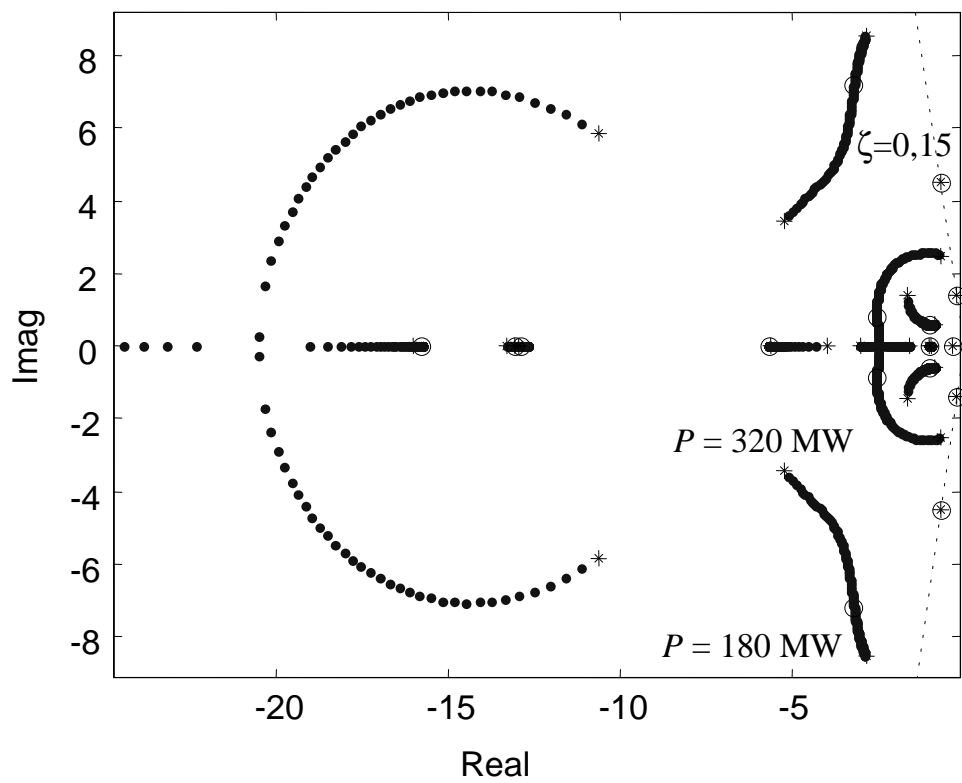


FIG. 5.1: Avaliação do sistema em malha fechada.

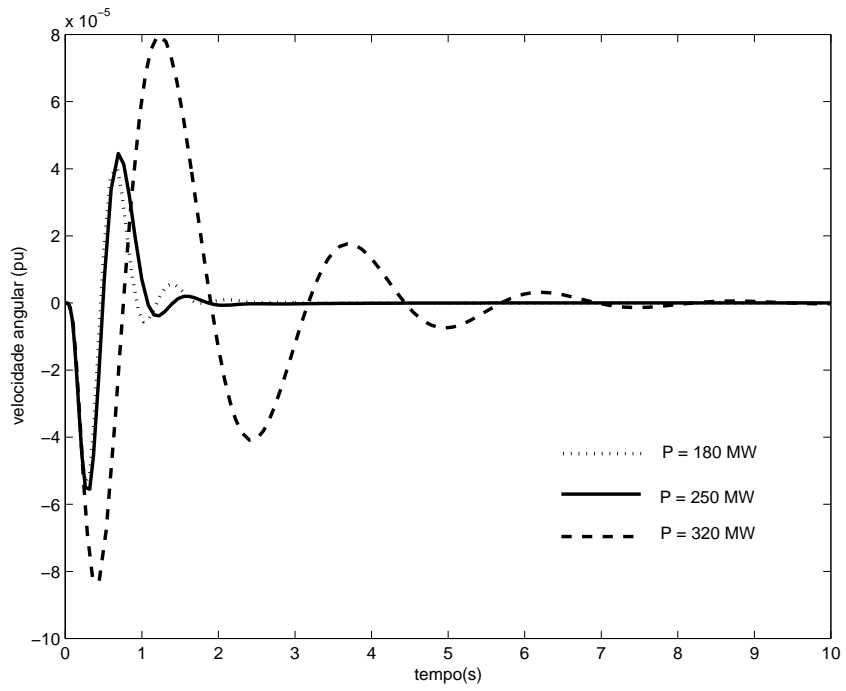


FIG. 5.2: Desempenho do controlador LPV.

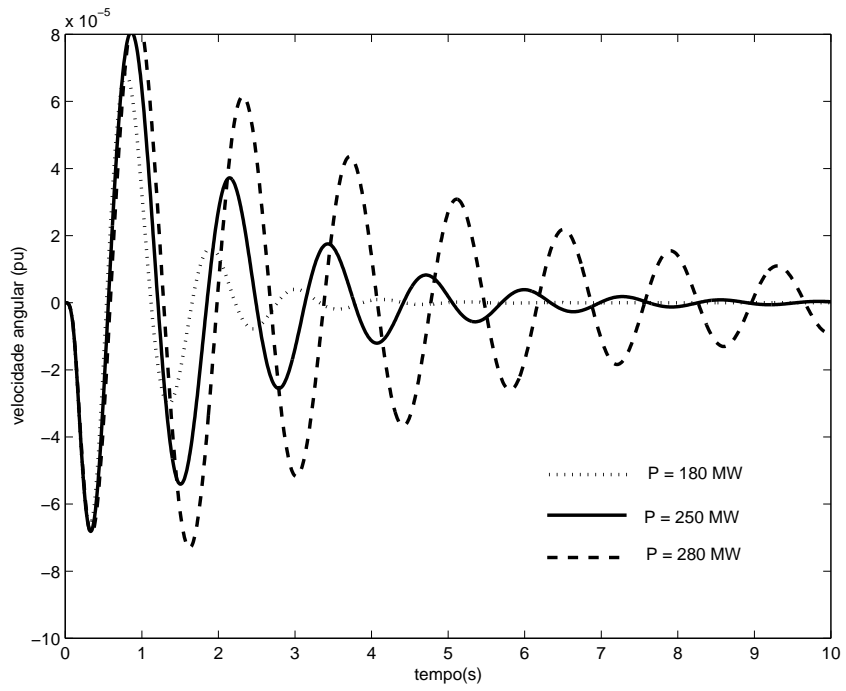


FIG. 5.3: Desempenho do controlador clássico.



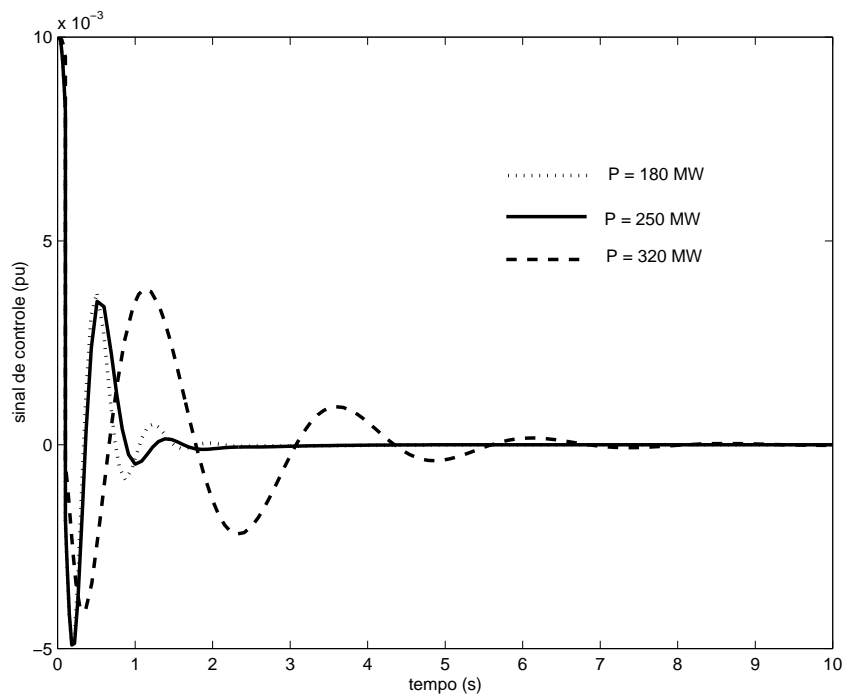


FIG. 5.4: Esforço do controlador LPV.

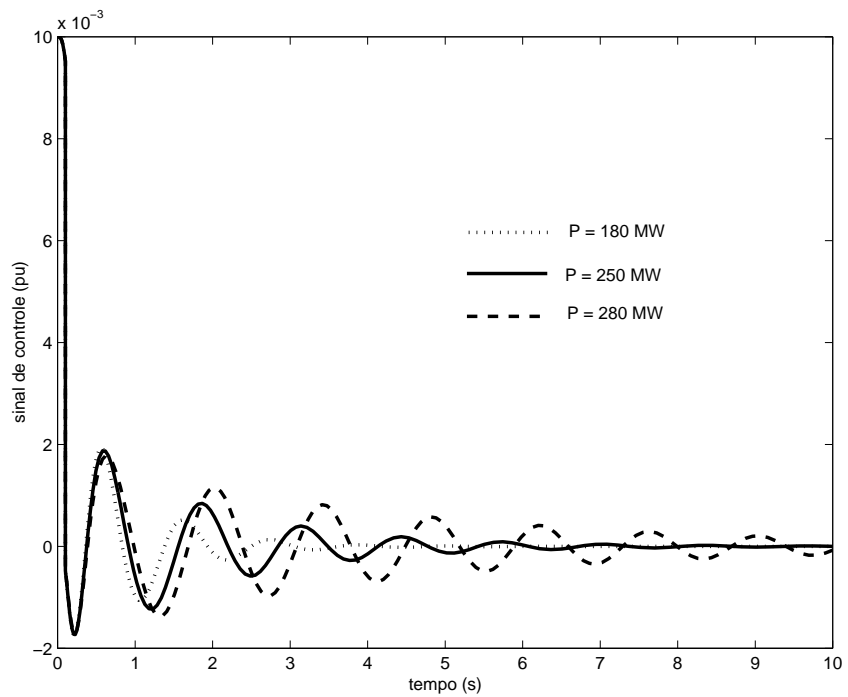


FIG. 5.5: Esforço do controlador clássico.

## 6 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho foi desenvolvida uma nova metodologia de modelagem de sistemas de potência do tipo máquina-barras infinita, para a síntese de controladores LPV/LFT. As conclusões, observações e sugestões de trabalhos futuros, expostos a seguir, baseiam-se nos resultados apresentados neste manuscrito e na experiência adquirida durante os desenvolvimentos analítico e computacional (v. Apêndices 8.3 e 8.4) requeridos nesta dissertação.

### 6.1 CONCLUSÕES

- Constatou-se que, escolhendo como parâmetros nominais as variáveis  $i_d, i_q, v_d, v_q, \sin \delta_0$  e  $\cos \delta_0$ , os modelos LPV e, conseqüentemente as suas representações do tipo LFT, tornam-se bastante simplificados, com a eliminação natural, por vezes, dos parâmetros  $\sin \delta_0$  e  $\cos \delta_0$ .
- O ajuste polinomial *a posteriori* facilita a dedução literal do modelo LFT inicial.
- As formulações desenvolvidas para a eliminação dos parâmetros intermediários aumentam a ordem em relação ao bloco paramétrico  $\Delta$  da nova LFT e a perda de informação, oriunda dos ajustes (bi)quadráticos, podem não ser relevantes, dependendo da largura da faixa paramétrica considerada;
- Verificou-se que o seqüenciamento dos dois métodos de redução de ordem da forma LFT, os métodos SVD e decomposição de Kalman, nesta ordem, pode produzir um melhor efeito na ordem final obtida. Ou seja, pode-se obter um maior grau de redução de ordem do que se alcançaria pelo uso sucessivo de um dos métodos isolados. Para sistemas de ordens elevadas o método de redução de ordem SVD é indicado para evitar problemas de mal-condicionamento, por isso recomenda-se iniciar o processo de redução por ele. Contudo, nenhum dos métodos garante a minimalidade da ordem da forma canônica LFT.
- O modelo LFT para sínteses com critério do tipo  $H_2/H_\infty$  do caso 1 é mais adequado, para a síntese LPV proposta, do que o do caso 2. A diferença entre os dois casos é o compromisso entre a ordem do bloco paramétrico e a ordem do canal  $H_\infty$ . No caso 1,

o modelo de síntese apresenta um bloco paramétrico de ordem 7, com um canal  $H_\infty$  de dimensão 10, o que torna a síntese viável utilizando a ferramenta computacional em (GAHINET, 1994b). Ao contrário, no caso 2, a síntese é inviável, pois o bloco  $\Delta(\theta)$  é de ordem 14 e o canal de incertezas é de ordem 2. A inviabilidade é devida à geração exagerada de variáveis de projeto. O número de variáveis, conforme TAB. 2.1, é sensível à ordem  $N$  do canal paramétrico e imune à ordem dos canal  $H_\infty$  de incertezas.

- Uma característica importante da técnica LPV utilizada é a exigência de que o modelo do sistema tenha uma dependência paramétrica do tipo LFT. Este trabalho mostra que a tarefa de obtenção de uma tal representação, para um sistema onde a dependência em relação ao parâmetro (potência) é fortemente não-linear e depende da solução de algoritmos de fluxo de carga, não é trivial. Essa dificuldade inicial na preparação do modelo é, no entanto, inteiramente compensada pelo fato de a dependência paramétrica do controlador ser também do tipo LFT. A grande vantagem é que esta estrutura de atualização do controlador resulta automaticamente do procedimento computacional de síntese e é facilmente implementável. Outra grande vantagem é a garantia teórica de estabilidade e de desempenho do sistema em malha fechada.
- Os resultados numéricos levam a concluir sobre a viabilidade da aplicação das técnicas LPV/LFT na análise e no controle de sistemas de potência de pequeno porte. Os resultados são comparados, através de simulações, com outros obtidos pelas técnicas usuais e apresentam algumas vantagens significativas: O desempenho temporal preconizado é mantido dentro de limites razoáveis em uma faixa consideravelmente maior de possíveis condições de operação do sistema. Em relação a outras técnicas modernas e similares de controle robusto que já foram aplicadas no mesmo problema e que aparecem na literatura (TARANTO, 1995), a abordagem resulta em controladores de menor ordem e apresenta um menor conservatismo, graças ao caráter não estacionário do controlador e à definição de funções de Lyapunov independentes para cada canal e especificação.

## 6.2 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Embora tenha sido considerado somente um critério de desempenho temporal do tipo  $H_2$ , no projeto do controlador LPV do Capítulo 5, o método proposto permite também considerar canais adicionais do tipo  $H_\infty$  com a inclusão de incertezas ao modelo. Devido à limitação da capacidade de processamento do sintetizador disponível (GAHINET, 1994b) (no máximo 1900 variáveis de projeto geradas durante o processamento) e tendo em vista que o foco principal dessa dissertação é a modelagem, futuros trabalhos podem estudar melhor os resultados da síntese LPV, utilizando multi-critérios do tipo  $H_2/H_\infty$ . Além disso, uma outra perspectiva de pesquisa promissora é o emprego direto do modelo não-linear com a obtenção de um modelo de síntese quasi-LPV.

## 6.3 COMENTÁRIOS FINAIS

Com a contribuição desse trabalho pretendeu-se auxiliar futuras pesquisas em controle de SEP de maior complexidade, sobretudo se for desenvolvido ou obtido um aplicativo que, a partir do modelo LPV gere sistematicamente a forma LPV/LFT inicial, automatizando a metodologia por completo.

## 7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- APKARIAN, P. e ADAMS, R. Advanced Gain-Scheduling Techniques for Uncertain Systems. *IEEE Trans. Contr. Syst. Technology*, 6:21–32, 1998.
- APKARIAN, P. e GAHINET, P. A Convex Characterization of Gain-Scheduled  $H_\infty$  Controllers. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 40(5):853–864 and 1681, 1995.
- APKARIAN, P., PELLANDA, P. C. e TUAN, H. D. Mixed  $H_2/H_\infty$  Multi-Channel Linear Parameter-Varying Control in Discrete Time. *Syst. & Contr. Letters*, 41:333–346, 2000.
- ASSIS, A. P. e PELLANDA, P. C. Controle LPV Aplicado ao Problema de Estabilização de Sistemas Elétricos de Potência. *Artigo submetido*, 2002.
- BECKER, G. Parameter-Dependent Control of an Under-Actuated Mechanical System. *in Proc. IEEE Conf. Decision Contr., New Orleans, LA*, 1995.
- BECKER, G., PACKARD, A., PHILBRICK, D. e BALAS, G. Control of Parametrically-Dependent Linear Systems: A Single Quadratic Lyapunov Approach. *in Proc. Amer. Contr. Conf., San Francisco, CA*, págs. 2795–2799, 1993.
- BOUKARIM, G. E. e CHOW, J. H. Modeling of Nonlinear System Uncertainties Using a Linear Fractional Transformation Approach. *in Proc. Amer. Contr. Conf., Philadelphia, Pennsylvania*, págs. 2973–2979, 1998.
- BOYD, S., GHAOUI, L. E., FERON, E. e BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, volume 15. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.
- ELGERD, O. I. *Introdução à Teoria de Sistemas de Energia Elétrica.*, pág. 274. McGraw-Hill, São Paulo, 1978.
- GAHINET, P. e APKARIAN, P. A Linear Matrix Inequality Approach to  $H_\infty$  Control. *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 4:421–448, 1994a.
- GAHINET, P., NEMIROVSKI, A., LAUB, A. J. e CHILALI, M. *The LMI Control Toolbox for Use with Matlab*. The MathWorks Inc., 1994b.
- HYDE, R. A. e GLOVER, K. The Application of Scheduled  $H_\infty$  Controllers to a VSTOL Aircraft. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 38(7):1021–39, 1993.
- KAJIWARA, H., APKARIAN, P. e GAHINET, P. LPV Techniques for Control of an Inverted Pendulum. *IEEE Control Systems Magazine*, 19:44–54, 1999.
- KAMINER, I., PASCOAL, A. M., KHARGONEKAR, P. P. e COLEMAN, E. E. A Velocity Algorithm for the Implementation of Gain-Scheduled Controllers. *Automatica*, 31(8):1185–1191, 1995.

- KELLET, M. *Continuous Scheduling of  $H_\infty$  Controllers for a MS760 Paris Aircraft*, in *Robust Control Systems Design Using  $H_\infty$  and Related Methods*, págs. 197–219. P. H. Hammond, London, 1991.
- KHALIL, H. K. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 1996.
- LAWRENCE, D. A. e RUGH, W. J. Gain Scheduling Dynamic Linear Controllers for a Nonlinear Plant. *Automatica*, 31(3):381–390, 1995.
- LEITH, D. J. e LEITHEAD, W. E. Survey of Gain-Scheduling Analysis and Design. *Int. J. Contr.*, 73(11):1001–1025, 2000.
- LU, W. M. e DOYLE, J. C.  $H_\infty$  Control of Nonlinear Systems: A Convex Characterization. *IEEE Trans. Aut. Control*, 40:1668–1675, 1995.
- MARTINS, N. e LIMA, L. T. G. *Eigenvalue and Frequency Domain Analysis of Small-Signal Electromechanical Stability Problems*. Eigenanalysis and Frequency Domain Methods for System Dynamic Performance, IEEE publication 90TH0292-3-PWR, 1990.
- MONTICELLI, A. *Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica.*, pág. 82. Edgar Blücher, São Paulo, 1983.
- NICHOLS, R. A., REICHERT, R. T. e RUGH, W. J. Gain Scheduling for  $H_\infty$  Controllers: a Flight Control Example. *IEEE Trans. Contr. Systems Technology*, 1(2):69–79, 1993.
- PACKARD, A. Gain-Scheduling via Linear Fractional Transformations. *System & Control Letters*, 22:79–92, 1994.
- PAPAGEORGIOU, G., GLOVER, K., D’MELLO, G. e PATEL, Y. Taking Robust LPV Control into Flight on the VAAC Harrier. *in Proc. 39th IEEE Conf. on Decision and Control, Sydney*, 2000.
- PELLANDA, P. C. Controle robusto aplicado na estabilização de sistemas elétricos de potência. Dissertação de Mestrado, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 1993.
- PELLANDA, P. C. e APKARIAN, P. Synthesis of Controllers for Modal Shaping in Linear Parameter-Varying Systems via the Implicit Model Following Formulation. *in Proc. XIV Brazilian Autom. Contr. Conf., Natal-RN*, págs. 1124–1129, 2002a.
- PELLANDA, P. C., APKARIAN, P. e TUAN, H. D. Missile Autopilot Design Via a Multi-Channel LFT/LPV Control Method. *Int J. Robust and Nonlinear Control*, 12(1):1–20, 2002b.
- REICHERT, R. T. Dynamic Scheduling of Modern-Robust-Control Autopilot Designs for Missiles. *IEEE Contr. Syst. Magazine*, 12(5):35–42, 1992.
- RUGH, W. J. Analytical Framework for Gain Scheduling. *IEEE Contr. Syst. Mag.*, 11(2):79–84, 1991.

- RUGH, W. J. e SHAMMA, J. S. Research on Gain Scheduling. *Automatica*, 36:1401–1425, 2000.
- SCHERER, C. Robust Generalized  $H_2$  Control for Uncertain and LPV Systems with General Scalings. *in Proc. IEEE Conf. on Decision and Control, Kobe, JP*, págs. 3970–3975, 1996.
- SCHERER, C., GAHINET, P. e CHILALI, M. Multi-Objective Output-Feedback Control via LMI Optimization. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 42:896–911, 1997.
- SHAMMA, J. S. e ATHANS, M. Analysis of Gain Scheduled Control for Nonlinear Plants. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 35(8):898–907, 1990.
- STEVENSON, W. D. *Elementos de Análise de Sistemas de Potência.*, pág. 209. McGraw-Hill, São Paulo, 1986.
- STILWELL, D. J. e RUGH, W. Stability Preserving Interpolation Methods for the Synthesis of Gain Scheduled Controllers. Johns Hopkins Univ., Department of Electrical and Computer Engineering, Baltimore, Tech. Rep. JHU/ECE 97-18, 1997.
- TARANTO, G. N., CHOW, J. H. e OTHMAN, H. A. Robust Redesign of Power-System Damping Controllers. *IEEE Trans. Contr. Systems Technology*, 3(3):290–298, 1995.
- WU, F., YANG, X., PACKARD, A. e BECKER, G. Induced  $\mathcal{L}_2$ -Norm Control for LPV System with Bounded Parameter Variations Rates. *Int J. Robust and Nonlinear Control*, 6:983–998, 1996.

## 8 APÊNDICES



## 8.1 APÊNDICE 1: FORMULAÇÃO LMI PARA A SÍNTESE LPV MULTI-CANAL MISTO $H_2/H_\infty$

As fórmulas aqui presentes descrevem a estrutura das restrições LMI que devem ser codificadas para a utilização da técnica do Capítulo 2. Relembra-se que para as especificações de múltiplas funções de transferência, as matrizes

$$\begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{D}_{\Delta 1} \\ \tilde{D}_{11} \\ \tilde{D}_{21} \end{bmatrix}, \quad [\tilde{C}_1 \quad \tilde{D}_{1\Delta} \quad \tilde{D}_{11} \quad \tilde{D}_{12}]$$

que aparecem nas descrições do Capítulo 2 devem ser modificadas de forma apropriada. Além do mais, as variáveis  $\mathbf{X}_j$ ,  $Z_j$ ,  $\mathbf{Q}_j$ ,  $\mathbf{R}_j$ ,  $\nu_j$  e  $\gamma_j$  devem ser introduzidas para cada canal e cada especificação indexada por  $j$ . Todas as outras variáveis são comuns a todos os canais e especificações.

8.1.1 DESEMPENHO  $H_2$

$$\mathcal{L}^{21} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{11}^{21} & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \mathcal{L}_{21}^{21} & \mathcal{L}_{22}^{21} & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \mathcal{L}_{33}^{21} & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \mathcal{L}_{43}^{21} & \mathcal{L}_{44}^{21} & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{L}_{55}^{21} & \star & \star & \star & \star \\ \mathcal{L}_{61}^{21} & \mathcal{L}_{62}^{21} & \mathcal{L}_{63}^{21} & \mathcal{L}_{64}^{21} & \mathcal{L}_{65}^{21} & \mathcal{L}_{66}^{21} & \star & \star & \star \\ \mathcal{L}_{71}^{21} & \mathcal{L}_{72}^{21} & \mathcal{L}_{73}^{21} & \mathcal{L}_{74}^{21} & \mathcal{L}_{75}^{21} & \mathcal{L}_{76}^{21} & \mathcal{L}_{77}^{21} & \star & \star \\ \mathcal{L}_{81}^{21} & \mathcal{L}_{82}^{21} & \mathcal{L}_{83}^{21} & \mathcal{L}_{84}^{21} & \mathcal{L}_{85}^{21} & 0 & 0 & \mathcal{L}_{88}^{21} & \star \\ \mathcal{L}_{91}^{21} & \mathcal{L}_{92}^{21} & \mathcal{L}_{93}^{21} & \mathcal{L}_{94}^{21} & \mathcal{L}_{95}^{21} & 0 & 0 & \mathcal{L}_{98}^{21} & \mathcal{L}_{99}^{21} \end{bmatrix} < 0,$$

$$\mathcal{L}^{22} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{11}^{22} & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \mathcal{L}_{21}^{22} & \mathcal{L}_{22}^{22} & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \mathcal{L}_{33}^{22} & \star & \star & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & \mathcal{L}_{43}^{22} & \mathcal{L}_{44}^{22} & \star & \star & \star & \star \\ \mathcal{L}_{51}^{22} & \mathcal{L}_{52}^{22} & \mathcal{L}_{53}^{22} & \mathcal{L}_{54}^{22} & \mathcal{L}_{55}^{22} & \star & \star & \star \\ \mathcal{L}_{61}^{22} & \mathcal{L}_{62}^{22} & \mathcal{L}_{63}^{22} & \mathcal{L}_{64}^{22} & \mathcal{L}_{65}^{22} & \mathcal{L}_{66}^{22} & \star & \star \\ \mathcal{L}_{71}^{22} & \mathcal{L}_{72}^{22} & \mathcal{L}_{73}^{22} & \mathcal{L}_{74}^{22} & 0 & 0 & \mathcal{L}_{77}^{22} & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{L}_{87}^{22} & \mathcal{L}_{88}^{22} \end{bmatrix} < 0,$$

$$\mathcal{L}^{23} = \text{Tr}(Z_j) < 1,$$

$$\mathcal{L}^{24} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1j} & \star \\ \begin{bmatrix} F_{11}^T \Delta_i & \Delta_{\mathbf{K},i} \\ \Delta_i & \Delta_i G_{11} \end{bmatrix} & \mathbf{Q}_{1j} + \begin{bmatrix} F_{11} + F_{11}^T & \star \\ (\mathbf{N} + \mathbf{I})^T & E_{11} + E_{11}^T \end{bmatrix} \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, L,$$

$$\mathcal{L}^{25} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{2j} & \star \\ \begin{bmatrix} F_{11}^T \Delta_i & \Delta_{\mathbf{K},i} \\ \Delta_i & \Delta_i G_{11} \end{bmatrix} & \mathbf{Q}_{2j} + \begin{bmatrix} F_{11} + F_{11}^T & \star \\ (\mathbf{N} + \mathbf{I})^T & E_{11} + E_{11}^T \end{bmatrix} \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, L,$$

onde o símbolo  $\star$  são elementos induzidos simétricos e

$$\mathbf{X}_{2j} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \star \\ \mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{1j} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{1,1} & \star \\ \mathbf{R}_{1,2} & \mathbf{R}_{1,3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{1j} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{1,1} & \star \\ \mathbf{Q}_{1,2} & \mathbf{Q}_{1,3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_{2j} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{2,1} & \star \\ \mathbf{R}_{2,2} & \mathbf{R}_{2,3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{2j} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{2,1} & \star \\ \mathbf{Q}_{2,2} & \mathbf{Q}_{2,3} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{11}^{21} &= -\mathbf{X}_1, & \mathcal{L}_{21}^{21} &= -\mathbf{X}_2, \\
\mathcal{L}_{22}^{21} &= -\mathbf{X}_3, & \mathcal{L}_{33}^{21} &= \mathbf{Q}_{1,1}, \\
\mathcal{L}_{43}^{21} &= \mathbf{Q}_{1,2}, & \mathcal{L}_{44}^{21} &= \mathbf{Q}_{1,3}, \\
\mathcal{L}_{55}^{21} &= -\nu_j I, & \mathcal{L}_{61}^{21} &= V_{11}^T \tilde{A} + \mathbf{B}_{K1} \tilde{C}_2, \\
\mathcal{L}_{62}^{21} &= \mathbf{A}_K, & \mathcal{L}_{63}^{21} &= V_{11}^T \tilde{B}_\Delta + \mathbf{B}_{K1} \tilde{D}_{2\Delta}, \\
\mathcal{L}_{64}^{21} &= \mathbf{B}_{K\Delta}, & \mathcal{L}_{65}^{21} &= V_{11}^T \tilde{B}_1 + \mathbf{B}_{K1} \tilde{D}_{21}, \\
\mathcal{L}_{66}^{21} &= \mathbf{X}_1 - V_{11} - V_{11}^T, & \mathcal{L}_{71}^{21} &= \tilde{A} + \tilde{B}_2 \mathbf{D}_{K11} \tilde{C}_2, \\
\mathcal{L}_{72}^{21} &= \tilde{A} W_{11} + \tilde{B}_2 \mathbf{C}_{K1}, & \mathcal{L}_{73}^{21} &= \tilde{B}_\Delta + \tilde{B}_2 \mathbf{D}_{K11} \tilde{D}_{2\Delta}, \\
\mathcal{L}_{74}^{21} &= \tilde{B}_\Delta E_{11} + \tilde{B}_2 \mathbf{D}_{K1\Delta}, & \mathcal{L}_{75}^{21} &= \tilde{B}_1 + \tilde{B}_2 \mathbf{D}_{K11} \tilde{D}_{21}, \\
\mathcal{L}_{76}^{21} &= \mathbf{X}_2 - \mathbf{U}^T - I, & \mathcal{L}_{77}^{21} &= \mathbf{X}_3 - W_{11} - W_{11}^T, \\
\mathcal{L}_{81}^{21} &= H_{11}^T \tilde{C}_\Delta + \mathbf{D}_{K\Delta 1} \tilde{C}_2, & \mathcal{L}_{82}^{21} &= \mathbf{C}_{K\Delta}, \\
\mathcal{L}_{83}^{21} &= H_{11}^T \tilde{D}_{\Delta\Delta} + \mathbf{D}_{K\Delta 1} \tilde{D}_{2\Delta}, & \mathcal{L}_{84}^{21} &= \mathbf{D}_{K\Delta\Delta}, \\
\mathcal{L}_{85}^{21} &= H_{11}^T \tilde{D}_{\Delta 1} + \mathbf{D}_{K\Delta 1} \tilde{D}_{21}, & \mathcal{L}_{88}^{21} &= \mathbf{R}_{1,1} - H_{11} - H_{11}^T, \\
\mathcal{L}_{91}^{21} &= \tilde{C}_\Delta + \tilde{D}_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K11} \tilde{C}_2, & \mathcal{L}_{92}^{21} &= \tilde{C}_\Delta W_{11} + \tilde{D}_{\Delta 2} \mathbf{C}_{K1}, \\
\mathcal{L}_{93}^{21} &= \tilde{D}_{\Delta\Delta} + \tilde{D}_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K11} \tilde{D}_{2\Delta}, & \mathcal{L}_{94}^{21} &= \tilde{D}_{\Delta\Delta} E_{11} + \tilde{D}_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K1\Delta}, \\
\mathcal{L}_{95}^{21} &= \tilde{D}_{\Delta 1} + \tilde{D}_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K11} \tilde{D}_{21}, & \mathcal{L}_{98}^{21} &= \mathbf{R}_{1,2} - \mathbf{M}^T - I, \\
\mathcal{L}_{99}^{21} &= \mathbf{R}_{1,3} - G_{11} - G_{11}^T, & & \\
\mathcal{L}_{11}^{22} &= -\mathbf{X}_1, & \mathcal{L}_{21}^{22} &= -\mathbf{X}_2, \\
\mathcal{L}_{22}^{22} &= -\mathbf{X}_3, & \mathcal{L}_{33}^{22} &= \mathbf{Q}_{2,1}, \\
\mathcal{L}_{43}^{22} &= \mathbf{Q}_{2,2}, & \mathcal{L}_{44}^{22} &= \mathbf{Q}_{2,3}, \\
\mathcal{L}_{51}^{22} &= H_{11}^T \tilde{C}_\Delta + \mathbf{D}_{K\Delta 1} \tilde{C}_2, & \mathcal{L}_{52}^{22} &= \mathbf{C}_{K\Delta}, \\
\mathcal{L}_{53}^{22} &= H_{11}^T \tilde{D}_{\Delta\Delta} + \mathbf{D}_{K\Delta 1} \tilde{D}_{2\Delta}, & \mathcal{L}_{54}^{22} &= \mathbf{D}_{K\Delta\Delta}, \\
\mathcal{L}_{55}^{22} &= \mathbf{R}_{2,1} - H_{11} - H_{11}^T, & \mathcal{L}_{61}^{22} &= \tilde{C}_\Delta + \tilde{D}_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K11} \tilde{C}_2, \\
\mathcal{L}_{62}^{22} &= \tilde{C}_\Delta W_{11} + \tilde{D}_{\Delta 2} \mathbf{C}_{K1}, & \mathcal{L}_{63}^{22} &= \tilde{D}_{\Delta\Delta} + \tilde{D}_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K11} \tilde{D}_{2\Delta}, \\
\mathcal{L}_{64}^{22} &= \tilde{D}_{\Delta\Delta} E_{11} + \tilde{D}_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K1\Delta}, & \mathcal{L}_{65}^{22} &= \mathbf{R}_{2,2} - \mathbf{M}^T - I,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{66}^{22} &= \mathbf{R}_{2,3} - G_{11} - G_{11}^T, & \mathcal{L}_{71}^{22} &= \tilde{C}_1 + \tilde{D}_{12} \mathbf{D}_{\mathbf{K}11} \tilde{C}_2, \\ \mathcal{L}_{72}^{22} &= \tilde{C}_1 W_{11} + \tilde{D}_{12} \mathbf{C}_{\mathbf{K}1}, & \mathcal{L}_{73}^{22} &= \tilde{D}_{1\Delta} + \tilde{D}_{12} \mathbf{D}_{\mathbf{K}11} \tilde{D}_{2\Delta}, \\ \mathcal{L}_{74}^{22} &= \tilde{D}_{1\Delta} E_{11} + \tilde{D}_{12} \mathbf{D}_{\mathbf{K}1\Delta}, & \mathcal{L}_{77}^{22} &= -Z_j, \\ \mathcal{L}_{87}^{22} &= \tilde{D}_{11}^T + \tilde{D}_{21}^T \mathbf{D}_{\mathbf{K}11}^T \tilde{D}_{12}^T, & \mathcal{L}_{88}^{22} &= -\nu_j I.\end{aligned}$$

### 8.1.2 DESEMPENHO $H_\infty$

$$\mathcal{L}^{\infty 1} = \begin{bmatrix}
 \mathcal{L}_{11}^{\infty 1} & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\
 \mathcal{L}_{21}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{22}^{\infty 1} & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\
 0 & 0 & \mathcal{L}_{33}^{\infty 1} & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\
 0 & 0 & \mathcal{L}_{43}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{44}^{\infty 1} & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\
 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{L}_{55}^{\infty 1} & \star & \star & \star & \star & \star \\
 \mathcal{L}_{61}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{62}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{63}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{64}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{65}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{66}^{\infty 1} & \star & \star & \star & \star \\
 \mathcal{L}_{71}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{72}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{73}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{74}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{75}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{76}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{77}^{\infty 1} & \star & \star & \star \\
 \mathcal{L}_{81}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{82}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{83}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{84}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{85}^{\infty 1} & 0 & 0 & \mathcal{L}_{88}^{\infty 1} & \star & \star \\
 \mathcal{L}_{91}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{92}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{93}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{94}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{95}^{\infty 1} & 0 & 0 & \mathcal{L}_{98}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{99}^{\infty 1} & \star \\
 \mathcal{L}_{101}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{102}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{103}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{104}^{\infty 1} & \mathcal{L}_{105}^{\infty 1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathcal{L}_{1010}^{\infty 1}
 \end{bmatrix} < 0,$$

$$\mathcal{L}^{\infty 2} = \begin{bmatrix}
 \mathbf{R}_{\infty j} & \star \\
 \begin{bmatrix} F_{11}^T \Delta_i & \Delta_{K,i} \\ \Delta_i & \Delta_i G_{11} \end{bmatrix} & \mathbf{Q}_{\infty j} + \begin{bmatrix} F_{11} + F_{11}^T & \star \\ (\mathbf{N} + I)^T & E_{11} + E_{11}^T \end{bmatrix}
 \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, \dots, L, \quad (8.1)$$

onde

$$\mathbf{X}_{\infty j} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \star \\ \mathbf{X}_2 & \mathbf{X}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_{\infty j} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \star \\ \mathbf{R}_2 & \mathbf{R}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_{\infty j} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_1 & \star \\ \mathbf{Q}_2 & \mathbf{Q}_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{11}^{\infty 1} &= -\mathbf{X}_1, & \mathcal{L}_{21}^{\infty 1} &= -\mathbf{X}_2, \\ \mathcal{L}_{22}^{\infty 1} &= -\mathbf{X}_3, & \mathcal{L}_{33}^{\infty 1} &= \mathbf{Q}_1, \\ \mathcal{L}_{43}^{\infty 1} &= \mathbf{Q}_2, & \mathcal{L}_{44}^{\infty 1} &= \mathbf{Q}_3, \\ \mathcal{L}_{55}^{\infty 1} &= -\gamma_j I, & \mathcal{L}_{61}^{\infty 1} &= V_{11}^T \tilde{\mathbf{A}} + \mathbf{B}_{K1} \tilde{\mathbf{C}}_2, \\ \mathcal{L}_{62}^{\infty 1} &= \mathbf{A}_K, & \mathcal{L}_{63}^{\infty 1} &= V_{11}^T \tilde{\mathbf{B}}_{\Delta} + \mathbf{B}_{K1} \tilde{\mathbf{D}}_{2\Delta}, \\ \mathcal{L}_{64}^{\infty 1} &= \mathbf{B}_{K\Delta}, & \mathcal{L}_{65}^{\infty 1} &= V_{11}^T \tilde{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{B}_{K1} \tilde{\mathbf{D}}_{21}, \\ \mathcal{L}_{66}^{\infty 1} &= \mathbf{X}_1 - V_{11} - V_{11}^T, & \mathcal{L}_{71}^{\infty 1} &= \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}}_2 \mathbf{D}_{K11} \tilde{\mathbf{C}}_2, \\ \mathcal{L}_{72}^{\infty 1} &= \tilde{\mathbf{A}} W_{11} + \tilde{\mathbf{B}}_2 \mathbf{C}_{K1}, & \mathcal{L}_{73}^{\infty 1} &= \tilde{\mathbf{B}}_{\Delta} + \tilde{\mathbf{B}}_2 \mathbf{D}_{K11} \tilde{\mathbf{D}}_{2\Delta}, \\ \mathcal{L}_{74}^{\infty 1} &= \tilde{\mathbf{B}}_{\Delta} E_{11} + \tilde{\mathbf{B}}_2 \mathbf{D}_{K1\Delta}, & \mathcal{L}_{75}^{\infty 1} &= \tilde{\mathbf{B}}_1 + \tilde{\mathbf{B}}_2 \mathbf{D}_{K11} \tilde{\mathbf{D}}_{21}, \\ \mathcal{L}_{76}^{\infty 1} &= \mathbf{X}_2 - \mathbf{U}^T - I, & \mathcal{L}_{77}^{\infty 1} &= \mathbf{X}_3 - W_{11} - W_{11}^T, \\ \mathcal{L}_{81}^{\infty 1} &= H_{11}^T \tilde{\mathbf{C}}_{\Delta} + \mathbf{D}_{K\Delta 1} \tilde{\mathbf{C}}_2, & \mathcal{L}_{82}^{\infty 1} &= \mathbf{C}_{K\Delta}, \\ \mathcal{L}_{83}^{\infty 1} &= H_{11}^T \tilde{\mathbf{D}}_{\Delta\Delta} + \mathbf{D}_{K\Delta 1} \tilde{\mathbf{D}}_{2\Delta}, & \mathcal{L}_{84}^{\infty 1} &= \mathbf{D}_{K\Delta\Delta}, \\ \mathcal{L}_{85}^{\infty 1} &= H_{11}^T \tilde{\mathbf{D}}_{\Delta 1} + \mathbf{D}_{K\Delta 1} \tilde{\mathbf{D}}_{21}, & \mathcal{L}_{88}^{\infty 1} &= \mathbf{R}_1 - H_{11} - H_{11}^T, \\ \mathcal{L}_{91}^{\infty 1} &= \tilde{\mathbf{C}}_{\Delta} + \tilde{\mathbf{D}}_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K11} \tilde{\mathbf{C}}_2, & \mathcal{L}_{92}^{\infty 1} &= \tilde{\mathbf{C}}_{\Delta} W_{11} + \tilde{\mathbf{D}}_{\Delta 2} \mathbf{C}_{K1}, \\ \mathcal{L}_{93}^{\infty 1} &= \tilde{\mathbf{D}}_{\Delta\Delta} + \tilde{\mathbf{D}}_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K11} \tilde{\mathbf{D}}_{2\Delta}, & \mathcal{L}_{94}^{\infty 1} &= \tilde{\mathbf{D}}_{\Delta\Delta} E_{11} + \tilde{\mathbf{D}}_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K1\Delta}, \\ \mathcal{L}_{95}^{\infty 1} &= \tilde{\mathbf{D}}_{\Delta 1} + \tilde{\mathbf{D}}_{\Delta 2} \mathbf{D}_{K11} \tilde{\mathbf{D}}_{21}, & \mathcal{L}_{98}^{\infty 1} &= \mathbf{R}_2 - \mathbf{M}^T - I, \\ \mathcal{L}_{99}^{\infty 1} &= \mathbf{R}_3 - G_{11} - G_{11}^T, & \mathcal{L}_{101}^{\infty 1} &= \tilde{\mathbf{C}}_1 + \tilde{\mathbf{D}}_{12} \mathbf{D}_{K11} \tilde{\mathbf{C}}_2, \\ \mathcal{L}_{102}^{\infty 1} &= \tilde{\mathbf{C}}_1 W_{11} + \tilde{\mathbf{D}}_{12} \mathbf{C}_{K1}, & \mathcal{L}_{103}^{\infty 1} &= \tilde{\mathbf{D}}_{1\Delta} + \tilde{\mathbf{D}}_{12} \mathbf{D}_{K11} \tilde{\mathbf{D}}_{2\Delta}, \\ \mathcal{L}_{104}^{\infty 1} &= \tilde{\mathbf{D}}_{1\Delta} E_{11} + \tilde{\mathbf{D}}_{12} \mathbf{D}_{K1\Delta}, & \mathcal{L}_{105}^{\infty 1} &= \tilde{\mathbf{D}}_{11} + \tilde{\mathbf{D}}_{12} \mathbf{D}_{K11} \tilde{\mathbf{D}}_{21}, \\ \mathcal{L}_{1010}^{\infty 1} &= -\gamma_j I. \end{aligned}$$

## 8.2 APÊNDICE 2: DADOS DO MODELO

Dados utilizados em MARTINS (1990) no modelo de SEP:

$$P_b = 300 \text{ MW (potência base); } w_{sinc} = 2\pi 60 \text{ rd/s;}$$

$$R_{12} = R_{23} \cong 0,00 \text{ pu; } X_{12} = X_{23} = 0,50 \text{ pu;}$$

$$g_{12} = g_{23} = g_{20} \cong 0,00 \text{ pu; } b_{20} = 0,333 \text{ pu;}$$

$$b_{12} = -X_{12}/(R_{12}^2 + X_{12}^2) = -2,00 \text{ pu;}$$

$$b_{23} = -X_{23}/(R_{23}^2 + X_{23}^2) = -2,00 \text{ pu;}$$

$$r_a = 0,00 \text{ pu; } X_d = 2,72 \text{ pu;}$$

$$X_d'' = 0,26 \text{ pu; } X_q'' = 0,26 \text{ pu;}$$

$$T_{d0}' = 8,50 \text{ s; } T_{q0}'' = 0,90 \text{ s;}$$

$$X_d' = 0,36 \text{ pu; } T_{d0}'' = 0,03 \text{ s;}$$

$$X_q = 2,60 \text{ pu; } H = 3,84 \text{ s;}$$

$$K_{a1} = 50,00 \text{ pu; } T_{a1} = 0,05 \text{ s}$$

## 8.3 APÊNDICE 3: PROGRAMAS MAPLE

### 8.3.1 MODELO LPV INICIAL PARA $H_2$

```
> with(LinearAlgebra):#seplin.mws
> #modelo p/ H2
> k1:=-1/td021:
> k2:=1/td021:
> k3:=- (xd1-xd21)/td021:
> k4:=-1/tq021:
> k5:=(xq-xq21)/tq021:
> k6:=-1/td01:
> k7:=1/td01:
> k8:=- (xd-xd1)/td01:
> k9:=(-vq*id+vd*iq)/(2*h):
> k10:=(-vd)/(2*h):
> k11:=(-vq)/(2*h):
> k12:=(-id*sin(delta)-iq*cos(delta))/(2*h):
> k13:=(id*cos(delta)-iq*sin(delta))/(2*h):
> k14:=wsinc:
> k15:=-1/ta1:
> k16:=- (ka1/ta1)*(vd*sin(delta)+vq*cos(delta)):
> k17:=- (ka1/ta1)*(-vd*cos(delta)+vq*sin(delta)):
> k18:=ka1/ta1:
> k19:=id*sin(delta)+iq*cos(delta):
> k20:=-cos(delta):
> k21:=sin(delta):
> k22:=id*cos(delta)-iq*sin(delta):
> k23:=sin(delta):
> k24:=cos(delta):
> k25:=vq:
> k26:=ra:
> k27:=-xq21:
```



```

> k28:=sin(delta):
> k29:=-cos(delta):
> k30:=-vd:
> k31:=xd21:
> k32:=ra:
> k33:=cos(delta):
> k34:=sin(delta):
> g12:=0:
> g20:=0:
> g23:=0:
> ra :=0:
> xd := 2.72:
> wsinc := 2*evalf(Pi)*60:
> xd21 := 0.26:
> xq21 := 0.26:
> td01 := 8.5:
> tq021 := 0.9:
> xd1 := 0.36:
> td021 := 0.03:
> xq := 2.6:
> h := 3.84:
> r12 := 0:
> x12 := .5:
> r23 := 0:
> x23 := .5:
> b20 := .333:
> g20 := 0:
> ka1 := 50:
> ta1 := .05:
> g12 := r12 / (r12^2 + x12^2):
> g23 := r23 / (r23^2 + x23^2):
> b12 := -x12 / (r12^2 + x12^2):
> b23 := -x23 / (r23^2 + x23^2):
> j1:= Matrix(6,6,[[k1,0,k2,0,0,0], [0,k4,0,0,0,0],[0,0,k6,0,0,k7],

```

```

> [0,0,0,0,k9,0],[0,0,0,k14,0,0],
> [0,0,0,0,0,k15]]):
> j2:=Matrix(6,6,[[k3,0,0,0,0,0],[0,k5,0,0,0,0],[k8,0,0,0,0,0],
> [k10,k11,k12,k13,0,0],[0,0,0,0,0,0],[0,0,k16,k17,0,0]]):
> j3:=Matrix(6,6,[[0,0,0,0,-k19,0],[0,0,0,0,-k22,0],[0,0,0,0,0,0],
> [0,0,0,0,0,0],[0,-1,0,0,k25,0],[-1,0,0,0,k30,0]]):
> j4:=Matrix(6,6,[[k20,-k21,b12,g12,-b12,-g12],
> [-k23,-k24,g12,-b12,-g12,b12],[0,0,-b12,-g12,b12+b23+b20,g12+g23+g20],
> [0,0,-g12,b12,g12+g23+g20,-(b12+b23+b20)],[k26,k27,k28,k29,0,0],
> [k31,k32,k33,k34,0,0]]):
> Digits:=20:
> invj4:=simplify(MatrixInverse(j4)):
> bx:=Matrix(6,1,[[0],[0],[0],[0],[0],[k18]]):
> br:=Matrix(6,1,[[0],[0],[0],[0],[0],[0]]):
> cx:=Matrix(1,6,[[0,0,0,1,0,0]]): #saida Dw
> cr:=Matrix(1,6,[[0,0,0,0,0,0]]):
> A:=simplify(j1-j2.invj4.j3);

```

```

A := [-35.784529964298107858 , 0. , 33.333333333333333 , 0. , -2.6960222092824919567 iq - 2.4511966309647745252 vd , 0.]

[0. , -3.0230444832636352408 , 0. , 0. , -2.1028973232403437263 id + 1.9119333721525241297 vq , 0.]

[-.20417026055565416045 , 0. , -.11764705882352941176 , 0. , -.22456279107905933004 iq - .20417026055565416045 vd , .11764705882352941176]
[
[-.095749868397061504896 vd - .10531336755009734207 iq , .095749868397061504896 vq - .10531336755009734207 id , 0. , 0. , .080418401766861350800 vq id
- .080418401766861350800 vd iq + .027381475563025308938 id + .027381475563025308938 iq - .095749868397061504896 vq - .095749868397061504896 vd , 0.]

[0. , 0. , 0. , 376.99111843077518862 , 0. , 0.]

[-808.80666278474758703 vq , -808.80666278474758703 vd , 0. , 0. , 210.28973232403437263 vd id + 210.28973232403437263 vq iq , -20.]

```

```
> B:=bx;
```

66

```

      [      0      ]
      [              ]
      [      0      ]
      [              ]
      [      0      ]
B := [              ]
      [      0      ]
      [              ]
      [      0      ]
      [              ]
      [1000.0000000000000000]

```

```
> j43 := simplify(invj4.j3):
```

```
> C:=simplify(cx-cr.j43);
```

```
c := [0. 0. 0. 1. 0. 0.]
```

### 8.3.2 MODELO LPV INICIAL PARA $H_2/H_\infty$ -(CASO 1)

```
> with(LinearAlgebra): #Casol
> #sepliniinf1.mws entrada:DVpss; saída:Dw; incerteza:db23
> k1:=-1/td021:
> k2:=1/td021:
> k3:=- (xd1-xd21)/td021:
> k4:=-1/tq021:
> k5:=(xq-xq21)/tq021:
> k6:=-1/td01:
> k7:=1/td01:
> k8:=- (xd-xd1)/td01:
> k9:=(-vq*id+vd*iq)/(2*h):
> k10:=(-vd)/(2*h):
> k11:=(-vq)/(2*h):
> k12:=(-id*sin(delta)-iq*cos(delta))/(2*h):
> k13:=(id*cos(delta)-iq*sin(delta))/(2*h):
> k14:=wsinc:
> k15:=-1/ta1:
> k16:=-(ka1/ta1)*(vd*sin(delta)+vq*cos(delta)):
> k17:=-(ka1/ta1)*(-vd*cos(delta)+vq*sin(delta)):
> k18:=ka1/ta1:
> k19:=id*sin(delta)+iq*cos(delta):
> k20:=-cos(delta):
> k21:=sin(delta):
> k22:=id*cos(delta)-iq*sin(delta):
> k23:=sin(delta):
> k24:=cos(delta):
> k25:=vq:
> k26:=ra:
> k27:=-xq21:
> k28:=sin(delta):
> k29:=-cos(delta):
> k30:=-vd:
> k31:=xd21:
```

```

> k32:=ra:
> k33:=cos(delta):
> k34:=sin(delta):
> g12:=0:
> g20:=0:
> g23:=0:
> ra :=0:
> xd := 2.72:
> wsinc := 2*evalf(Pi)*60:
> xd21 := 0.26:
> xq21 := 0.26:
> td01 := 8.5:
> tq021 := 0.9:
> xd1 := 0.36:
> td021 := 0.03:
> xq := 2.6:
> h := 3.84:
> r12 := 0:
> x12 := .5:
> r23 := 0:
> x23 := .5:
> b20 := .333:
> g20 := 0:
> ka1 := 50:
> ta1 := .05:
> g12 := r12 / (r12^2 + x12^2):
> g23 := r23 / (r23^2 + x23^2):
> b12 := -x12 / (r12^2 + x12^2):
> b23 := -x23 / (r23^2 + x23^2)+db23;

      b23 := -2.00000000000000000000 + db23

> j1:= Matrix(6,6,[[k1,0,k2,0,0,0], [0,k4,0,0,0,0],[0,0,k6,0,0,k7],
> [0,0,0,0,k9,0],

```

```

> [0,0,0,k14,0,0],[0,0,0,0,0,k15]]):
> j2:=Matrix(6,6,[[k3,0,0,0,0,0],[0,k5,0,0,0,0],[k8,0,0,0,0,0],
> [k10,k11,k12,k13,0,0],[0,0,0,0,0,0],[0,0,k16,k17,0,0]]):
> j3:=Matrix(6,6,[[0,0,0,0,-k19,0],[0,0,0,0,-k22,0],[0,0,0,0,0,0],
> [0,0,0,0,0,0],[0,-1,0,0,k25,0],[-1,0,0,0,k30,0]]):
> j4:=Matrix(6,6,[[k20,-k21,b12,g12,-b12,-g12],
> [-k23,-k24,g12,-b12,-g12,b12],
> [0,0,-b12,-g12,b12+b23+b20,g12+g23+g20],
> [0,0,-g12,b12,g12+g23+g20,-(b12+b23+b20)],[k26,k27,k28,k29,0,0],
> [k31,k32,k33,k34,0,0]]):
> Digits:=20:

> invj4:=simplify(MatrixInverse(j4)):
> bx:=Matrix(6,1,[[0],[0],[0],[0],[0],[k18]]):
> br:=Matrix(6,1,[[0],[0],[0],[0],[0],[0]]):
> cx:=Matrix(1,6,[[0,0,0,1,0,0]]): #saida Dw
> cr:=Matrix(1,6,[[0,0,0,0,0,0]]):
> A:=simplify(j1-j2.invj4.j3);

```

```

A := [
      -17          25          24
[-.10000000000000000000 10  (-.20280166666666666666 10  + .71666666666666666666 10  db23 )/(-56673. + 19000. db23) , 0. , 33.333333333333333333 , 0. ,
      -14          20          20          20          20
-.20000000000000000000 10  (-.76395833333333333330 10  iq + .20833333333333333333 10  iq db23 - .69458333333333333330 10  vd + .41666666666666666666 10  vd db23)/
      ]
(-56673. + 19000. db23) , 0.]

[
      -18          25          24
[0. , -.10000000000000000000 10  (-.17132500000000000000 10  + .86111111111111111111 10  db23 )/(-56673. + 19000. db23) , 0. , 0. , 32.500000000000000000*
[
(3667. id - 1000. db23 id - 3334. vq + 2000. vq db23) ]
----- , 0.]
-56673. + 19000. db23 ]

[
      -1667. + 1000. db23          20
[-6.9411764705882352940 ----- , 0. , -.11764705882352941176 , 0. , -.10000000000000000000 10  (-.11570941176470588235 10  vd
-56673. + 19000. db23

      19          20          19          ]
+ .6941176470588235294 10  vd db23 - .12726647058823529412 10  iq + .3470588235294117647 10  iq db23)/(-56673. + 19000. db23) , .11764705882352941176]
]

[
      -15          20          20          20
[-.10000000000000000000 10  (-.59684244791666666672 10  iq + .16276041666666666668 10  iq db23 - .54264322916666666671 10  vd
      20          20
- .54264322916666666671 10  vd + .32552083333333333336 10  vd db23)/(-56673. + 19000. db23 ) ,
      -15          20          20          20
.10000000000000000000 10  (-.54264322916666666671 10  vq + .32552083333333333336 10  vq db23 + .59684244791666666672 10  id
      20          20
+ .59684244791666666672 10  id - .16276041666666666668 10  db23 id)/(-56673. + 19000. db23) , 0. , 0. ,
      -16          20          20
-.40000000000000000000 10  (-.19531250000000000005 10  vq id db23 + .19531250000000000005 10  vd iq db23

```

```

                20 2                20 2                20 2
- .10579427083333333334 10 iq db23 + .81380208333333333340 10 vq db23+ .81380208333333333340 10 vd db23
                20 2                21                21
- .10579427083333333334 10 id db23 - .11393880208333333334 10 vd iq+ .11393880208333333334 10 vq id
                20 2                20 2                21 2                21 2                ]
+ .38794759114583333335 10 id + .38794759114583333335 10 iq - .13566080729166666668 10 vq - .13566080729166666668 10 vd )/(-56673. + 19000. db23) , 0.]

```

```
[0. , 0. , 0. , 376.991118500000000000 , 0. , 0.]
```

```

[      (-3667. + 1000. db23) vq      (-3667. + 1000. db23) vd      (-3667. + 1000. db23) (vq iq + vd id)      ]
[-12500. ----- , -12500. ----- , 0. , 0. , 3250. ----- , -20.]
[      -56673. + 19000. db23      -56673. + 19000. db23      -56673. + 19000. db23      ]

```

```
> B:=simplify(bx-j2.invj4.br);#DVpss
```

```

[ 0. ]
[   ]
[ 0. ]
[   ]
[ 0. ]
B := [   ]
[ 0. ]
[   ]
[ 0. ]
[   ]
[1000.]

```

```
> j43 := simplify(invj4.j3):
```

```
> C:=simplify(cx-cr.j43);
```

```
c := [0. 0. 0. 1. 0. 0.]
```

101



### 8.3.3 MODELO LPV INICIAL PARA $H_2/H_\infty$ -(CASO 2)

```
> with(LinearAlgebra):          #seplininf.mws  entradas:dIr1,dIm1,DVpss
> # saídas:Dvr12,DVm12,Dw
> k1:=-1/td021:
> k2:=1/td021:
> k3:=- (xd1-xd21)/td021:
> k4:=-1/tq021:
> k5:=(xq-xq21)/tq021:
> k6:=-1/td01:
> k7:=1/td01:
> k8:=- (xd-xd1)/td01:
> k9:=(-vq*id+vd*iq)/(2*h):
> k10:=(-vd)/(2*h):
> k11:=(-vq)/(2*h):
> k12:=(-id*sin(delta)-iq*cos(delta))/(2*h):
> k13:=(id*cos(delta)-iq*sin(delta))/(2*h):
> k14:=wsinc:
> k15:=-1/ta1:
> k16:=-(ka1/ta1)*(vd*sin(delta)+vq*cos(delta)):
> k17:=-(ka1/ta1)*(-vd*cos(delta)+vq*sin(delta)):
> k18:=ka1/ta1:
> k19:=id*sin(delta)+iq*cos(delta):
> k20:=-cos(delta):
> k21:=sin(delta):
> k22:=id*cos(delta)-iq*sin(delta):
> k23:=sin(delta):
> k24:=cos(delta):
> k25:=vq:
> k26:=ra:
> k27:=-xq21:
> k28:=sin(delta):
> k29:=-cos(delta):
> k30:=-vd:
> k31:=xd21:
```

```

> k32:=ra:
> k33:=cos(delta):
> k34:=sin(delta):
> g12:=0:
> g20:=0:
> g23:=0:
> ra :=0:
> xd := 2.72:
> wsinc := 2*evalf(Pi)*60:
> xd21 := 0.26:
> xq21 := 0.26:
> td01 := 8.5:
> tq021 := 0.9:
> xd1 := 0.36:
> td021 := 0.03:
> xq := 2.6:
> h := 3.84:
> r12 := 0:
> x12 := .5:
> r23 := 0:
> x23 := .5:
> b20 := .333:
> g20 := 0:
> ka1 := 50:
> ta1 := .05:
> g12 := r12 / (r12^2 + x12^2):
> g23 := r23 / (r23^2 + x23^2):
> b12 := -x12 / (r12^2 + x12^2):
> b23 := -x23 / (r23^2 + x23^2):
> j1:= Matrix(6,6,[[k1,0,k2,0,0,0], [0,k4,0,0,0,0],
>[0,0,k6,0,0,k7],[0,0,0,0,k9,0],
>[0,0,0,k14,0,0],[0,0,0,0,0,k15]]):
> j2:=Matrix(6,6,[[k3,0,0,0,0,0],[0,k5,0,0,0,0],
>[k8,0,0,0,0,0],[k10,k11,k12,k13,0,0],

```

```

> [0,0,0,0,0,0],[0,0,k16,k17,0,0]]):
> j3:=Matrix(6,6,[[0,0,0,0,-k19,0],[0,0,0,0,-k22,0],
>[0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0],
> [0,-1,0,0,k25,0],[-1,0,0,0,k30,0]]):
> j4:=Matrix(6,6,[[ -k20,-k21,b12,g12,-b12,-g12],
>[-k23,-k24,g12,-b12,-g12,b12],
> [0,0,-b12,-g12,b12+b23+b20,g12+g23+g20],
>[0,0,-g12,b12,g12+g23+g20,-(b12+b23+b20)],
> [k26,k27,k28,k29,0,0],[k31,k32,k33,k34,0,0]]):
> Digits:=20:

> invj4:=simplify(MatrixInverse(j4)):
> bx:=Matrix(6,3,[[0,0,0],[0,0,0],[0,0,0],[0,0,0],[0,0,0],[0,0,k18]]):
> br:=Matrix(6,3,[[0,-1,0],[-1,0,0],[0,0,0],[0,0,0],[0,0,0],[0,0,0]]):
> cx:=Matrix(5,6,[[0,0,0,1,0,0],[0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0],
[0,0,0,0,0,0]]):
> cr:=Matrix(5,6,[[0,0,0,0,0,0],[0,0,1,0,0,0],[0,0,0,1,0,0],[0,0,0,0,1,0],
[0,0,0,0,0,1]]):
> A:=simplify(j1-j2.invj4.j3);

```

A :=

```
[-35.784529964298107858 , 0. , 33.333333333333333333 , 0. , -2.6960222092824919567 iq - 2.4511966309647745252 vd , 0.]

[0. , -3.0230444832636352408 , 0. , 0. , -2.1028973232403437263 id + 1.9119333721525241297 vq , 0.]

[-.20417026055565416045 , 0. , -.11764705882352941176 , 0. , -.22456279107905933004 iq - .20417026055565416045 vd , .11764705882352941176]

[
-.095749868397061504896 vd - .10531336755009734207 iq , .095749868397061504896 vq - .10531336755009734207 id , 0. , 0. , .080418401766861350800 vq id
- .080418401766861350800 vd iq + .027381475563025308938 id + .027381475563025308938 iq - .095749868397061504896 vq - .095749868397061504896 vd , 0.]
[0. , 0. , 0. , 376.99111843077518862 , 0. , 0.]

[-808.80666278474758703 vq , -808.80666278474758703 vd , 0. , 0. , 210.28973232403437263 vd id + 210.28973232403437263 vq iq , -20.]
```

> B:=simplify(bx-j2.invj4.br);# dIr1,dIm1,DVpss

B :=

```
[2.6960222092824919567 sin(delta) , -2.6960222092824919567 cos(delta) , 0.]

[-2.1028973232403437263 cos(delta) , -2.1028973232403437263 sin(delta) , 0.]

[.22456279107905933004 sin(delta) , -.22456279107905933004 cos(delta) , 0.]

[.10531336755009734207 vd sin(delta)+ .10531336755009734207 vq cos(delta)+ .027381475563025308938 id cos(delta)- .027381475563025308938 iq sin(delta) ,
-.10531336755009734207 vd cos(delta)+ .10531336755009734207 vq sin(delta)+ .027381475563025308938 id sin(delta)+ .027381475563025308938 iq cos(delta) , 0.]

[0. , 0. , 0.]

[210.28973232403437263 vd cos(delta) - 210.28973232403437263 vq sin(delta) , 210.28973232403437263 vd sin(delta) + 210.28973232403437263 vq cos(delta) , 1000.]
```

```

> j43 := simplify(invj4.j3):
> C:=simplify(cx-cr.j43):# para o seplin Hinf c/ as variações ainda de w,Vr1,Vm1,Vr2,Vm2
> Cw := C[1,1..6]:
> CVr12 := C[2,1..6]-C[4,1..6]:
> CVm12 := C[3,1..6]-C[5,1..6]:
> Cinf:= Matrix(3,6,[[CVr12],[CVm12],[Cw]]);# saídas DVr12,DVm12,Dw
Cinf :=

[.36767949464471617878 cos(delta) ,.36767949464471617878 sin(delta) , 0. , 0. , -.09559666860762620648 id sin(delta)- .09559666860762620648 iq cos(delta)
- .36767949464471617878 vq sin(delta)+ .36767949464471617878 vd cos(delta) , 0.]

[.36767949464471617878 sin(delta) ,-.36767949464471617878 cos(delta) , 0. , 0. , .09559666860762620648 id cos(delta)- .09559666860762620648 iq sin(delta)
+ .36767949464471617878 vq cos(delta)+ .36767949464471617878 vd sin(delta) , 0.]

[0. , 0. , 0. , 1. , 0. , 0.]

> DD:= simplify(-cr.invj4.br):# para o seplin Hinf c/ as variações ainda de w,Vr1,Vm1,Vr2,Vm2
> Dw := DD[1,1..3]:
> DVr12 := DD[2,1..3]-DD[4,1..3]:
> DVm12 := DD[3,1..3]-DD[5,1..3]:
> Dinf:= Matrix(3,3,[[DVr12],[DVm12],[Dw]]);#entradas dIr1,dIm1,DVpss

[      0.      -.09559666860762620648   0.]
[      ]
Dinf := [.09559666860762620648      0.      0.]
[      ]
[      0.      0.      0.]

```

## 8.4 APÊNDICE 4: PROGRAMAS MATLAB

### 8.4.1 ELIMINAÇÃO DE PARÂMETROS MEDIDOS COM REDUÇÃO DE ORDEM

```
%redparMD1 elimina os parâmetros (medidos) intermediários
%do sistema LFT e reduz a ordem aplicando decomposição SVD seguida
%da decomposição de Kalman.
%structinp=[3 3 6 6];% vetor struct inicial dos parâmetros
%r=size(D22)
%COEF matriz dos coeficientes oriundos dos ajustes quadráticos
%TETA vetor com os parâmetros
function [Mr,structout]= redparMD1(M,structinp,COEF,r);

[AA,Bd,B2,Cd,C2,Ddd,Dd2,D2d,D22]=hinfpar(M,r);
%Montando os deltas dos parâmetros medidos
coef=COEF;
%Montando Delta0
varpar=[]; a0s=coef(1,:)'; varpar=[varpar a0s]; tetar=[]; for k =
1:length(a0s),
    for kk = 1:structinp(k),
        tetar=[tetar; a0s(k)];%diagonal do delta 0
    end
end
Dt0 = diag(tetar);%delta0
%Montando Delta1
varpar=[]; a1s=coef(2,:)'; varpar=[varpar a1s]; tetar=[]; for k =
1:length(a1s),
    for kk = 1:structinp(k),
        tetar=[tetar; a1s(k)];%diagonal do delta 1
    end
end
Dt1 = diag(tetar);%delta1
```

```

%Montando Delta2
varpar=[]; a2s=coef(3,:); varpar=[varpar a2s]; tetar=[]; for k =
1:length(a2s),
    for kk = 1:structinp(k),
        tetar=[tetar; a2s(k)];%diagonal do delta 2
    end
end
Dt2 = diag(tetar);%delta2
%Eliminação dos parâmetros medidos intermediários
[p2,m2]=size(D22); n=length(AA); N=sum(structinp); In=eye(N);
%Formulação auxiliar
F1=inv(In-Dt0*Ddd); F2=F1*Dt0*Dd2; F3=F1*Dt0*Cd; F4=Cd+Ddd*F3;
F5=Ddd*F1; F6=Dd2+Ddd*F2;
%Montando AAA
AAA=AA+Bd*F3;
%Montando o BBd
BBd=[(Bd*F1),zeros(n,N)];
%Montando o BB2
BB2=B2+Bd*F2;
%Montando o CCd
CCd=[Dt1*F4;Dt2*F4];
%Montando o CC2
CC2=C2+D2d*F3;
%Montando o DDdd
DDdd=[[Dt1*F5, In];
      [Dt2*F5,zeros(N)]];
%Montando o DDd2
DDd2=[Dt1*F6;Dt2*F6];
%Montando o DD2d
DD2d =[(D2d*F1), zeros(p2,N)];
%Montando o DD22
DD22=D22+D2d*F2;

NN=2*N;%ordem aumentada da nova LFT

```

```

structin1=[NN]
r=size(DD22); %r=[n_outputs n_inputs]=[p2 m2]

%Método de redução de ordem SVD
%Etapa 1
M11=DDdd;N1=[CCd,DDd2]; P1=[BBd;DD2d];
%Etapa 2
[M11r,N1r,P1r]=f1(M11,N1,P1); NN_novo=size(M11r,1);
%Etapa 3 não é necessária
%Recuperando as partições
DDdd=M11r;
CCd=N1r(1:(NN_novo),1:n); %N1r=[CCd,DDd2];
DDd2=N1r(1:(NN_novo),(n+1):(n+m2));
BBd=P1r(1:n,1:NN_novo);%P2r=[BBd;DD2d];
DD2d=P1r((n+1):(n+p2),1:NN_novo);

M=pck(AAA,[BBd BB2],[CCd;CC2],[DDdd DDd2;DD2d DD22]);
structout=[NN_novo]; structin1=structout;
r=size(DD22); %r=[n_outputs n_inputs]=[p2 m2]
[Mr,structout]= minMD(M,r,structin1); %decomposição de Kalman
structout
function [M1r,M2r,M3r]= f1(M1,M2,M3) %decomposição SVD
    tol=10^(-5);
    Mxx=M1;Nx=M2;Px=M3;
    X=[Mxx,Nx];
    [U,S,V] = svd(X);
    di1 = diag(S)';
    p=min(size(S))-rank(X,tol)
    Mxxtil=U'*Mxx*U;
    Nxtil=U'*Nx;
    Pxtil=Px*U;
    [x,y]=size(Mxxtil);
    Mxxchap=Mxxtil(1:(x-p),1:(y-p));
    M1r=Mxxchap;

```



```

[x,y]=size(Nxtil);
Nxchap=Nxtil(1:(x-p),:);
M2r=Nxchap;
[x,y]=size(Pxtil);
Pxchap=Pxtil(:,1:(y-p));
M3r=Pxchap;

```

#### 8.4.2 ELIMINAÇÃO DE PARÂMETROS MEDIDOS E INCERTOS COM REDUÇÃO DE ORDEM

```

%redparMD2 elimina os parâmetros (medidos e incertos) intermediários
%do sistema LFT e reduz a ordem aplicando decomposição SVD seguida
%da decomposição de Kalman.

```

```

%structinp=[3 3 6 6];% vetor struct inicial dos parâmetros

```

```

%structini=[5 5];%vetor struct inicial das incertezas

```

```

%COEF matriz dos coeficientes oriundos dos ajustes biquadráticos

```

```

%COEFi matriz dos coeficientes oriundos dos ajustes quadráticos

```

```

%r=size(D22)

```

```

%TETA vetor com os parâmetros

```

```

function [Mr,structout]=

```

```

redparMD2(M,structinp,structini,COEF,COEFi,r);

```

```

[AA,Bd,B2,Cd,C2,Ddd,Dd2,D2d,D22]=hinfpar(M,r);

```

```

%Montando os deltas dos parâmetros medidos

```

```

coef=COEF;

```

```

%Montando Delta0

```

```

varpar=[]; a0s=coef(1,:); varpar=[varpar a0s]; tetar=[]; for k =
1:length(a0s),

```

```

    for kk = 1:structinp(k),

```

```

        tetar=[tetar; a0s(k)];%diagonal do delta 0

```

```

    end

```

```

end

```

```

Dt0 = diag(tetar);%delta0

```

```

%Montando Delta1

```

```

varpar=[]; a1s=coef(2,:); varpar=[varpar a1s]; tetar=[]; for k =

```

```

1:length(a1s),
    for kk = 1:structinp(k),
        tetar=[tetar; a1s(k)];%diagonal do delta 1
    end
end
Dt1 = diag(tetar);%delta1

%Montando Delta11
varpar=[]; a11s=coef(3,:); varpar=[varpar a11s]; tetar=[]; for k
= 1:length(a11s),
    for kk = 1:structinp(k),
        tetar=[tetar; a11s(k)];%diagonal do delta 11
    end
end
Dt11 = diag(tetar);%delta11

%Montando Delta2
varpar=[]; a2s=coef(4,:); varpar=[varpar a2s]; tetar=[]; for k =
1:length(a2s),
    for kk = 1:structinp(k),
        tetar=[tetar; a2s(k)];%diagonal do delta 2
    end
end
Dt2 = diag(tetar);%delta2

%Montando Delta12
varpar=[]; a12s=coef(5,:); varpar=[varpar a12s]; tetar=[]; for k
= 1:length(a12s),
    for kk = 1:structinp(k),
        tetar=[tetar; a12s(k)];%diagonal do delta 12
    end
end
Dt12 = diag(tetar);%delta12

```

```

%Montando Delta22
varpar=[]; a22s=coef(6,:); varpar=[varpar a22s]; tetar=[]; for k
= 1:length(a22s),
    for kk = 1:structinp(k),
        tetar=[tetar; a22s(k)];%diagonal do delta 22
    end
end
Dt22 = diag(tetar);%delta22

%Montando os deltas das incertezas
coef=COEFi;
%Montando Delta0i
varpar=[]; a0is=coef(1,:); varpar=[varpar a0is]; tetar=[]; for k
= 1:length(a0is),
    for kk = 1:structini(k),
        tetar=[tetar; a0is(k)];%diagonal do delta0i
    end
end
Dt0i = diag(tetar);%delta0i

%Montando Delta1i
varpar=[]; a1is=coef(2,:); varpar=[varpar a1is]; tetar=[]; for k
= 1:length(a1is),
    for kk = 1:structini(k),
        tetar=[tetar; a1is(k)];%diagonal do delta1i
    end
end
Dt1i = diag(tetar);%delta1i

%Montando Delta2i
varpar=[]; aiis=coef(3,:); varpar=[varpar aiis]; tetar=[]; for k
= 1:length(aiis),
    for kk = 1:structini(k),
        tetar=[tetar; aiis(k)];%diagonal do delta2i
    end
end

```

```

    end
end
Dtii = diag(tetar);%deltaii

%Montando as partições
[p2,m2]=size(D22); n=length(AA); Np=sum(structinp);
Nd=sum(structini); Inp=eye(Np); Ind=eye(Nd);
Bdp=Bd(1:n,1:Np);Bdd=Bd(1:n,(Np+1):(Np+Nd));
Cdp=Cd(1:Np,1:n);Cdd=Cd((Np+1):(Np+Nd),1:n);
Dddpp=Ddd(1:Np,1:Np);Dddpd=Ddd(1:Np
,(Np+1):(Np+Nd));Dddd=Ddd((Np+1):(Np+Nd),1:Np);
Ddddd=Ddd((Np+1):(Np+Nd),(Np+1):(Np+Nd));
Dd2p=Dd2(1:Np,1:m2);Dd2d=Dd2((Np+1):(Np+Nd),1:m2);
D2dp=D2d(1:p2,1:Np);D2dd=D2d(1:p2,(Np+1):(Np+Nd));
%Eliminação dos parâmetros (medidos e incertos)intermediários
%Formulação auxiliar
F0=inv(Inp-Dt0*Dddpp);
F1=inv(Ind-Dt0i*(Ddddd+Dddd*F0*Dt0*Dddpd)); F2=F0*Dt0*Dddpd*F1;
F3=F0+F2*Dt0i*Dddd*F0; F4=F1*Dt0i*Dddd*F0;
F5=F0*Dt0*Dd2p+F2*Dt0i*(Dd2d+Dddd*F0*Dt0*Dd2p);
F6=F1*Dt0i*(Dd2d+Dddd*F0*Dt0*Dd2p);
F7=F0*Dt0*Cdp+F2*Dt0i*(Cdd+Dddd*F0*Dt0*Cdp);
F8=F1*Dt0i*(Cdd+Dddd*F0*Dt0*Cdp); F9=Cdp+Dddpp*F7+Dddpd*F8;
F10=Cdd+Dddd*F7+Dddd*F8; F11=Dddpp*F3+Dddpd*F4;
F12=Dddd*F3+Dddd*F4; F13=Dddpd*F1+Dddpp*F2;
F14=Dddd*F1+Dddd*F2; F15=Dd2p+Dddpp*F5+Dddpd*F6;
F16=Dd2d+Dddd*F5+Dddd*F6;
%Montando AAA
AAA=AA+Bdp*F7+Bdd*F8;
%Montando o BBd
BBd=[(Bdp*F3+Bdd*F4), zeros(n,Np),
(Bdp*F3+Bdd*F4),zeros(n,Np),zeros(n,Np),zeros(n,Nd),(Bdp*F2+Bdd*F1)];
%Montando o BB2
BB2=B2+Bdp*F5+Bdd*F6;

```

```

%Montando o CCd
CCd=[Dt1*F9;Dt11*F9;Dt2*F9;Dt22*F9;Dt12*F9;Dtii*F10;Dt1i*F10];
%Montando o CC2
CC2=C2+D2dp*F7+D2dd*F8;
%Montando o DDdd
DDdd=[ [Dt1*F11, Inp, Dt1*F11, zeros(Np), Inp, zeros(Np, Nd), Dt1*F13];
        [Dt11*F11, zeros(Np), Dt11*F11, zeros(Np), zeros(Np), zeros(Np, Nd), Dt11*F13];
        [Dt2*F11, zeros(Np), Dt2*F11, Inp, zeros(Np), zeros(Np, Nd), Dt2*F13];
        [Dt22*F11, zeros(Np), Dt22*F11, zeros(Np), zeros(Np), zeros(Np, Nd), Dt22*F13];
        [Dt12*F11, zeros(Np), Dt12*F11, zeros(Np), zeros(Np), zeros(Np, Nd), Dt12*F13];
        [Dtii*F12, zeros(Nd, Np), Dtii*F12, zeros(Nd, Np), zeros(Nd, Np), zeros(Nd), Dtii*F14];
        [Dt1i*F12, zeros(Nd, Np), Dt1i*F12, zeros(Nd, Np), zeros(Nd, Np), Ind, Dt1i*F14] ];
%Montando o DDd2
DDd2=[Dt1*F15;Dt11*F15;Dt2*F15;Dt22*F15;Dt12*F15;Dtii*F16;Dt1i*F16];
%Montando o DD2d
DD2d =[(D2dp*F3+D2dd*F4), zeros(p2, Np),
        (D2dp*F3+D2dd*F4), zeros(p2, Np), zeros(p2, Np), zeros(p2, Nd), (D2dp*F2+D2dd*F1)];
%Montando o DD22
DD22=D22+D2dp*F5+D2dd*F6;

NNp=2*Np;NNd=(3*Np+2*Nd); structin1=[NNp,NNd];
r=size(DD22); %r=[n_outputs n_inputs]=[p2 m2]

%Fazendo as novas partições
DDddpp=DDdd(1:NNp,1:NNp);DDddpd=DDdd(1:NNp,(NNp+1):(NNp+NNd));
DDdddp=DDdd((NNp+1):(NNp+NNd),1:NNp);
DDdddd=DDdd((NNp+1):(NNp+NNd),(NNp+1):(NNp+NNd));
CCdp=CCd(1:NNp,1:n);CCdd=CCd((NNp+1):(NNp+NNd),1:n);
DDd2p=DDd2(1:NNp,1:m2);DDd2d=DDd2((NNp+1):(NNp+NNd),1:m2);
BBdp=BBd(1:n,1:NNp);BBdd=BBd(1:n,(NNp+1):(NNp+NNd));
DD2dp=DD2d(1:p2,1:NNp);DD2dd=DD2d(1:p2,(NNp+1):(NNp+NNd));

%Método de redução de ordem SVD
%Etapa 1

```

```

M11=DDddpp;M12=DDddpd;N1=[CCdp,DDd2p]; M21=DDddd;P1=[BBdp;DD2dp];
%Etapa 2
M22=DDddd;N2=[CCdd,DDd2d]; P2=[BBdd;DD2dd];

NNp_novo=NNp; NNp=0; NNd_novo=NNd; NNd=0; while (NNp ~= NNp_novo)
| (NNd ~= NNd_novo)
%Etapa 1
NNp=NNp_novo; NNd=NNd_novo;
[M11r,M12r,N1r,M21r,P1r]=f(M11,M12,N1,M21,P1);
NNp_novo=size(M11r,1)
%Etapa 2
[M22r,M21rr,N2r,M21rr,P2r]=f(M22,M21r,N2,M21r,P2);
NNd_novo=size(M22r,1)
%Etapa 3
M11=M11r;M12=M21rr;N1=N1r; M21=M21rr;P1=P1r;
M22=M22r;N2=N2r;P2=P2r; end
%Recuperando as partições
DDddpp=M11;DDddpd=M12; DDddd=M21;
CCdp=N1(1:NNp_novo,1:n);%N1=[CCdp,DDd2p];
DDd2p=N1(1:NNp_novo,(n+1):(n+m2));
BBdp=P1(1:n,1:NNp_novo); %P1=[BBdp;DD2dp];
DD2dp=P1((n+1):(n+p2),1:NNp_novo); DDddd=M22;
CCdd=N2(1:(NNd_novo),1:n); %N2=[CCdd,DDd2d];
DDd2d=N2(1:(NNd_novo),(n+1):(n+m2));
BBdd=P2(1:n,1:NNd_novo);%P2=[BBdd;DD2dd];
DD2dd=P2((n+1):(n+p2),1:NNd_novo);

%Montando a LFT padrão
%Montado AAA
AAA;
%Montando o BBd
BBd=[BBdp,BBdd];
%Montado o BB2
BB2;

```

```

%Montando o CCd
CCd=[CCdp;CCdd];
%Montado o CC2
CC2;
%Montando o DDdd
DDdd=[ [DDddpp,DDddpd]; [DDdddp,DDdddd] ];
%Montando o DDd2
DDd2=[DDd2p;DDd2d];
%Montando o DD2d
DD2d = [DD2dp,DD2dd];
%Montado o DD22
DD22;

Mr=pck(AAA, [BBd BB2], [CCd;CC2], [DDdd DDd2;DD2d DD22]);
structout=[NNp_novo,NNd_novo]; structin1=structout;
r=size(DD22); %r=[n_outputs n_inputs]=[p2 m2]
M = pck(AAA, [BBd BB2], [CCd;CC2], [DDdd DDd2;DD2d DD22]);
[Mr,structout]= minMD(M,r,structin1); %decomposição de Kalman

function [M1r,M2r,M3r,M4r,M5r]= f(M1,M2,M3,M4,M5) %decomposição SVD
    tol=10^(-5);
    Mxx=M1;Mxy=M2;Nx=M3;Myx=M4;Px=M5;
    X=[Mxx,Mxy,Nx];
    [U,S,V] = svd(X);
    di1 = diag(S)';
    p=min(size(S))-rank(X,tol)
    Mxxtil=U'*Mxx*U;
    Mxytil=U'*Mxy;
    Nxtil=U'*Nx;
    Myxtil=Myx*U;
    Pxtil=Px*U;
    [x,y]=size(Mxxtil);
    Mxxchap=Mxxtil(1:(x-p),1:(y-p));
    M1r=Mxxchap;

```

```
[x,y]=size(Mxytil);
Mxychap=Mxytil(1:(x-p),:);
M2r=Mxychap;
[x,y]=size(Nxtil);
Nxchap=Nxtil(1:(x-p),:);
M3r=Nxchap;
[x,y]=size(Myxtil);
Myxchap=Myxtil(:,1:(y-p));
M4r=Myxchap;
[x,y]=size(Pxtil);
Pxchap=Pxtil(:,1:(y-p));
M5r=Pxchap;
```