

MINISTÉRIO DA DEFESA
EXÉRCITO BRASILEIRO
SECRETARIA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
CURSO DE MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ANDRÉA GARCEZ DE SOUZA

**DIFRAÇÃO POR IRREGULARIDADES DO RELEVO :
TRANSIÇÃO ENTRE TERRA LISA E TERRENO
ACIDENTADO**

Rio de Janeiro

2002

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

ANDRÉA GARCEZ DE SOUZA

**DIFRAÇÃO POR IRREGULARIDADES DO RELEVO :
TRANSIÇÃO ENTRE TERRA LISA E TERRENO
ACIDENTADO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Mauro Soares de Assis - Notório Saber

Rio de Janeiro

2002

©2002

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

Praça General Tibúrcio, 80 - Praia Vermelha

Rio de Janeiro - RJ CEP: 22290 - 270

Ao Instituto Militar de Engenharia estão reservados todos os direitos de propriedade deste exemplar, podendo incluí-lo em base de dados, armazená-lo em computador, micro-filmar ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a divulgação deste trabalho entre bibliotecas, para fins de pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e citada a referência bibliográfica completa.

Os conceitos apresentados neste exemplar são de inteira responsabilidade da autora e do orientador.

S100 Souza, Andréa Garcez de

Difração por Irregularidades do Relevo : Transição entre Terra Lisa e Terreno Acidentado / Andréa Garcez de Souza – Rio de Janeiro : Instituto Militar de Engenharia, 2002.

150 p. : il., graf., tab.

Dissertação (mestrado) – Instituto Militar de Engenharia, 2002.

1. Propagação por Difração 2. Curvatura da Terra 3. Obstáculos do Terreno
4. VHF/UHF.

CDD 530.1

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

ANDRÉA GARCEZ DE SOUZA

**DIFRAÇÃO POR IRREGULARIDADES DO RELEVO :
TRANSIÇÃO ENTRE TERRA LISA E TERRENO
ACIDENTADO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Engenharia Elétrica do Instituto Militar de Engenharia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Ciências em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Mauro Soares de Assis – Notório Saber

Aprovada em 1^o de Novembro de 2002 pela Banca Examinadora:

Prof. Mauro Soares de Assis – Notório Saber/IME – Presidente

Prof. Luiz Alencar Reis da Silva Mello – Dr./PUC-Rio

Prof. José Carlos Araújo dos Santos – Ph.D./IME

Rio de Janeiro

2002

“ Aos meus pais e avós, pelos valores e ensinamentos herdados durante a minha existência; ao mestre Mauro Soares de Assis, pelo apoio e incentivo e, sobretudo, a Deus, pela resistência diante das adversidades. ”

AGRADECIMENTOS

A autora expressa seus sinceros agradecimentos às seguintes pessoas e instituições:

★ Ao Instituto Militar de Engenharia e ao Exército Brasileiro por ter me proporcionado um ensino de qualidade por excelência, envolvendo disciplina, seriedade e dedicação;

★ Ao professor Mauro Soares de Assis pelo seu trabalho interessado e seguro como orientador e, sobretudo, pelo apoio necessário nos momentos mais difíceis;

Aos professores José Carlos Araújo dos Santos, Ernandes Vieira Filho e Luiz Alencar da Silva Mello, por suas disponibilidades e atenções;

★ Ao cap. Marcio Nascimento Bispo pelas valiosas sugestões na elaboração deste trabalho;

★ Aos funcionários e colegas do CETUC/PUC-Rio e DE-3/IME, pela amizade e auxílio prestados de forma irrestrita. Em especial, a Maria de Lourdes Santarem Rodrigues, pelos seus préstimos como secretária do DE-3, e a Maria Lúcia de Castro Junqueira, pelo empréstimo de livros e consulta de periódicos do acervo bibliográfico da biblioteca do CETUC;

★ À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro.

“ Não basta ensinar ao homem uma especialidade, porque assim se tornará uma máquina utilizável e não uma personalidade. É necessário que adquira um sentimento, um senso prático daquilo que vale a pena ser empreendido, daquilo que é belo, do que é moralmente correto. A não ser assim, ele se assemelhará, com seus conhecimentos profissionais, mais a um cão ensinado do que a uma criatura harmoniosamente desenvolvida. Deve aprender a compreender as motivações dos homens, suas quimeras e suas angústias, para determinar com exatidão seu lugar preciso em relação a seus próximos e à comunidade. ”

ALBERT EINSTEIN

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	9
LISTA DE TABELAS	11
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS	12
LISTA DE SIGLAS	14
1 INTRODUÇÃO	17
1.1 Motivação	17
1.2 Objetivos	18
1.3 Roteiro da Dissertação	20
2 TEORIA DA DIFRAÇÃO SOBRE A TERRA ESFÉRICA	22
2.1 Relato Histórico	22
2.2 A Série dos Harmônicos Zonais	28
2.3 A Transformação de Watson	34
2.4 A Série dos Resíduos	37
2.4.1 A Solução de Van der Pol e Bremmer	37
2.4.2 A Solução de Fock	42
2.4.3 A Solução de Wait	45
2.4.4 A Solução de Furutsu	48
2.5 Limite de Aplicação da Óptica Geométrica e da Série dos Resíduos	53
2.5.1 Região de Visibilidade do Transmissor	53
2.5.2 Região de Sombra Geométrica do Transmissor	55
3 DIFRAÇÃO SOBRE A CURVATURA DA TERRA LISA	58
3.1 Introdução	58
3.2 Cálculo da Atenuação pela Série dos Resíduos	59
3.3 Transição entre Luz e Sombra	68
4 DIFRAÇÃO PELAS IRREGULARIDADES DO RELEVO	76
4.1 Introdução	76
4.2 Critério para Desprezar o Efeito do Obstáculo	77
4.3 Ganho de Obstáculo	80
4.4 Teoria da Difração de Fresnel-Kirchhoff	89
4.5 A Série dos Resíduos para um Obstáculo “Gume de Faca” Superposto ao Relevo	92
4.6 Cálculo da Folga do Percurso entre os Terminais e o Topo do Obstáculo (H')	97
4.7 Transição entre Terra Lisa e Terreno Acidentado	99
4.7.1 Fórmulas Básicas	99
4.7.2 Considerações Práticas	100
4.7.3 Discussão dos Resultados	102

5	CONCLUSÕES	113
5.1	Principais Resultados	113
5.2	Trabalhos Futuros	116
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	118
7	APÊNDICES	122
7.1	APÊNDICE 1: FUNÇÕES DE AIRY	123
7.1.1	Definição	123
7.1.2	Cálculo de A_i e B_i	125
7.1.3	Cálculo de A'_i e B'_i	127
7.1.4	Raízes das Funções de Airy	129
7.2	APÊNDICE 2: PROPRIEDADES ELÉTRICAS DO SOLO	135
7.2.1	A Condutividade do Solo	135
7.2.2	Considerações Práticas	137
7.3	APÊNDICE 3: GRWAVE	139
7.3.1	Procedimentos de Cálculo	139
7.3.2	Variáveis	140
7.3.3	Saída de Dados do Programa “Grwave”	143
7.4	APÊNDICE 4: INTEGRAIS DE FRESNEL	145
7.4.1	Definição	145
7.4.2	Propriedades	145
7.4.3	Cálculo de $C(x)$ e $S(x)$	146

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIG. 2.1	Geometria esférica da terra com o elemento de corrente $I dl$ situado em $\theta = 0^0$ e $r = b$ ao longo do eixo z acima da esfera de raio a . O ponto de observação está posicionado em P , definido pelas coordenadas r, θ, ϕ e a uma distância R de $I dl$	29
FIG. 2.2	Contorno C e suas singularidades isoladas no interior de C_1, C_2 e C_3	35
FIG. 2.3	Transformação do percurso de integração no plano- n complexo	36
FIG. 2.4	Dipolo elétrico transmissor sobre uma terra esférica lisa e homogênea	39
FIG. 2.5	Geometria do percurso obstruído por um obstáculo “gume de faca” de altura h_0 superposto ao terreno	46
FIG. 2.6	Geometria do relevo da teoria de Furutsu	49
FIG. 2.7	Terra esférica homogênea com percurso obstruído por um obstáculo “gume de faca” de altura h , segundo o modelo de Furutsu	51
FIG. 2.8	Horizonte radioelétrico [$d_h = \sqrt{(a + h)^2 - a^2} \approx \sqrt{2ah}$]	53
FIG. 2.9	Comportamento do campo dado pela série dos resíduos e pela óptica geométrica	54
FIG. 3.1	Geometria da terra esférica lisa e homogênea. (a) Modelo de Wait (b) Modelo de Furutsu	61
FIG. 3.2	Cálculo da atenuação em relação ao espaço livre pela série dos resíduos ..	65
FIG. 3.3	Geometria aplicada no cálculo da folga do percurso	69
FIG. 3.4	Curvas de atenuação e do horizonte óptico total das antenas	71
FIG. 3.5	Faixa de transição no contorno da penumbra geométrica do transmissor .	72
FIG. 3.6	Horizonte óptico das antenas transmissora ($dh_t = \sqrt{2a_e h_t}$), receptora ($dh_r = \sqrt{2a_e h_r}$) e horizonte total das duas antenas ($dh_{tr} = dh_t + dh_r$) ...	73
FIG. 4.1	(a) Difração por um obstáculo “gume de faca” de altura h_c superposto à terra plana. (b) Geometria para a aplicação da teoria da imagem	79
FIG. 4.2	Ganho de obstáculo pela óptica geométrica (Teoria dos Quatro Raios) ...	81

FIG. 4.3	Modelo do obstáculo “gume de faca” superposto a uma terra esférica lisa e homogênea	82
FIG. 4.4	Estimativas do “ganho de obstáculo” pela série dos resíduos.....	85
FIG. 4.5	Geometria da difração por um obstáculo “gume de faca” aplicada à teoria de Fresnel-Kirchhoff.....	90
FIG. 4.6	Atenuação relativa ao espaço livre (Teoria de Fresnel-Kirchhoff)	92
FIG. 4.7	Geometria da terra esférica lisa e homogênea com um obstáculo “gume de faca” superposto ao relevo. (a) Solução de Wait (b) Solução de Furutsu	93
FIG. 4.8	Geometria para o cálculo da folga do percurso entre os terminais e o topo do obstáculo.....	97
FIG. 4.9	Geometria cartesiana da folga do percurso entre os terminais e o topo do obstáculo na condição de antenas elevadas	98
FIG. 4.10	Curvas de atenuação em função de H'/R' ($f = 100 MHz$)	103
FIG. 4.11	Curvas de atenuação em função de H'/R' ($f = 300 MHz$)	104
FIG. 4.12	Curvas de atenuação em função de H'/R' ($f = 1000 MHz$)	105
FIG. 4.13	Curvas de Atenuação em função de H'/R' ($f = 3000 MHz$)	106
FIG. 4.14	Análise da superposição das faixas de penumbra dos terminais e do obstáculo ($f = 300 MHz$, $h_{t,r} = 50 m$) – (a) $H'/R' = 0.6$ e $h_c \approx 123 m$. (b) $H'/R' = 1$ e $h_c \approx 165 m$	109
FIG. 4.15	Análise da superposição das faixas de penumbra dos terminais e do obstáculo ($f = 1000 MHz$, $h_{t,r} = 50 m$) – (a) $H'/R' = 0.6$ e $h_c \approx 87 m$. (b) $H'/R' = 0.68$ e $h_c \approx 95 m$	110
FIG. 7.1	Contornos de integração no plano complexo Z . (a) $\Gamma_1 : (\infty e^{j2\pi/3} \rightarrow \infty)$ e (b) $\Gamma_2 : (\infty e^{-j2\pi/3} \rightarrow \infty)$	124
FIG. 7.2	Funções de Airy e suas derivadas	132
FIG. 7.3	Integrais de Fresnel ($y=C(x),y=S(x)$).....	150

LISTA DE TABELAS

TAB. 3.1	Enlace 1 – $f = 30 \text{ MHz}$, $\varepsilon_r = 4$, $\sigma = 1 \text{ S/km}$, PV , $h_t = h_r = 0 \text{ m}$	66
TAB. 3.2	Enlace 2 – $f = 100 \text{ MHz}$, $\varepsilon_r = 10$, $\sigma = 10 \text{ S/km}$, PH , $h_t = h_r = 50 \text{ m}$	66
TAB. 3.3	Enlace 3 – $f = 300 \text{ MHz}$, $\varepsilon_r = 10$, $\sigma = 10 \text{ S/km}$, PV , $h_t = h_r = 100 \text{ m}$...	67
TAB. 3.4	Enlace 4 – $f = 1000 \text{ MHz}$, $\varepsilon_r = 30$, $\sigma = 20 \text{ S/km}$, PH , $h_t = h_r = 150 \text{ m}$.	67
TAB. 3.5	Enlace 5 – $f = 3000 \text{ MHz}$, $\varepsilon_r = 30$, $\sigma = 20 \text{ S/km}$, PV , $h_t = h_r = 200 \text{ m}$..	68
TAB. 3.6	Cálculo da distância D_{km} correspondente à folga $H = 0.6 R (E = E_0)$	70
TAB. 3.7	Cálculos da atenuação, da largura (ℓ) da faixa de penumbra e do horizonte óptico total ($d_{ht,r}$) dos pares de antenas terminais	74
TAB. 4.1	Ganho de Obstáculo – $f = 300 \text{ MHz}$, $h_{t,r} = 50 \text{ m}$, $a_e = 8500 \text{ km}$, $q = \infty$.	86
TAB. 4.2	Ganho de Obstáculo – $d = 150 \text{ km}$, $h_{t,r} = 100 \text{ m}$, $a_e = 8500 \text{ km}$, $q = \infty$..	87
TAB. 4.3	Ganho de Obstáculo – $f = 100 \text{ MHz}$, $d = 50 \text{ km}$, $R = 194 \text{ m}$, $a_e = 8500 \text{ km}$, $q = \infty$	88
TAB. 4.4	Valores aproximados de altura e horizonte do obstáculo ($H' = 0.6R'$, $A_R = A_{TFK}$)	111
TAB. 7.1	$ t_s^0 $ e $ t_s^\infty $ ($s \leq 5$)	129
TAB. 7.2	Funções de Airy A_i e B_i	133
TAB. 7.3	Derivadas A'_i e B'_i das Funções de Airy	134
TAB. 7.4	Constantes elétricas do solo	136
TAB. 7.5	Variação do parâmetro q	137
TAB. 7.6	Arquivo de entrada de dados do usuário	142
TAB. 7.7	Integrais de Fresnel	149

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

A_a	– Atenuação adicional devida à propagação por difração
A_b	– Atenuação básica de transmissão
A_0	– Atenuação em espaço livre
A_R	– Atenuação relativa ao espaço livre dada pela série dos resíduos
a_e	– Raio equivalente da terra
$A_i(t)$ e $B_i(t)$	– Funções de Airy
c	– Velocidade de propagação em espaço livre
$C(\nu_0)$ e $S(\nu_0)$	– Integral cosseno e seno de Fresnel
$dh_{t,r}$	– Horizonte óptico de cada uma das antenas terminais
dh_{tr}	– Horizonte óptico total dos terminais ($dh_t + dh_r$)
dh_c	– Horizonte óptico do obstáculo
E	– Intensidade de campo elétrico
$F(\nu_0)$, $F_d(u_c)$	– Integral complexa de Fresnel
f	– Frequência de operação
$f_s(y_{t,r})$	– Fator ganho de altura das antenas terminais
G_{obs}	– Ganho de obstáculo
H	– Folga ou obstrução do percurso
H'/R'	– Relação entre a folga do percurso (terminal-topo do obstáculo) e o raio da primeira zona de Fresnel
$h_n^{(1)}$ e $h_n^{(2)}$	– Funções de Hankel esféricas de primeira e segunda espécie e de ordem n
h_0 , h_c	– Altura do obstáculo
Idl	– Momento de corrente do dipolo transmissor
k	– Constante de propagação
ℓ	– Largura da faixa de penumbra
NTS	– Número de termos da série dos resíduos
$N_{m,n}$	– Fator de normalização
$P_n(\cos \theta)$	– Harmônicos zonais expressos pelo polinômio de Lagrange
PV	– Polarização vertical
PH	– Polarização horizontal
q	– Parâmetro característico do solo

$\hat{S}_{n,m}$	– Coeficiente de espalhamento ou de conversão dos modos m e n (solução de Wait)
$T^{(3)}(c_2)_{t_4,t_2}$	– Fator ganho de obstáculo (solução de Furutsu)
$t_s(q)$	– Raízes das funções de Airy
U	– Campo Hertziano
w	– Frequência angular
x	– Distância numérica entre os terminais
x_0, x_c	– Distância numérica entre o obstáculo e os terminais
$y_{t,r}$	– Altura numérica das antenas terminais
y_0, y_c	– Altura numérica do obstáculo
Z	– Impedância de superfície
ε	– Permissividade dielétrica do meio
Γ	– Contorno de integração de Airy
Δ	– Impedância de superfície normalizada
δ	– Constante do solo (solução de Pol e Bremmer)
η	– Impedância intrínseca ou característica do meio
λ	– Comprimento de onda
μ	– Permeabilidade magnética do meio
ν_0	– Parâmetro de Fresnel
σ	– Condutividade elétrica do meio
$\nabla^2\varphi$	– Laplaciano do escalar φ
χ_d	– Distância numérica entre os terminais (solução de Pol e Bremmer)
$\chi_{h_{t,r}}$	– Altura numérica das antenas terminais (solução de Pol e Bremmer)
$\omega(t)$	– Integral de Airy

LISTA DE SIGLAS

<i>CCIR</i>	– Comitê Consultivo Internacional de Rádio
<i>GRWAVE</i>	– Ground Wave Program
<i>LF</i>	– Low Frequency
<i>UHF</i>	– Ultra High Frequency
<i>UIT</i>	– União Internacional de Telecomunicações
<i>VHF</i>	– Very High Frequency
<i>VLf</i>	– Very Low Frequency

RESUMO

A análise da difração pelas características do relevo do terreno baseia-se em uma formulação integral rigorosa e de forma analítica complicada, tal que a solução do problema apresenta certas dificuldades matemáticas que tornam a análise em questão bastante complexa. O grande número de parâmetros envolvidos na formulação teórica e a natureza aleatória do relevo, em forma e distribuição, impossibilitam a definição de um modelo matemático mais realístico que possa ser aplicado a qualquer caso. Portanto, modelos idealizados e de soluções mais simplificadas procuram estabelecer uma estimativa razoável da atenuação nas situações reais, facilitando a obtenção de resultados numéricos diretamente aplicáveis a problemas práticos de engenharia.

Nesse contexto, o objetivo deste trabalho consiste em analisar a difração pela curvatura esférica da terra e por obstáculos do terreno nas faixas de frequências em VHF e UHF. Na discussão do tema proposto, o enfoque principal do estudo realizado baseou-se em fixar um critério de transição entre terra lisa (relevo suave) e terreno acidentado. Dentre as soluções aproximadas propostas pelas teorias clássicas de propagação, o método de cálculo implementado nesta análise adotou a formulação da série dos resíduos, definida segundo a notação de diferentes autores.

Através do conceito de “ganho de obstáculo” foi estabelecida a condição para ignorar o efeito do obstáculo, atribuindo-se unicamente à curvatura da terra a parcela significativa no cálculo da atenuação. Por outro lado, o obstáculo poderá alterar substancialmente o comportamento da energia do sinal que se propaga sobre a terra, tal que o relevo possa ser caracterizado como irregular.

Em especial, uma análise particularmente importante na definição do critério avalia a natureza do campo associado à faixa de transição no contorno da penumbra geométrica, entre as regiões de visibilidade e sombra do transmissor. Resultados obtidos desta análise traduziram numericamente o caráter local do campo nesta região de transição. Estes resultados foram importantes para interpretar o comportamento da atenuação do sinal pelas irregularidades do terreno, quando então foi estabelecido o critério de transição entre os relevos suave e acidentado.

ABSTRACT

The diffraction analysis by the terrain features is based on a rigorous integral formulation and of complicated analytical form, such that the solution of problem presents certain mathematical difficulties which become the analysis in question enough complex. The great number of parameters involved in the theoretical formulation and the random nature of the relief, in shape and distribution, disable the definition of a more realistic mathematical model that can be applied to any case. Therefore, idealized models and of more simplified solutions look for to establish a reasonable estimate of the attenuation in the real cases, facilitating the attainment of numerical results directly applicable to engineering practical problems.

In this context, the purpose of this work consists of analyzing the diffraction around the earth's spherical curvature and by terrain obstacles for frequencies in the VHF and UHF bands. In the discussion of the considered subject, the main focus of the carried through study was based on fixing a criterion of transition between smooth earth and irregular ground. From among the approximate solutions proposed for the classical theories of propagation, the calculation method implemented in this analysis adopted the formulation of the residues series, defined according to the notation of distinct authors.

Through the concept of "obstacle gain" a condition was established to ignore the effect of the obstacle, attributing itself solely to the earth's curvature the significant parcel in the attenuation calculation. On the other hand, the obstacle will be able to change substantially the behaviour of the signal energy that if propagates over the terrestrial surface, such that the relief can be characterized as irregular.

In special, an particularly important analysis in the definition of the criterion evaluates the nature of the field associated with the transition zone on the boundary of the geometrical penumbra, from the light to the shadow of the transmitter. Results obtained of this analysis translated numerically the local character of the field in this transition strip. These results had been important to interpret the behaviour of the signal attenuation by the ground irregularities, when then the criterion of transition between smooth and irregular grounds was established.

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

A análise da difração das ondas eletromagnéticas em enlaces radioelétricos na presença da terra é um problema bastante complexo. Teorias clássicas de propagação (FOCK, 1965; FURUTSU, 1959; HUFFORD, 1952) apresentam uma solução geral baseada em uma formulação integral extremamente rigorosa e de forma analítica complicada, tal que o problema da difração pelas características do relevo do terreno apresenta certas dificuldades matemáticas na análise de sua solução.

O grande número de variáveis envolvidas na formulação teórica e a natureza aleatória da forma e distribuição das irregularidades do relevo levam a uma maior complexidade analítica do problema. As dificuldades apresentadas na análise do problema da difração, considerando os efeitos das irregularidades do terreno e a complexidade das soluções, impossibilitam a definição de um modelo matemático preciso e aplicável em qualquer caso, diretamente em cálculos práticos usuais na obtenção de resultados numéricos. Portanto, a análise em questão tem de ser feita em condições altamente idealizadas.

Modelos matemáticos propostos pela teoria da difração idealizam formas geométricas particulares na representação do perfil do terreno. Sendo assim, a elevação natural do relevo pode ser vista como um semi-plano infinito do tipo “gume de faca” (*Knife-Edge*) (WAIT e SPIES, 1968a) ou, até mesmo, ser representada por modelos com geometrias cilíndricas (WAIT, 1959; WAIT e SPIES, 1968b) e esféricas (BREMNER e VANDER POL, 1938; 1939). Essas soluções particulares procuram estabelecer uma estimativa razoável da atenuação nas situações reais. No entanto, à medida que o modelo teórico se aproxima de um modelo mais realístico, as soluções se tornam mais complexas, o que dificulta a aplicação prática dos resultados obtidos.

Modelos idealizados mais simplificados podem ser obtidos através do uso de aproximações aplicáveis na análise de cada caso particular. Desta forma, partindo de soluções gerais mais complicadas, procura-se determinar soluções assintóticas aproximadas em casos especiais que simplificam os cálculos de propagação e demandam um grande interesse prático. O ideal é que estas simplificações efetuadas sobre soluções analíticas mais rigorosas representem um compromisso entre o formalismo matematicamente tratável e a precisão desejável, sem contudo comprometer as estimativas dos cálculos de propagação e concordando resultados teóricos com dados práticos experimentais.

Devido às condições supostas na obtenção das soluções aproximadas, a inobservância das limitações inerentes a cada caso particular podem extrapolar a região de validade das aproximações e conduzir a erros inaceitáveis. Entretanto, as limitações impostas nestas aproximações não invalidam o mérito dessas soluções simplificadas que, quando empregadas corretamente, fornecem resultados numéricos bastante precisos e diretamente aplicáveis à engenharia.

Nesse contexto, é usual caracterizar o relevo em duas condições distintas: relevo suave e relevo acidentado. Na primeira condição, tem-se a solução da terra plana (NIESSEN, 1930; NORTON, 1935; SOMMERFELD, 1909 e 1926) ou esférica (BREMMER, 1949; NORTON, 1941) perfeitamente lisa. Na segunda condição, aplica-se a teoria da difração pelas irregularidades do relevo, definida formalmente por Fresnel-Kirchoff (ASSIS, 1979). No entanto, na análise das soluções propostas pelos novos modelos simplificados ainda não existe um procedimento que permita estabelecer a transição da terra lisa à condição de terreno acidentado.

A motivação do presente trabalho consiste na necessidade de se fixar um critério que defina a transição entre relevo suave e relevo acidentado. Esta questão consta em um programa de estudos da UIT¹ e tem importância na caracterização das condições de propagação sob a influência apenas da curvatura da terra lisa (relevo suave), sob o efeito combinado da terra e do obstáculo (transição), ou ainda, considerando o efeito único da difração pelas irregularidades do percurso (relevo acidentado). Resultados aqui obtidos com a abordagem do tema proposto representa uma contribuição relevante na análise de enlaces radioelétricos que operam por difração.

1.2 OBJETIVOS

A análise que este trabalho se propõe em realizar trata o problema da difração pela curvatura da terra e por obstáculos isolados do terreno na faixa de frequências em VHF e UHF. Nesta discussão, a terra é imaginada ser uma esfera lisa e perfeita, com os parâmetros elétricos do solo² supostos constantes dentro das distâncias usuais dos enlaces radioelétricos. Em uma análise mais simplificada, para frequências superiores a 30 MHz é possível introduzir algumas aproximações adicionais e o cálculo da atenuação pode ser feito independentemente da polarização e das características elétricas do solo.

¹ União Internacional de Telecomunicações.

² Condutividade e permissividade dielétrica do meio.

No que diz respeito à atmosfera terrestre, não será considerado o efeito da refração ionosférica. O estudo ficará restrito à análise das condições de propagação em um meio homogêneo e estratificado, desde que seja introduzido o conceito de raio equivalente da terra. Em termos práticos, supõe-se uma atmosfera padrão ($\kappa = 4/3$), o que corresponde a um raio equivalente terrestre de 8500 Km.

Nesse contexto, o principal objetivo desta dissertação consiste em definir um critério de transição entre os relevos suave e acidentado. Na discussão do problema proposto, o estudo envolveu:

- a) A análise criteriosa das formas aproximadas de soluções gerais mais rigorosas propostas pelas teorias clássicas de propagação. Dentre estas soluções aproximadas aplicáveis a cálculos práticos de engenharia, optou-se em utilizar a formulação da série dos resíduos, válida tanto na região de visibilidade, quanto na região de sombra do transmissor. Esta solução é definida segundo a notação de diversos autores;
- b) A análise de modelos idealizados na representação do perfil do relevo. A geometria da terra é suposta ser uma esfera lisa e homogênea. As irregularidades do terreno não são discutidas em termos estatísticos e a análise é restrita ao estudo do modelo teórico simplificado de um obstáculo “gume de faca”. Para facilitar a geometria do problema, este modelo teórico não considera as dimensões do obstáculo no sentido de propagação. Simplificações são obtidas na solução numérica supondo que o obstáculo seja superposto no meio do percurso entre as antenas transmissora e receptora;
- c) O cálculo da atenuação considerando o efeito da difração pela curvatura da terra e por obstáculos do terreno. Resultados numéricos obtidos incluem valores práticos do raio equivalente da terra, frequência de operação, constantes do solo, polarização e alturas das antenas terminais;
- d) A definição e a análise da faixa de transição no contorno da penumbra geométrica, entre as regiões de visibilidade e sombra do transmissor. Procurou-se investigar a interação existente entre o feixe de transmissão e esta faixa de transição;
- e) A discussão do conceito de “ganho de obstáculo”. Através desta definição é estabelecido o critério para que o obstáculo possa ser ignorado e o efeito da difração seja atribuído unicamente à curvatura da terra lisa;
- f) O cálculo da folga do percurso entre os terminais e o topo do obstáculo. Supondo antenas terminais de mesma altura e simétricas à geometria do problema, esta folga é medida de forma precisa no ponto de reflexão;

g) A análise comparativa dos resultados dos cálculos da atenuação obtidos pela teoria rigorosa de Fresnel-Kirchoff e pelo método da série dos resíduos. Com base nestes resultados e levando em conta o raio da primeira zona de Fresnel, assim como a folga do percurso entre os terminais e o topo do obstáculo, é proposto o critério de transição entre relevo suave e relevo acidentado.

1.3 ROTEIRO DA DISSERTAÇÃO

Dentro dos objetivos estabelecidos para o presente trabalho, esta dissertação é estruturada em cinco capítulos organizados segundo o roteiro apresentado a seguir, com uma breve descrição do conteúdo de cada capítulo.

Este primeiro capítulo, de caráter introdutório, discute o que motivou o tema proposto e apresenta os principais objetivos deste trabalho de dissertação.

O capítulo 2 define a formulação matemática e introduz os principais conceitos da teoria da difração das ondas de rádio sobre a terra esférica. Um breve histórico relata a evolução das soluções gerais propostas para a análise do problema da difração sobre a curvatura da terra. Discute-se desde a solução mais rigorosa dos harmônicos zonais até a solução aproximada da série dos resíduos, formulada segundo a notação de diversos autores. No final do capítulo é estabelecido o limite de aplicação prática das soluções existentes, levando em conta o critério que define a separação entre as regiões de interferência e de difração do transmissor.

O capítulo 3 trata a difração sobre a curvatura da terra lisa e homogênea. O método de cálculo da atenuação é baseado na formulação da série dos resíduos e os resultados numéricos são obtidos para valores práticos das variáveis envolvidas no problema. Um enfoque especial é dado na definição da faixa de transição na região da penumbra geométrica. A análise da interação existente entre o feixe de transmissão e esta faixa de penumbra será uma etapa crucial no entendimento do critério a ser estabelecido para definir a transição entre os relevos suave e acidentado.

No capítulo 4 são apresentados os resultados da análise que considera o efeito combinado da difração pela curvatura da terra lisa e por obstáculos do relevo. Discute-se o conceito de “ganho de obstáculo” e, a partir desta definição, é estabelecido o critério para desprezar o efeito do obstáculo. Uma análise comparativa dos cálculos da atenuação obtidos pela teoria rigorosa de Fresnel-Kirchoff e pelo método da série dos resíduos define o critério de transição entre relevo suave e relevo acidentado.

O capítulo 5 faz uma apreciação sumária dos tópicos abordados, relacionando os principais resultados obtidos neste trabalho de dissertação. No final do capítulo são sugeridas algumas questões para pesquisas futuras, de forma a complementar os resultados obtidos nesta análise e dar continuidade ao estudo realizado pelo presente trabalho.

Ao leitor interessado na análise em profundidade dos métodos de cálculo e demais tópicos associados ao tema proposto neste trabalho, são apresentados alguns apêndices e uma extensa bibliografia no final da dissertação.

2 TEORIA DA DIFRAÇÃO SOBRE A TERRA ESFÉRICA

Este capítulo define a notação matemática e introduz os principais conceitos da teoria da difração das ondas de rádio, levando em conta os efeitos da curvatura da terra. Soluções rigorosas que formulam o problema da difração na condição idealizada de uma terra esférica lisa e homogênea são apresentadas. A análise dessas formulações teóricas revelam a complexidade da questão abordada.

Soluções de formas analíticas mais simplificadas adotadas por diferentes autores são discutidas. O mérito dessas soluções aproximadas consiste na sua aplicação em cálculos práticos usuais de engenharia, incluindo várias condições e parâmetros de operação dos enlaces radioelétricos. Uma generalização dessas soluções incorporam o efeito das irregularidades do terreno.

No final do capítulo é delimitada a região de validade das diversas soluções existentes. A seguir, a discussão é iniciada com um breve histórico da evolução das soluções propostas para a análise do problema da difração sobre a curvatura da terra.

2.1 RELATO HISTÓRICO

As equações fundamentais da teoria do eletromagnetismo, enunciadas por James Clerk Maxwell em 1864, demonstraram matematicamente a possibilidade de propagação das ondas eletromagnéticas. Posteriormente, experimentos conduzidos por Hertz (1887) e Marconi (1897) confirmaram as previsões de Maxwell. Esta descoberta estabeleceu os fundamentos da radiocomunicação e constitui o marco inicial da história da propagação.

Várias especulações surgiram a respeito dos mecanismos de propagação das ondas eletromagnéticas. Com base nas equações formuladas por Maxwell, cientistas da época se interessaram em investigar sobre o assunto. Naquele tempo, os efeitos da ionosfera ainda não haviam sido discutidos. Uma das justificativas encontradas pelos cientistas sugeriu que os mecanismos de propagação estariam associados com ondas guiadas ao longo da superfície terrestre. Em 1907, estas ondas guiadas foram designadas por Zenneck (ZENNECK, 1907) como “ondas de superfície”. Esse autor supôs que o comportamento da onda de superfície estaria diretamente relacionado com o seu fator de atenuação, o qual dependeria da distância do enlace de propagação, da sua frequência de operação e da natureza do solo.

Outras tentativas para explicar os mecanismos de propagação sobre a superfície terrestre apoiaram-se em alguns modelos teóricos. Inicialmente, propuseram o modelo hipotético de propagação em espaço livre¹. No entanto, as condições ideais de espaço livre são impossíveis de ocorrerem, pois na prática haverá uma atmosfera densa, acidentes naturais e artificiais do relevo e a própria superfície terrestre que provocarão efeitos de reflexão, absorção ou ambos nas ondas em propagação. Portanto, ao modelo idealizado de propagação em espaço livre deveriam ser incorporados os efeitos da não homogeneidade da atmosfera terrestre e a perturbação causada pela presença da terra.

Enquanto a análise do problema foi consideravelmente simplificada em condições de espaço livre, dificuldades matemáticas surgiram sob condições de propagação afetada pela presença da terra. O grande número de variáveis ² envolvidas no estudo dos cálculos de propagação e a natureza aleatória da forma e distribuição das irregularidades do relevo levaram a uma maior complexidade analítica do problema. Uma solução geral baseada em uma formulação integral rigorosa e de forma analítica complicada impossibilitaria a definição de um modelo matemático preciso e aplicável em qualquer caso, diretamente em cálculos práticos usuais para a obtenção de resultados numéricos.

A análise da evolução histórica das soluções existentes demonstra que o problema em questão foi tratado em condições altamente idealizadas, com a complexidade do caso geral gradativamente contornada através da abordagem de casos particulares. Soluções propostas pelas teorias clássicas de propagação enquadram-se em dois segmentos:

- a) Soluções obtidas partindo da suposição que a propagação se faz em presença da terra considerada plana;
- b) Soluções obtidas supondo que a propagação se faz em presença de uma terra esférica.

No modelo de terra plana, as pequenas distâncias envolvidas nos enlaces radioelétricos permitiriam ignorar os efeitos da curvatura da terra e o problema seria mais facilmente analisado em comparação com a terra suposta esférica. A solução formal para a terra plana e perfeitamente lisa teve a sua primeira contribuição nos trabalhos apresentados por

¹ A propagação em espaço livre é aquela realizada no vácuo ou em uma atmosfera ideal, na ausência de qualquer obstáculo que provoque a absorção ou reflexão da energia que se propaga.

² A formulação matemática da teoria da difração em presença da terra envolve parâmetros que relacionam a frequência de operação das ligações radioelétricas, as características geométricas dos enlaces (distância entre o transmissor e o receptor, alturas das antenas, raio de curvatura da terra e do obstáculo), a polarização da onda transmitida, a rugosidade, as propriedades elétricas do solo e a não homogeneidade da atmosfera terrestre.

SOMMERFELD (1909 e 1926), cuja formulação integral motivou inúmeras publicações nas décadas de 20 e 30. Dentre estes trabalhos que relacionam a teoria da terra plana, podem ser citadas as contribuições de WEYL (1919), NIESSEN (1930) e WISE (1931). No entanto, coube a NORTON (1935) apresentar um método gráfico, resultando em um conjunto de curvas que permitem o cálculo imediato da intensidade de campo, com aplicações em problemas práticos de engenharia.

As maiores distâncias estabelecidas pelos enlaces radioelétricos despertaram o interesse nas teorias relacionando o modelo da terra esférica. A etapa seguinte na análise do problema consistiu em introduzir o efeito da curvatura da terra. Dentre os diversos trabalhos publicados, destacou-se os estudos pioneiros de WATSON (1918 e 1919) para o caso particular de uma terra esférica lisa condutora perfeita.

A solução rigorosa para o problema da difração sobre a curvatura da terra esférica foi dada pela série dos harmônicos zonais, obtida no início do século passado por POINCARÉ (1904). No entanto, certos aspectos numéricos da solução do problema ainda não haviam sido completamente resolvidos, pelo fato desta série convergir muito lentamente, não se prestando para cálculos práticos. Por esta razão, por um longo período foi impossível obter resultados numéricos com uma precisão razoável. Em 1922, Nicholson qualificou esta questão como a mais complicada da ciência física matemática daquele tempo.

O mérito da contribuição de Watson consistiu em introduzir uma transformação no plano complexo, na qual a série original dos harmônicos zonais seria convertida em uma série de resíduos ³ de convergência bem mais rápida. No entanto, a forma melhorada da solução teórica de Watson ainda se apresentava insatisfatória em alguns aspectos, sendo de forma analítica ainda muito complicada e de aplicabilidade restrita.

A fim de tornar a solução formal de Watson adaptável para um tratamento numérico, certas aproximações seriam necessárias. Vários autores se interessaram nessa linha de pesquisa, sobressaindo entre os diversos trabalhos publicados as soluções apresentadas por BREMMER e VAN DER POL (1937; 1938; 1939) para o caso específico de uma terra esférica lisa e homogênea de condutividade finita.

Segundo a teoria formulada por Bremmer e Van der Pol, a aplicação do método clássico da “transformação de Watson” resultaria em uma integral (a integral de contorno de Watson). Apesar do rigor matemático desses autores, a integral de Watson poderia ser resolvida através de duas soluções de grande interesse prático. Uma dessas soluções corresponde à aproximação da óptica geométrica, válida apenas na região de visibilidade

³ Cada termo da série obtida após a “transformação de Watson” corresponde ao resíduo de um pólo complexo, daí a denominação de “série dos resíduos”.

do transmissor ⁴. No entanto, neste espaço iluminado pela antena transmissora interferências podem ocorrer, devido a interação existente entre as ondas direta e refletida no solo. Como interessa apenas a análise do fenômeno da difração pura⁵, esta solução foge aos propósitos estabelecidos para o presente trabalho. Consequentemente, sem interesse para o escopo desta dissertação.

A solução mais geral da integral de Watson leva à série dos resíduos, sem restrições quanto a sua aplicação e válida tanto na região iluminada ou de visibilidade, como na região de sombra do transmissor ⁶. No entanto, à medida que o receptor aproxima-se do horizonte do transmissor e penetra na região de visibilidade, a utilização de apenas um termo da série reduz a precisão dos resultados. Neste caso, o número de termos a serem considerados para tornar os cálculos mais precisos aumenta de forma significativa. Desta forma, o cálculo laborioso nesta região resulta em uma convergência crítica da série dos resíduos, dificultando substancialmente a aplicação prática desta solução.

Sob o ponto de vista prático, a série dos resíduos aplica-se mais precisamente quando o receptor encontra-se na região da sombra geométrica, além do horizonte do transmissor⁷. Nesta situação, a série dos resíduos é rapidamente convergente e o cálculo pode ser substancialmente simplificado com apenas um termo da série que, na maioria dos casos, é suficiente para computar o valor da intensidade de campo.

Apesar do formalismo nas soluções obtidas por Bremmer e Van der Pol, esses autores procuraram apresentar resultados diretamente aplicáveis à engenharia, advindo daí o grande mérito da solução. BREMMER (1949) apresentou um desenvolvimento teórico com fórmulas úteis para cálculos numéricos abrangendo diferentes condições de operação

⁴ De modo mais rigoroso, a validade é restrita à zona de interferência do transmissor, definida como a região entre as antenas transmissora e receptora, na qual a composição da onda direta com a onda refletida pela superfície terrestre provoca uma oscilação do campo elétrico em torno do seu valor em espaço livre. Nesta região, existe uma folga de no mínimo 0.6 do raio da primeira elipsóide de Fresnel em todo o percurso entre as antenas transmissora e receptora. A teoria da óptica geométrica é apropriada para descrever o comportamento do campo nesta região.

⁵ A difração pura não considera os efeitos da reflexão e absorção das ondas eletromagnéticas em propagação.

⁶ De forma mais rigorosa, a validade corresponde à zona de difração do transmissor, caracterizada por um decréscimo monotônico do campo elétrico abaixo do seu valor em espaço livre, à medida que a antena receptora se afasta da antena transmissora. Nesta região, a folga do percurso é inferior a 0.6 do raio da primeira zona de Fresnel ou existe alguma obstrução impedindo a visada direta, não sendo válidos os princípios da óptica geométrica.

⁷ O horizonte radioelétrico (d_h) corresponde à projeção ao longo da curvatura da terra da máxima distância atingida pela trajetória retilínea da energia irradiada por uma antena transmissora, situada a uma altura h acima da terra esférica de raio equivalente a_e . Na prática, esta distância é dada por $d_h = \sqrt{2a_e h}$.

encontradas comumente na prática. Casos considerados incluem polarização vertical e horizontal das antenas, terra dielétrica e condutora (água do mar), antenas transmissora e receptora sobre a superfície da terra ou elevadas e distâncias dentro ou além do horizonte óptico. Exemplos ilustrativos mostram as variações do campo com a distância e as alturas das antenas.

A partir dos resultados obtidos por Bremmer e Van der Pol, outras soluções foram propostas com o objetivo de simplificar os modelos matemáticos já existentes e conseguir uma melhor aproximação às situações reais. Assim, nas décadas de 40 e 50, Fock retomou a “transformação de Watson” e realizou um trabalho equivalente ao de Van der Pol e Bremmer. Embora a série dos resíduos tenha sido reescrita com uma notação matemática diferente da solução de Van der Pol e Bremmer⁸, o desenvolvimento de Fock levou essencialmente aos mesmos resultados numéricos. Uma análise importante realizada por Fock consistiu em avaliar a natureza do campo na região de transição entre a região iluminada e a sombra geométrica do transmissor. Maiores detalhes podem ser vistos em FOCK (1945).

A difração por obstáculos do terreno representou durante um longo período um desafio em termos de solução geral. Isto explica porque a abordagem inicial do problema da difração em presença da terra baseou-se em uma suposição que na maioria dos casos não se realiza na prática: supõe-se que a terra seja perfeitamente lisa e homogênea⁹.

O primeiro modelo matemático para caracterizar o problema da difração das ondas radioelétricas pelas irregularidades do relevo do terreno baseou-se na teoria de Fresnel-Kirchhoff para um obstáculo do tipo “gume de faca”¹⁰. Esta solução, publicada por SCHELLENG et al. (1933), apesar de suas limitações, apresentava em certas situações resultados plenamente satisfatórios. Entretanto, em determinados casos, o efeito das dimensões do obstáculo poderia levar a resultados que discordavam dos previstos pela teoria de Fresnel-Kirchhoff. Tal fato evidenciou a necessidade de se determinar um fator

⁸ Van der Pol e Bremmer utilizaram em suas formulações as funções de Hankel esféricas de ordem fracionária. Por outro lado, as soluções de Fock foram expressas em termos das funções de Airy. Os resultados algébricos obtidos por esses autores foram similares, devido a proporcionalidade existente entre tais funções.

⁹ O modelo de terra lisa e homogênea expressa a inexistência de descontinuidades no relevo. Nesta condição idealizada, para a terra lisa o terreno se apresentará regular em altura (sem obstáculos) e para a terra suposta homogênea as propriedades elétricas do solo serão constantes na faixa de percurso considerada.

¹⁰ O obstáculo “gume-de-faca” foi o primeiro modelo teórico adotado para a análise da difração pelas irregularidades do relevo. Este modelo simplificado não considera as dimensões do obstáculo na direção de propagação das ondas de rádio.

de correção para a teoria de Fresnel-Kirchhoff que permitisse levar em conta as dimensões e as características elétricas dos obstáculos.

A contribuição de Fock foi particularmente importante na formulação de uma solução em forma integral, aplicável ao problema da difração por obstáculos do terreno. Aplicando a solução clássica da terra esférica à teoria da difração por obstáculos convexos¹¹ (FOCK, 1965), o mérito do trabalho desenvolvido por este autor consistiu em definir o desejado fator de correção. Fock demonstrou a existência de duas parcelas no campo difratado pelo obstáculo: uma correspondente a que seria obtida pela teoria de Fresnel-Kirchhoff; a outra parcela seria função das dimensões e características do obstáculo. Embora formalmente o problema estivesse resolvido com este fator de correção, a formulação integral de Fock tornava complexa a sua manipulação algébrica na obtenção de resultados em aplicações para problemas práticos de engenharia.

O problema da complexa solução integral de Fock foi definitivamente resolvido através de métodos numéricos elaborados por Wait e Conda (WAIT, 1956; WAIT e CONDA, 1958), considerando o caso particular de uma superfície curva lisa, homogênea e de condutividade finita. Posteriormente, as idéias de Fock foram estendidas por WAIT (1967; 1968b) na análise da difração pelas descontinuidades de uma terra esférica. Em trabalhos publicados conjuntamente com o matemático Spies, resultados importantes foram obtidos para o caso especial de um obstáculo “gume de faca” superposto a uma terra condutora cilíndrica¹² (WAIT e SPIES, 1968a;b).

Dentro desta ótica em abordar o problema da difração pelas irregularidades do relevo, convém destacar o tratamento generalizado desenvolvido por FURUTSU et al (1959; 1963; 1964; 1970; 1971) nas décadas de 60 E 70. Este autor, utilizando uma notação semelhante à de Fock, analisou de forma simultânea e em uma formulação única as interações dos obstáculos com o terreno que os circunda, os efeitos das descontinuidades do relevo (escarpas abruptas e transições terra-mar) e a heterogeneidade do solo. Pelo seu caráter geral, deduz-se facilmente a complexidade da solução de Furutsu. No entanto, seu trabalho foi particularmente notório em cálculos numéricos do ganho de obstáculo¹³, com uma coletânea extensiva de artigos apresentando ilustrações de aplicação prática.

¹¹ Obstáculos com raio de curvatura finito.

¹² A geometria cilíndrica da terra é uma extensão da sua simetria esférica, admitindo que o perfil transversal estende-se uniformemente até o infinito.

¹³ O efeito do ganho de obstáculo expressa a possibilidade de ocorrer uma atenuação da intensidade de campo difratado bem menor do que aquela obtida na ausência do obstáculo (terra lisa).

Como era de se esperar, o modelo de terra lisa e homogênea proposto por Van der Pol-Bremmer e Fock representaria um caso particular do modelo apresentado por Furutsu. Apesar da generalidade da solução proposta por Furutsu, não será objeto de enfoque para o presente trabalho investigar os efeitos da não homogeneidade da superfície terrestre¹⁴. Portanto, a análise se restringirá a uma terra esférica homogênea, com os parâmetros elétricos do solo (condutividade e permissividade) supostos constantes dentro das distâncias usuais dos enlaces radioelétricos.

Após a exposição deste histórico sucinto sobre a evolução das soluções desenvolvidas para solucionar o problema da difração sobre a terra esférica, são apresentadas a seguir as formulações básicas.

2.2 A SÉRIE DOS HARMÔNICOS ZONAIIS

Nesta seção é apresentada a solução rigorosa do problema da difração da onda terrestre, dada pela série dos harmônicos zonais ou esféricos (POINCARÉ, 1904). Na análise desta solução, considera-se o efeito da esfericidade de uma terra lisa de curvatura constante e caracterizada por uma impedância de superfície. Assume-se a condição idealizada que a atmosfera e a superfície terrestre sejam homogêneas.

A fonte de campo é representada por um dipolo elétrico elementar de momento de corrente $I dl$, orientado na direção radial de uma esfera de raio a . Adotando um sistema de coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) ¹⁵, a superfície da esfera é então definida por $r = a$, com o dipolo estando localizado em $r = b$ ($b > a$) e $\theta = 0^\circ$ sobre o eixo polar (eixo z). Esta situação é ilustrada na FIG. 2.1, com o dipolo fonte representado pela coordenada $Q(0, 0, b)$ e o ponto receptor pela coordenada $P(r, \theta, \phi)$, localizado a uma distância R de $I dl$.

As propriedades elétricas do meio considerado são descritas pelo parâmetro k , definido como o número de onda ou a constante de propagação expressa genericamente da seguinte forma:

$$k = \sqrt{-j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} \quad (2.1)$$

¹⁴ A não homogeneidade da superfície terrestre é caracterizada por trechos do solo apresentando diferentes valores de condutividade e permissividade. A impedância de superfície será função das propriedades elétricas do trecho do relevo considerado.

¹⁵ Neste sistema de coordenadas esféricas, r representa a distância radial, θ a distância angular do transmissor ao receptor e ϕ a distância angular no plano $x - y$, todas referenciadas ao centro da terra .

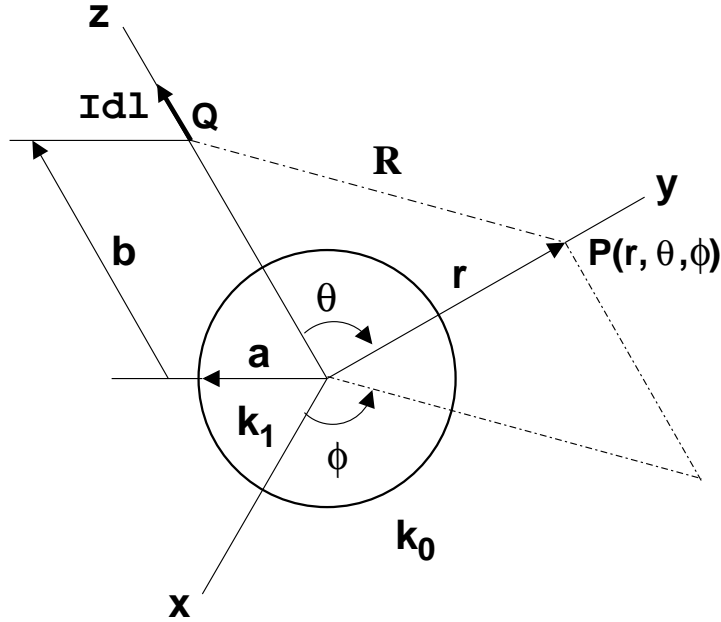


FIG. 2.1: Geometria esférica da terra com o elemento de corrente $I dl$ situado em $\theta = 0^\circ$ e $r = b$ ao longo do eixo z acima da esfera de raio a . O ponto de observação está posicionado em P , definido pelas coordenadas r, θ, ϕ e a uma distância R de $I dl$.

Onde:

$$\omega = 2\pi f \text{ (Frequência angular)}$$

$$f = c/\lambda \text{ (Frequência de operação)}$$

c - Velocidade de propagação no espaço livre¹⁶

λ - Comprimento de onda

μ - Permeabilidade magnética do meio

ε - Permissividade ou constante dielétrica do meio

σ - Condutividade elétrica do meio

Na região correspondente à atmosfera ($r > a$) assume-se a condição de espaço livre, caracterizada pelas constantes do vácuo $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ e condutividade nula ($\sigma = 0$)¹⁷. Portanto, a constante de propagação na EQ. 2.1 será reduzida a $k = k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda$. Contudo, no interior da esfera terrestre ($r < a$), caracterizada por uma permissividade

¹⁶ Medidas práticas da velocidade de propagação em espaço livre estabelecem que

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2.99790 \times 10^8 \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s},$$

onde $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ Farad/m}$ é a constante dielétrica e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Henry/m}$ é a permeabilidade magnética no vácuo.

¹⁷ A ausência de condutividade caracteriza uma atmosfera dielétrica perfeita.

dielétrica ε , uma permeabilidade magnética μ_0 e uma condutividade σ , o valor da constante de propagação $k = k_1$ segue a formulação

$$\begin{aligned} k_1 &= \sqrt{-j\omega\mu_0(\sigma + j\omega\varepsilon)} \\ &= \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon'} = k_0\sqrt{\varepsilon_r - j60\sigma\lambda} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Onde:

$\varepsilon' = \varepsilon - j\sigma/\omega = \varepsilon_0(\varepsilon_r - j60\sigma\lambda)$ (Constante dielétrica complexa da terra)

$\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ (Constante dielétrica relativa da terra em relação ao vácuo)

σ, ε - Características elétricas da esfera terrestre

k_0 - Constante de propagação na atmosfera (espaço livre)

A solução do problema da difração sobre a terra esférica consiste em obter o valor da intensidade de campo. Devido a simetria azimutal e a natureza esférica do problema, o campo pode ser derivado a partir de um dipolo Hertziano¹⁸. A intensidade de campo associada a esse dipolo constitui o campo Hertziano (U), definido como o somatório de duas componentes, $U_p + U_s$, onde:

★ Campo Primário (U_p) - Campo obtido inicialmente, antes de proceder à influência da terra. Nesta situação, a análise é feita em condições de espaço livre e não considera os efeitos do terreno.

★ Campo secundário (U_s) - Uma vez que o campo primário tenha sido obtido, a questão a posteriori consistirá em definir como este campo será perturbado pela presença da terra, caracterizada por sua impedância de superfície. Este campo modificado pela superfície terrestre corresponde ao campo secundário.

O campo Hertziano total U pode ser completamente determinado pelas seguintes condições de contorno:

- a) Fora da esfera ($r > a$) a fonte encontra-se em espaço livre, cujas propriedades elétricas são caracterizadas pelas constantes do vácuo ε_0 e μ_0 . Dentro da esfera ($r < a$) as equações são válidas para os valores correspondentes das constantes

¹⁸ O modelo idealizado de transmissor de rádio pode ser representado em sua forma mais simplificada por uma antena de comprimento elementar dl infinitamente pequeno e percorrida por uma corrente I uniforme e de amplitude infinitamente grande, tal que o momento $I dl$ tenha um valor finito. Esta fonte de ondas eletromagnéticas foi estudada pela primeira vez pelo físico Hertz e, em sua homenagem, esta fonte foi denominada de dipolo Hertziano.

elétricas ε e σ do meio em questão. O campo U constitui as soluções das equações de onda¹⁹:

$$(\nabla^2 + k_0^2) U = C \frac{\delta(r-b) \delta(\theta)}{2\pi r^2 \text{sen} \theta} \quad (r > a) \quad (2.3)$$

$$(\nabla^2 + k_1^2) U = 0 \quad (r < a) \quad (2.4)$$

, onde δ denota a função impulso ou delta Dirac²⁰, $C = [j/(w\varepsilon_0)] Idl$, k_0 e k_1 são as constantes de propagação do espaço livre e da esfera, respectivamente;

b) Nas vizinhanças da fonte localizada na coordenada Q , o campo U apresenta a seguinte singularidade²¹

$$U \rightarrow \frac{e^{-jk_0 R}}{4\pi j w \varepsilon_0 R}; \quad R \rightarrow 0; \quad (2.5)$$

c) Na superfície da esfera ($r = a$) o campo satisfaz a condição de continuidade de suas componentes tangenciais.

Entretanto, pelas condições de contorno descritas acima o campo Hertziano U não pode ser representado em uma forma fechada. A maneira mais simples de deduzir a solução para o campo total U consistirá em expandir as componentes dos campos primário e secundário na forma de séries dos harmônicos zonais ($P_n \cos \theta$). Para este propósito, inicialmente o campo é construído a partir da expansão em harmônicos zonais do campo primário na ausência da terra. A seguir, a este campo é superposto a expansão dos harmônicos para o campo secundário sob a influência do terreno.

Primeiramente, é analisada a expansão em harmônicos zonais do campo primário. Esse campo resultante de um dipolo Hertziano na ausência da superfície terrestre e em condições de espaço livre é definido pela relação (MACLEAN e WU, 1993):

$$U_p = \frac{A_r}{r} = \frac{A_z}{b} \quad (2.6)$$

, sendo $A_r = rA_z/b$ o potencial vetor radial estabelecido pelo elemento de corrente Idl na ausência da terra e r o raio do centro da esfera ao ponto de observação em P . Pela

¹⁹ Nessas equações de onda, o operador $\nabla^2 \varphi$ denota o Laplaciano do escalar φ . Em coordenadas esféricas esse operador é dado por

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen} \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\text{sen} \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}.$$

²⁰ Por definição, a função delta Dirac de argumento x é definida por $\delta(x) = 0$ ($x \neq 0$) e $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1$.

²¹ O campo apresenta um caráter singular em um ponto se a função que descreve esse campo ou suas derivadas são descontínuas naquele ponto.

definição de potencial vetor,

$$A_z = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi} \frac{e^{-jk_0 R}}{R} \quad (2.7)$$

Logo:

$$U_p = \frac{c_0}{b} \frac{e^{-jk_0 R}}{R} \quad (2.8)$$

, onde $c_0 = (\mu_0 I dl)/(4\pi)$ e $R = (r^2 + b^2 - 2br \cos \theta)^{1/2}$ representa a distância do transmissor em Q ao receptor em P(r, θ, ϕ).

Expandindo $e^{-jk_0 R}/R$ em uma série de harmônicos esféricos, segundo expansões desenvolvidas por MORSE e FESHBACH²² (1953), obtém-se

$$U_e = j \frac{k_0 c_0}{2b} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) h_n^{(1)}(k_0 r) h_n^{(2)}(k_0 b) P_n(\cos \theta) \quad r < b \quad (2.9)$$

$$U_e = j \frac{k_0 c_0}{2b} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) h_n^{(1)}(k_0 b) h_n^{(2)}(k_0 r) P_n(\cos \theta) \quad r > b$$

Uma análise similar pode ser feita para obter o campo secundário, supondo agora a existência da esfera. A correspondente expansão em harmônicos esféricos para U_s é dada por

$$U_s = j \frac{k_0 c_0}{2b} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) A_n h_n^{(2)}(k_0 b) h_n^{(2)}(k_0 r) P_n(\cos \theta) \quad (2.10)$$

, onde novamente $c_0 = (\mu_0 I dl)/(4\pi)$ e A_n é um coeficiente que expressa a influência da presença da terra, descrita pela sua impedância de superfície Z . Esse coeficiente pode ser obtido aplicando as seguintes condições de contorno na superfície da esfera ($r = a$):

$$k_0^2 U_0 = k_1^2 U_1 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(rU_0) = \frac{\partial}{\partial r}(rU_1) \quad (2.12)$$

²² Tal expansão obtida por Morse e Feshbach é dada por

$$\frac{e^{-jk_0 R}}{R} = j \frac{k_0}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \theta) \begin{cases} h_n^{(1)}(k_0 r) h_n^{(2)}(k_0 b) & r < b \\ h_n^{(1)}(k_0 b) h_n^{(2)}(k_0 r) & r > b \end{cases}$$

, onde $P_n(\cos \theta)$ é um polinômio de Lagrange de ordem n , $h_n^{(1)}(x)$ e $h_n^{(2)}(x)$ são as funções de Hankel esféricas de primeira e segunda espécie e de ordem n , definidas segundo WATSON (1966) por

$$h_n^{(1)}(x) = -j(-1)^n x^n \left(\frac{d}{xdx}\right)^n \left(\frac{e^{jx}}{x}\right) \quad \text{e} \quad h_n^{(2)}(x) = j(-1)^n x^n \left(\frac{d}{xdx}\right)^n \left(\frac{e^{-jx}}{x}\right)$$

, onde U_0 é o campo Hertziano fora da esfera terrestre ($r > a$) e U_1 é o campo dentro da esfera ($r < a$). Portanto, aplicando as equações (2.11) e (2.12), segue que:

$$A_n = -\frac{h_n^{(1)}(k_0 a)}{h_n^{(2)}(k_0 a)} \left[\frac{\frac{d}{dx} \log[xh_n^{(1)}(x)]_{x=k_0 a} - \frac{d}{dx} \log[xh_n^{(1)}(x)]_{x=k_1 a}}{\frac{d}{dx} \log[xh_n^{(2)}(x)]_{x=k_0 a} - \frac{d}{dx} \log[xh_n^{(1)}(x)]_{x=k_1 a}} \right] \quad (2.13)$$

, ou de forma mais compacta,

$$A_n = -\frac{h_n^{(1)}(k_0 a)}{h_n^{(2)}(k_0 a)} \left[\frac{\frac{d}{dx} \log[xh_n^{(1)}(x)] - j\Delta}{\frac{d}{dx} \log[xh_n^{(2)}(x)] - j\Delta} \right]_{x=k_0 a} \quad (2.14)$$

Onde:

$$\frac{d}{dx} \log[xh_n^{(1)}(x)]_{x=k_1 a} \simeq j\Delta \quad (2.15)$$

$$\Delta = Z/\eta_0 \quad (2.16)$$

$$= \sqrt{\frac{jw\mu_0}{\sigma + jw\varepsilon}} / \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (2.17)$$

$$= \frac{k_0^2}{k_1^2} \sqrt{\frac{k_1^2}{k_0^2} - 1} \quad (PV) \quad (2.18)$$

$$= \sqrt{\frac{k_1^2}{k_0^2} - 1} \quad (PH) \quad (2.19)$$

, sendo que $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \approx 120\pi \text{ ohms}$ denota a impedância intrínseca ou característica do espaço livre e Δ expressa a impedância de superfície normalizada da terra para as polarizações vertical (PV) e horizontal (PH).

Logo, obtém-se a série dos harmônicos zonais que representa a solução rigorosa do problema da difração sobre a terra esférica. Nesta série o campo total Hertziano U é expresso da seguinte forma:

$$U = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) f(n) P_n(\cos \theta) \quad (2.20)$$

Onde:

$$f(n) = j \frac{k_0 c_0}{b} \begin{cases} [h_n^{(1)}(k_0 r) + A_n h_n^{(2)}(k_0 r)] h_n^{(2)}(k_0 b) & r < b \\ [h_n^{(1)}(k_0 b) + A_n h_n^{(2)}(k_0 b)] h_n^{(2)}(k_0 r) & r > b \end{cases} \quad (2.21)$$

A implementação numérica da solução expressa pela EQ. 2.20 é uma questão impraticável em problemas de engenharia, desde que essa série apresenta uma convergência extremamente lenta²³ quando o raio a da esfera é grande, comparado com o comprimento de onda λ (fator $ka \gg 1$). Portanto, por um longo tempo, a não obtenção de resultados numéricos em problemas de radiopropagação impossibilitou progressos nesta área. Somente com a “transformação de Watson” em 1918, tornou-se possível resolver numericamente esta questão. A seguir, são descritas as idéias e os procedimentos adotados por G. N. Watson para promover esta transformação no plano complexo.

2.3 A TRANSFORMAÇÃO DE WATSON

Conforme visto anteriormente, a aplicação numérica da solução rigorosa dos harmônicos zonais não foi possível até que se introduzisse a “transformação de Watson”. A dificuldade em se aplicar a série dos harmônicos em cálculos práticos usuais seria a enorme quantidade de termos requerida para garantir a convergência desta série quando o fator $ka \gg 1$.

Em 1918, Watson demonstrou os procedimentos necessários para converter a série dos harmônicos zonais em uma série de melhor convergência em problemas práticos de engenharia. Esta representação tornou-se conhecida como “série dos resíduos”, pois cada um dos termos desta série corresponderia a um resíduo de um pólo complexo, segundo o “teorema dos resíduos”²⁴. As idéias apresentadas por WATSON (1918 e 1919) podem ser sumarizadas nas seguintes etapas, a saber:

- a) Foi verificado anteriormente que a série dos harmônicos zonais define o campo total (campo primário+campo secundário), expresso segundo o somatório dado pela

²³ Usualmente, em uma análise mais detalhada dessa lenta convergência da série dos harmônicos zonais, significa que algo em torno de $2ka$ termos são requeridos para garantir uma precisão em torno de 2%. Considerando o raio efetivo da terra ($a = 8500Km$) e uma frequência de operação de 1000 MHz, para garantir essa estimativa seriam necessários aproximadamente 356 047 167 milhões de termos.

²⁴ Suponha que uma função complexa $f(z)$ apresente uma singularidade isolada em seus pólos complexos localizados em $z = n_0, n_1, n_2, \dots, n_p$. Essa propriedade de singularidade isolada expressa que a função $f(z)$ é analítica (derivável) nas vizinhanças dos pontos $z = n_0, n_1, n_2, \dots, n_p$, exceto nesses pontos z 's singulares isolados. Os resíduos de uma função $f(z)$ em suas singularidades isoladas se aplicam ao cálculo de integrais, complexas ou reais. A base para esta aplicação consiste no “teorema dos resíduos”, enunciado da seguinte forma: “Se $f(z)$ é uma função analítica no interior de um contorno fechado C e sobre C , exceto em um número finito de singularidades isoladas em $z = n_0, n_1, n_2, \dots, n_p$, todas situadas no interior de C (vide FIG. 2.2), então

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^p Res[f(n_k)]$$

Se os pontos singulares localizados em $z = n_0, n_1, n_2, \dots, n_p$ constituem os pólos complexos, então esta integral será o somatório dos resíduos desses pólos complexos.”

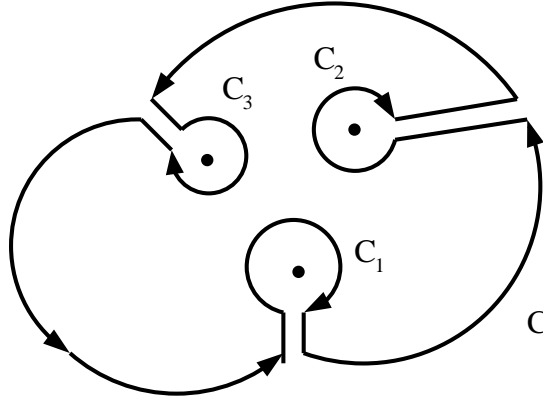


FIG. 2.2: Contorno C e suas singularidades isoladas no interior de C_1, C_2 e C_3 .

EQ. 2.20. Na etapa Inicial da “transformação de Watson”, esta série é convertida na seguinte integral de contorno complexa:

$$U = j \int_{C_1+C_2} \frac{n \, dn}{\cos(n\pi)} f(n - 1/2) P_{n-1/2}[\cos(\pi - \theta)] \quad (2.22)$$

, onde n é agora uma variável contínua e o contorno $C_1 + C_2$ no plano complexo é o percurso de integração, conforme indicado na FIG. 2.3. Note que os pólos do integrando estão localizados em $n = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$, podendo ser facilmente verificado pelo “teorema dos resíduos” que a integral complexa dada pela EQ. 2.22 é equivalente à série dos harmônicos zonais;

b) A etapa seguinte da “transformação de Watson” consiste em efetuar uma modificação do contorno de integração. Desde que a função $f(n - 1/2)$ é uma função par de n , a porção do contorno C_1 pode ser substituída pelo contorno C'_1 . O novo contorno $C'_1 + C_2$ torna-se inteiramente equivalente ao contorno L . Substituindo $n - 1/2$ por ν , a representação da integral de contorno para o campo total U assume a forma:

$$U = -j \int_L \frac{(\nu + 1/2)}{\text{sen}(\pi\nu)} f(\nu) P_\nu[\cos(\pi - \theta)] \, d\nu; \quad (2.23)$$

c) No próximo passo da análise de Watson o contorno L é fechado por um semi-círculo no plano n imaginário negativo. O valor da integral para o campo U ao longo do contorno L torna-se igual a $-2\pi i / (k_0 a)^3$ vezes o somatório dos resíduos dos pólos ν_s ($s = 0, s = 1, s = 2, \dots$) do integrando da EQ. 2.23. Esses pólos $\nu = \nu_s$, localizados

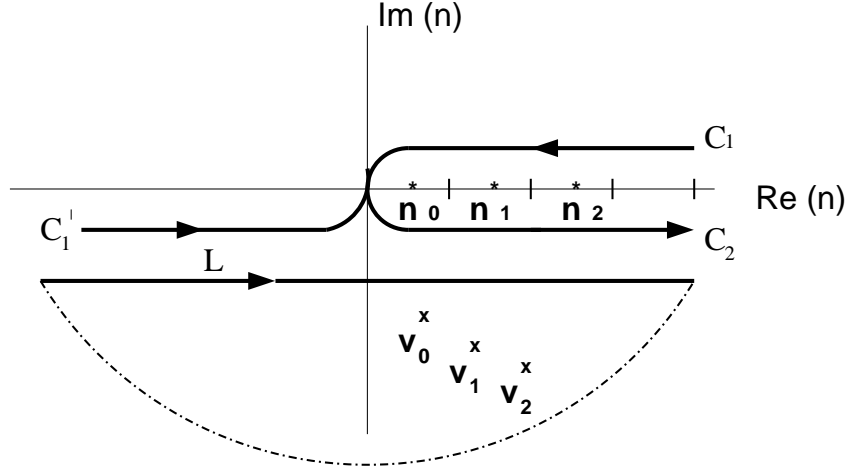


FIG. 2.3: Transformação do percurso de integração no plano- n complexo.

no semi-plano mostrado na FIG. 2.3, são as soluções da equação

$$M(\nu) = 0 \quad (2.24)$$

Onde:

$$M(\nu) = \frac{d}{dx} \log[xh_{\nu}^{(2)}(x)] - j\Delta \quad (2.25)$$

, com $x = k_0a$ e $\Delta = Z/120\pi$. Portanto, obtem-se a representação da série dos resíduos de Watson

$$U = \frac{-2\pi i}{(k_0a)^3} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(\nu_s + 1/2) h_{\nu_s}^{(2)}(k_0b) h_{\nu_s}^{(2)}(k_0r) P_{\nu_s}[\cos(\pi - \theta)]}{\text{sen}(\pi\nu_s) \left[\frac{\partial M(\nu)}{\partial \nu} \right]_{\nu=\nu_s} [h_{\nu_s}^{(2)}(k_0a)]^2} \quad (2.26)$$

, cuja convergência é apreciavelmente melhor do que aquela apresentada pela série dos harmônicos zonais. No entanto, esta série de resíduos obtida por Watson ainda apresenta certas dificuldades algébricas para a sua manipulação em aplicações práticas. Para torná-la adequada a um tratamento numérico, certas aproximações devem ser introduzidas. Essas soluções mais simplificadas da série dos resíduos serão vistas agora em detalhe, conforme as formulações de Van der Pol e Bremmer, Fock, Wait e Furutsu.

2.4 A SÉRIE DOS RESÍDUOS

Fazendo um retrospecto da teoria abordada até o momento, foi visto que a solução rigorosa do problema da difração sobre a simetria esférica da terra é dada pela série dos harmônicos zonais. Entretanto, a convergência desta série é muito lenta, não podendo ser aplicada a cálculos práticos usuais de engenharia.

A série dos harmônicos zonais foi convertida em uma integral de contorno no plano complexo. Introduzindo uma transformação do contorno de integração, WATSON (1918 e 1919) obteve a série dos resíduos representada pela EQ. 2.26, cuja convergência é bem mais rápida em aplicações práticas. Este método particular conhecido como “transformação de Watson” foi aplicado nas soluções gerais propostas por alguns autores, destacando-se os trabalhos apresentados por BREMMER e VAN DER POL (1937; 1938; 1939), FOCK (1945; 1949; 1965), WAIT (1956; 1962a;b; 1964; 1967; 1968b) e FURUTSU et al. (1959; 1963; 1964; 1970; 1971).

O mérito das diferentes abordagens da série dos resíduos consiste nas simplificações obtidas através das aproximações assintóticas introduzidas nas funções de Hankel e nos harmônicos esféricos $P_n(\cos \theta)$ expressos nas formulações de Watson. A seguir, são discutidas essas soluções gerais mais simplificadas propostas pelos diversos autores.

2.4.1 A SOLUÇÃO DE VAN DER POL E BREMMER

Aplicando a “transformação de Watson” à solução da terra esférica dada pela complexa série dos harmônicos esféricos, BREMMER e VAN DER POL (1937) apresentaram uma solução geral em forma de série de resíduos relativamente mais simples e adaptável a aplicações práticas.

A grande contribuição da solução apresentada por Van de Pol e Bremmer consistiu no desenvolvimento de um método altamente preciso para computar os valores dos pólos complexos ν_s da série dos resíduos de Watson. Utilizando o artifício matemático das aproximações de Hankel, segundo o qual as funções esféricas $h_{\nu_s}^{(2)}(x)$ seriam representadas por funções de Hankel de ordem $1/3$, esses autores solucionaram o maior problema para a aplicação numérica da série dos resíduos: a localização dos pólos no plano complexo.

Portanto, fazendo uso da notável aproximação de Hankel de ordem $1/3$

$$x h_{\nu-1/2}^{(2)}(x) \simeq e^{-j\pi/6} (-2\tau/3)^{1/2} x^{1/6} H_{1/3}^{(2)} \left[\left(\frac{1}{3} \right) (-2\tau)^{3/2} \right] \quad (2.27)$$

, onde $\nu = x + x^{1/3} \tau$ é válida para $|\nu - x| \ll x$ e $x \gg 1$, esses autores conseguiram calcular de forma precisa o valor dos pólos complexos ν_s , soluções de $M(\nu)|_{\nu=\nu_s} = 0$. Logo, substituindo a aproximação de Hankel dada pela EQ. 2.27 na expressão de $M(\nu)$ em (2.25), as raízes τ_s constituem as soluções determinantes da equação

$$\delta e^{-j\pi/3} \frac{H_{2/3}^{(2)} \left[\left(\frac{1}{3}\right) (-2 \tau_s)^{3/2} \right]}{H_{1/3}^{(2)} \left[\left(\frac{1}{3}\right) (-2 \tau_s)^{3/2} \right]} = -(-2 \tau_s)^{-1/2} \quad (2.28)$$

Onde:

δ - Parâmetro que caracteriza o meio (constantes do solo)

$$\delta = \frac{-j \eta_0}{(k_0 a)^{1/3} Z} \quad (2.29)$$

$$= \frac{-j}{(k_0 a)^{1/3}} \frac{k_1^2/k_0^2}{\sqrt{k_1^2/k_0^2 - 1}} \quad (PV) \quad (2.30)$$

$$= \frac{-j}{(k_0 a)^{1/3}} \frac{1}{\sqrt{k_1^2/k_0^2 - 1}} \quad (PH) \quad (2.31)$$

ν_s - Pólos complexos da série dos resíduos

$$\nu_s = k_0 a + (k_0 a)^{1/3} \tau_s \quad (2.32)$$

$H_{1/3}^{(2)}(x)$ e $H_{2/3}^{(2)}(x)$ – Funções de Hankel de 2^a espécie e ordens 1/3 e 2/3, respectivamente.

A série dos resíduos de Watson expressa pela EQ. 2.26 pode agora ser consideravelmente simplificada se as funções $M(\nu)$, $h_{\nu_s}^{(2)}(k_0 a)$, $h_{\nu_s}^{(2)}(k_0 b)$ e $h_{\nu_s}^{(2)}(k_0 r)$ forem substituídas pelas suas aproximações de Hankel e o polinômio de Lagrange pela sua expansão assintótica²⁵. Dessas substituições, resulta para a terra esférica lisa e homogênea (vide FIG. 2.4) uma intensidade de campo U dada por

$$U = 2 U_0 \sqrt{2\pi \chi_d} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{e^{-j\tau_s \chi_d}}{(2\tau_s - 1/\delta^2)} f_s(h_1) f_s(h_2) \quad (2.33)$$

²⁵ Tal expansão assintótica é representada por $\frac{P_\nu[\cos(\pi-\theta)]}{\text{sen}(\pi\nu)} \sim \frac{-\sqrt{2j} e^{-j(\nu+\frac{1}{2})\theta}}{\sqrt{\pi(\nu+1)\text{sen}\theta}}$, onde $\text{sen}(\pi\nu) \simeq -\frac{e^{-j\pi\nu}}{2j}$.

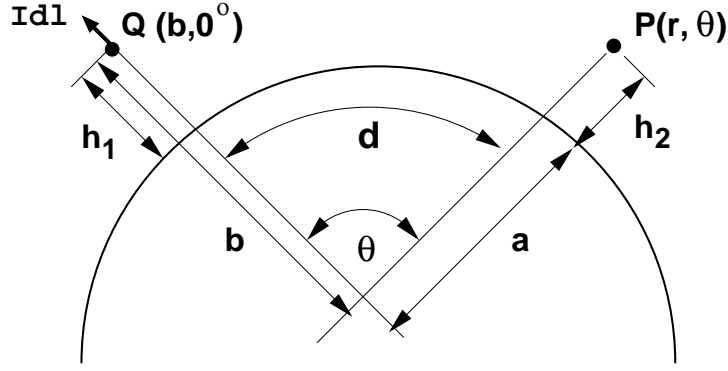


FIG. 2.4: Dipolo elétrico transmissor sobre uma terra esférica lisa e homogênea.

Onde:

$$U_0 = \frac{Idl e^{-j k_0 a \theta}}{4\pi j \varepsilon_0 \omega a^2 (\theta \text{sen} \theta)^{1/2}} \quad (2.34)$$

$$\theta = d/a \quad (2.35)$$

$$k_0 = 2\pi/\lambda \quad (2.36)$$

χ_d - Distância numérica entre as antenas

$$\chi_d = (k_0 a)^{1/3} \theta \quad (2.37)$$

$\chi_{h_{1,2}}$ - Altura numérica das antenas

$$\chi_{h_i} = (k_0 a)^{1/3} \sqrt{\frac{2h_i}{a}} \quad ; \quad i = 1, 2 \quad (2.38)$$

$$h_1 = b - a \quad (2.39)$$

$$h_2 = r - a \quad (2.40)$$

$f_s(h_{1,2})$ - Fator ganho de altura das antenas

$$f_s(h_i) = \frac{H_{1/3}^{(2)} \left[\frac{1}{3} (\chi_{h_i}^2 - 2\tau_s)^{3/2} \right]}{H_{1/3}^{(2)} \left[\frac{1}{3} (-2\tau_s)^{3/2} \right]} \sqrt{\frac{\chi_{h_i} - 2\tau_s}{-2\tau_s}} \quad ; \quad i = 1, 2 \quad (2.41)$$

Os fatores ganho de altura das antenas, expressos pela EQ. 2.41, determinam o efeito das alturas h_1 e h_2 das antenas transmissora e receptora, respectivamente. Para esses fatores, quando as antenas não estiverem elevadas sobre a superfície da terra ($h_{1,2} = 0$),

é válido o limite

$$\lim_{h_{1,2} \rightarrow 0} f_s(h_{1,2}) = 1 \quad (2.42)$$

Uma maneira relativamente simples e eficiente para calcular os valores das raízes τ_s e, conseqüentemente, dos pólos ν_s da série dos resíduos, é supor os casos particulares:

(1) $\delta \rightarrow \infty$ (Terra condutora perfeita)

Neste caso, as raízes $\tau_s = \tau_{s,\infty} = |\tau_{s,\infty}| e^{-j\pi/3}$ são determinadas pelas relações

$$\begin{aligned} \tau_{0,\infty} &= 0.808 e^{-j\pi/3} \\ \tau_{1,\infty} &= 2.577 e^{-j\pi/3} \\ \tau_{2,\infty} &= 3.824 e^{-j\pi/3} \\ \tau_{3,\infty} &= 4.892 e^{-j\pi/3} \\ \tau_{s,\infty} &= \frac{1}{2} \left[3\pi \left(s + \frac{1}{4} \right) \right]^{2/3} e^{-j\pi/3} \quad s \geq 4 \end{aligned} \quad (2.43)$$

(2) $\delta \rightarrow 0$ (Terra dielétrica perfeita)

De forma similar às soluções $\tau_s = \tau_{s,\infty}$, neste caso as raízes $\tau_s = \tau_{s,0} = |\tau_{s,0}| e^{-j\pi/3}$ são calculadas através das relações

$$\begin{aligned} \tau_{0,0} &= 1.856 e^{-j\pi/3} \\ \tau_{1,0} &= 3.245 e^{-j\pi/3} \\ \tau_{2,0} &= 4.382 e^{-j\pi/3} \\ \tau_{3,0} &= 5.386 e^{-j\pi/3} \\ \tau_{s,0} &= \frac{1}{2} \left[3\pi \left(s + \frac{3}{4} \right) \right]^{2/3} e^{-j\pi/3} \quad s \geq 4 \end{aligned} \quad (2.44)$$

(3) Outros valores arbitrários de δ

Neste caso, os valores τ_s podem ser expandidos em séries de potências ascendentes e descendentes de δ .

(3-a) $|\delta| \ll 1$

$$\begin{aligned} \tau_s &= \tau_{s,0} - \delta - \frac{2}{3} \tau_{s,0} \delta^3 + \frac{1}{2} \delta^4 - \frac{4}{5} \tau_{s,0}^2 \delta^5 + \dots + \\ &\quad + \text{Outros termos em potências ascendentes de } \delta \end{aligned} \quad (2.45)$$

(3-b) $|\delta| \gg 1$

$$\begin{aligned} \tau_s = & \tau_{s,\infty} - \frac{1}{2\delta\tau_{s,\infty}} - \frac{1}{8\delta^2\tau_{s,\infty}^3} - \frac{(1 + \frac{3}{4\tau_{s,\infty}^3})}{12\delta^3\tau_{s,\infty}^2} - \\ & - \frac{1}{32\delta^4\tau_{s,\infty}^4} \left(\frac{7}{3} + \frac{5}{4\tau_{s,\infty}^3} \right) + \dots + \\ & + \text{Outros termos em potências descendentes de } \delta \end{aligned} \quad (2.46)$$

Demais termos das séries de potências (2.45) e (2.46) podem ser determinados através da equação diferencial

$$\frac{d[\tau_s(\delta)]}{d\delta} = \frac{1}{2\delta^2\tau_s - 1} \quad (2.47)$$

Onde:

Para $|\delta| \ll 1$:

$$\tau_s(\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \delta^n \quad (2.48)$$

$$b_0 = \tau_{s,0} \quad (2.49)$$

$$b_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n [\tau_s(\delta)]}{d\delta} \right|_{\delta=0} \quad (2.50)$$

Para $|\delta| \gg 1$:

$$\tau_s(\delta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \beta^n \quad ; \quad \beta = \delta^{-1} \quad (2.51)$$

$$b_0 = \tau_{s,\infty} \quad (2.52)$$

$$b_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n [\tau_s(\delta)]}{d\beta} \right|_{\substack{\beta=0 \\ \delta=\infty}} \quad (2.53)$$

Para distâncias da antena transmissora maiores do que alguns comprimentos de onda, a intensidade de campo U é proporcional à componente vertical do campo elétrico (E), enquanto $2U_0$ será proporcional ao campo sobre uma terra plana condutora perfeita ($E_p = 2E_0$)²⁶, considerando uma fonte transmissora idêntica. Portanto, através dessas relações

²⁶ O termo E_0 corresponde à intensidade de campo em espaço livre, enquanto $E_p = 2E_0$ está associado ao campo de uma terra plana condutora perfeita. As intensidades de campo U e U_0 se relacionam com os campos elétricos E e E_0 através das relações de proporcionalidade

$$\begin{aligned} U & \propto E \\ 2U_0 & \propto 2E_0 \end{aligned}$$

de proporcionalidade o módulo do campo na antena receptora, relativo ao espaço livre, será dado a partir da série dos resíduos pela expressão

$$\left| \frac{E}{E_0} \right| = 2\sqrt{2\pi\chi_d} \left| \frac{e^{-j\tau_s\chi_d}}{(2\tau_s - 1/\delta^2)} f_s(h_1) f_s(h_2) \right| \quad (2.54)$$

A quantidade E/E_0 na EQ. 2.54 denota o fator de atenuação (A_R)²⁷ em relação ao espaço livre, relacionando as perdas por difração sobre a curvatura da terra. Este fator de atenuação é de maior importância em análises práticas da teoria da difração. Por esta razão, daqui em diante a série dos resíduos será expressa em termos das intensidades de campo elétrico E e E_0 ²⁸. Na próxima seção será analisada a solução dada pela série dos resíduos, segundo a formulação de Fock.

2.4.2 A SOLUÇÃO DE FOCK

Outra forma de apresentar a solução do problema da difração sobre uma terra esférica lisa e homogênea (FIG. 2.4) foi proposta por FOCK (1945). Tal como a solução de Van der Pol e Bremmer, a série dos resíduos obtida por Fock fundamenta-se na “transformação de Watson” aplicada à série dos harmônicos esféricos, resultando em uma solução algebricamente muito mais fácil de manuseio. Embora com uma notação matemática diferente daquela apresentada por Van der Pol e Bremmer²⁹, o desenvolvimento de Fock leva essencialmente aos mesmos resultados numéricos, como era de se esperar. Segundo a solução de Fock, o módulo do campo relativo ao espaço livre de um dipolo elétrico de momento

²⁷ Na abreviatura A_R , R faz referência ao cálculo da atenuação relativa ao espaço livre dada pela formulação da série dos resíduos.

²⁸ Considerando G o ganho de potência das antenas, d_{Km} a distância do enlace em Kilômetros e P_{Kw} a potência do dipolo transmissor em Kilowatts, a energia do campo E , em milivolts por metro, será numericamente expressa por

$$|E| = \frac{300\sqrt{P_{Kw}G}}{d_{Km}} \sqrt{2\pi\chi_d} \left| \frac{e^{-j\tau_s\chi_d}}{(2\tau_s - 1/\delta^2)} f_s(h_1) f_s(h_2) \right|$$

Para antenas ideais isotrópicas ($G = 1$) e dipolo transmissor radiando 1Kw de potência, tem-se

$$|E_p| = 300 \frac{\sqrt{P_{Kw}G}}{d_{Km}} = \frac{300}{d_{Km}}.$$

²⁹ A notação matemática na formulação de Fock emprega as integrais de Airy no lugar das complicadas funções de Hankel apresentadas nas soluções de Van der Pol e Bremmer. A facilidade em se trabalhar com essas funções de Airy constitui a principal vantagem em se preferir utilizar a notação de Fock.

de corrente $I dl$ segue a formulação³⁰

$$\left| \frac{E}{E_0} \right| = |V(x, y_1, y_2, q)| \quad (2.55)$$

Onde:

$$E_0 = \frac{-j \mu_0 w I dl}{4\pi d} e^{-jk_0 d} \left(\frac{\theta}{\text{sen } \theta} \right)^{1/2} \quad (2.56)$$

$$k_0 = w/c = 2\pi/\lambda \quad (2.57)$$

$$\theta = d/a \quad (2.58)$$

$$V = e^{-j\pi/4} 2\sqrt{\pi} x \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{-jxt_s}}{(t_s - q^2)} f_s(y_1) f_s(y_2) \quad (2.59)$$

$$x = \left(\frac{k_0 a}{2} \right)^{1/3} \frac{d}{a} \quad (\text{Distância numérica entre os terminais}) \quad (2.60)$$

$$y_i = \left(\frac{2}{k_0 a} \right)^{1/3} k_0 h_i \Big|_{i=1,2} \quad (\text{Altura numérica das antenas}) \quad (2.61)$$

$$h_1 = b - a \quad (2.62)$$

$$h_2 = r - a \quad (2.63)$$

$$f_s(y_i) = \frac{w(t_s - y_i)}{w(t_s)} \Big|_{i=1,2} \quad (\text{Fator de altura das antenas}) \quad (2.64)$$

$w(t)$ – Função integral de Airy, definida pela seguinte integral de contorno

$$w_{1,2}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma_{1,2}} e^{(st-s^3/3)} ds \quad (2.65)$$

$\Gamma_{1,2}$ – Contornos de Integração

$$\Gamma_1 : (\infty e^{j2\pi/3} \rightarrow \infty)$$

$$\Gamma_2 : (\infty e^{-j2\pi/3} \rightarrow \infty)$$

³⁰ Nesta formulação, omite-se o fator de tempo $e^{j\omega t}$.

Em termos das funções de Airy $A_i(t)$ e $B_i(t)$ (vide APÊNDICE 1), as integrais de contorno $w_1(t)$ e $w_2(t)$ são expressas da seguinte forma³¹

$$w_1(t) = \sqrt{\pi} [B_i(t) - j A_i(t)] \quad (2.66)$$

$$w_2(t) = \sqrt{\pi} [B_i(t) + j A_i(t)] \quad (2.67)$$

As equações (2.66) e (2.67) satisfazem a equação diferencial:

$$w_i''(t) - t w_i(t) = 0 \Big|_{i=1,2} ; \forall t \quad (2.68)$$

$$w_i''(t) = \frac{d^2[w_i(t)]}{dt^2} \Big|_{i=1,2} \quad (2.69)$$

($t = t_s$) – Soluções da equação diferencial:

$$w_i'(t) - q w_i(t) = 0 \Big|_{i=1,2} \quad (2.70)$$

$$w_i'(t) = \frac{d[w_i(t)]}{dt} \Big|_{i=1,2} \quad (2.71)$$

q – Parâmetro característico do solo³²

$$q = -j \left(\frac{k_0 a}{2} \right)^{1/3} \Delta \quad (\Delta = Z/120\pi) \quad (2.72)$$

$$\Delta = \frac{k_0^2}{k_1^2} \sqrt{\frac{k_1^2}{k_0^2} - 1} \quad (PV) \quad (2.73)$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{k_1^2}{k_0^2} - 1} \quad (PH) \quad (2.74)$$

³¹ A solução original proposta por Fock emprega um fator de tempo $e^{-j\omega t}$. Na formulação adotada neste trabalho foi introduzida uma modificação para um fator de tempo $e^{j\omega t}$. Portanto, as definições de $w_1(t)$ e $w_2(t)$ aqui apresentadas correspondem às definições de $w_2(t)$ e $w_1(t)$ propostas originalmente por Fock.

³² O parâmetro q da solução de Fock é função da polarização (PV - Vertical e PH - Horizontal) e das características elétricas do solo. Associa-se de forma equivalente ao parâmetro δ da formulação de Van der Pol e Bremmer através da relação

$$\delta^3 = \frac{j}{k_0 a \Delta^3},$$

onde $\Delta = jq(2/(k_0 a))^{1/3}$. Para uma análise do efeito da condutividade dos diferentes tipos de solo na variação do parâmetro q , considere o APÊNDICE 2.

Onde:

$$k_1 = k_0 \sqrt{\varepsilon_r - j 60 \sigma \lambda} \quad (2.75)$$

É fácil mostrar que as séries de resíduos definidas pela EQ. 2.54 e EQ. 2.59 são equivalentes³³. A notação de Fock será particularmente útil nas formulações teóricas propostas por Wait e Furutsu, que serão apresentadas nas próximas seções.

2.4.3 A SOLUÇÃO DE WAIT

Até agora, as soluções apresentadas para o problema da difração sobre a curvatura da terra baseou-se em um modelo de terra esférica lisa e homogênea. Com a solução geral proposta por WAIT (1956), os efeitos da não-homogeneidade e demais irregularidades do relevo³⁴ foram incluídos na análise da teoria da difração sobre as características do terreno. A não homogeneidade da superfície terrestre não é de interesse para os objetivos deste trabalho e, portanto, apenas os efeitos das irregularidades representadas pela presença dos obstáculos do relevo serão abordados.

Dentro desta análise, Wait desenvolveu uma formulação para o cálculo da intensidade de campo e da atenuação de um percurso obstruído por um obstáculo “gume de faca” superposto à superfície cilíndrica terrestre³⁵ (WAIT, 1962a; WAIT e SPIES, 1968a;b), conforme ilustra a FIG. 2.5. Utilizando a teoria dos modos de propagação combinados (*Matched Modes*) (WAIT, 1968a; 1981), Wait obteve a seguinte expansão:

$$\frac{E}{E_0} = 2 \sqrt{\frac{\pi x}{j}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w(t_m - y_t)}{N_m^{1/2}} e^{-j x_0 t_m} \hat{S}_{n,m} e^{-j(x-x_0)t_n} \frac{w(t_n - y_r)}{N_n^{1/2}} \quad (2.76)$$

Onde:

$$\frac{E}{E_0} = A_R \quad (\text{Atenuação em relação ao espaço livre}) \quad (2.77)$$

³³ Tal equivalência pode ser demonstrada através da seguinte relação de proporcionalidade entre as funções de Airy e as funções de Hankel de ordem 1/3

$$w(t) = e^{-j\pi/3} (-\pi t/3)^{1/2} H_{1/3}^{(2)} \left[\frac{2}{3} (-t)^{3/2} \right].$$

³⁴ O caso do relevo não homogêneo deu origem à teoria dos percursos misturados (WAIT, 1961; 1971), constituídos de várias seções de propriedades elétricas diferentes, enquanto o terreno irregular considera a presença de obstáculos sobre o terreno.

³⁵ Uma superfície cilíndrica apresenta o perfil transversal ao sentido de propagação estendendo-se uniformemente até o infinito.

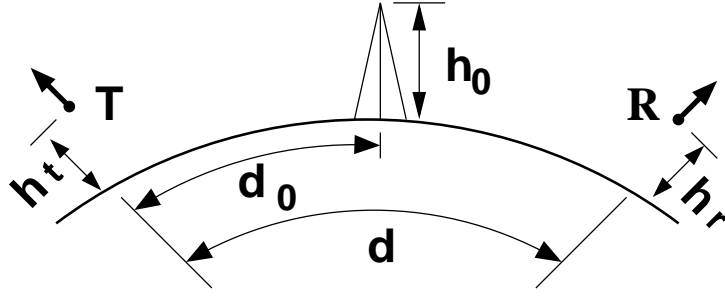


FIG. 2.5: Geometria do percurso obstruído por um obstáculo “gume de faca” de altura h_0 superposto ao terreno.

x, x_0 – Distâncias Numéricas

$$x = \left(\frac{k_0 a}{2}\right)^{1/3} \theta \quad (\theta = d/a) \quad (2.78)$$

$$x_0 = \left(\frac{k_0 a}{2}\right)^{1/3} \theta_0 \quad (\theta_0 = d_0/a) \quad (2.79)$$

$$k_0 = w/c = 2\pi/\lambda \quad (2.80)$$

y_t, y_r – Alturas numéricas dos terminais

$$y_t = \left(\frac{2}{k_0 a}\right)^{1/3} k_0 h_t \quad (2.81)$$

$$y_r = \left(\frac{2}{k_0 a}\right)^{1/3} k_0 h_r \quad (2.82)$$

$N_{m,n}$ – Fator de normalização (WAIT, 1962a)

$$N_s = \int_0^\infty [w(t_s - y)]^2 dy = (t_s - q^2) [w(t_s)]^2 \Big|_{s=m,n} \quad (2.83)$$

q – Parâmetro característico do solo dado pela EQ. 2.72, EQ. 2.73 e EQ. 2.74

$w(t)$ – Função integral de Airy, solução da equação diferencial EQ. 2.68

$(t = t_{m,n})$ – Raízes que satisfazem a equação diferencial EQ. 2.70

$\hat{S}_{n,m}$ – Coeficiente de espalhamento ou de conversão de modos³⁶

$$\begin{aligned}\hat{S}_{n,m} &= \frac{1}{(N_n N_m)^{1/2}} \frac{w(t_m - y_0) w'(t_n - y_0) - w(t_n - y_0) w'(t_m - y_0)}{(t_n - t_m)} \\ &= f_{n,m}(y_0) \quad (n \neq m)\end{aligned}\quad (2.84)$$

$$\begin{aligned}\hat{S}_{n,m} &= \frac{1}{N_m} \left\{ (t_m - y_0) [w(t_m - y_0)]^2 - [w'(t_m - y_0)]^2 \right\} \\ &= f_{m,m}(y_0) \quad (n = m)\end{aligned}\quad (2.85)$$

y_0 – Altura numérica do obstáculo

$$y_0 = \left(\frac{2}{k_0 a} \right)^{1/3} k_0 h_0 \quad (2.86)$$

Para o caso particular de uma terra lisa e homogênea onde $h_0 \rightarrow 0$, é evidente que

$$\hat{S}_{n,m} = 0 \quad n \neq m \quad (2.87)$$

$$\hat{S}_{m,m} = 1 \quad n = m \quad (2.88)$$

Usando estas relações, Wait obteve uma formulação idêntica à série dos resíduos obtida por Fock³⁷. Essa formulação para a terra lisa e homogênea é expressa por

$$\frac{E}{E_0} = 2 \sqrt{\frac{\pi x}{j}} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{-j x t_s}}{(t_s - q^2)} f_s(h_t) f_s(h_r) \quad (2.89)$$

Onde:

$f_s(h_{t,r})$ – Fator ganho de altura das antenas terminais

$$f_s(h_{t,r}) = \frac{w(t_s - y_{t,r})}{w(t_s)} \quad (2.90)$$

³⁶ O obstáculo atua como um conversor dos modos de propagação, tal que um modo incidente de ordem m é convertido em um somatório de modos de ordem n que se propagam além do obstáculo após sofrerem um espalhamento. Na formulação do coeficiente de espalhamento os modos refletidos pelo obstáculo são desprezados.

³⁷ Para atestar a identidade entre as formulações de Fock e Wait, considera-se a relação $\frac{1}{2}(1+j) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4}$, tal que $e^{-j\pi/4} = \sqrt{1/j}$.

2.4.4 A SOLUÇÃO DE FURUTSU

No estudo da teoria da difração pelas descontinuidades da superfície terrestre, resta comentar o tratamento generalizado da solução apresentada por Furutsu et al. (FURUTSU, 1959; 1963; FURUTSU, WILKERSON e HARTMANN, 1964; FURUTSU e WILKERSON, 1970; 1971). Partindo também do trabalho pioneiro de Watson, Furutsu propôs uma solução geral para o problema da propagação das ondas eletromagnéticas sobre um relevo irregular, de geometria variável e com o solo constituído de várias seções apresentando diferentes valores de condutividade.

Fazendo uso de uma notação semelhante a de Fock, Furutsu abordou em uma formulação única os efeitos da presença dos obstáculos do terreno, assim como a influência da não homogeneidade do solo. Sob este enfoque, o modelo de terra lisa e homogênea proposto por Van der Pol-Bremmer e Fock representaria um caso particular do modelo definido por Furutsu. Considerando o caráter geral de sua solução, esse autor apresentou inúmeros resultados numéricos para as várias aplicações possíveis dos casos de importância prática.

No modelo teórico de Furutsu foi escolhida a geometria do terreno mais simples possível, com todas as não homogeneidades do solo e demais parâmetros do relevo caracterizados, conforme ilustra a FIG. 2.6. Esta figura mostra o terreno seccionado em dois trechos, de raios de curvatura a_2 e a_4 e diferentes constantes de propagação, k_2 e k_4 , respectivamente. Uma aresta³⁸ situada a uma distância radial a_3 (medida do centro da terra ao topo da aresta) limita o contorno da fronteira entre as duas seções. O transmissor e o receptor estão localizados nos pontos T e R, cujas distâncias radiais do centro da terra são z_1 e z_5 , respectivamente. Cada uma das antenas terminais estão afastadas da aresta pelas distâncias r_2 e r_4 , medidas ao longo da superfície da terra de raio de curvatura a . Define-se a intensidade de campo elétrico recebido pelo terminal em R, segundo a expressão

$$E = 2 E_0 A \quad (2.91)$$

Onde:

E_0 – Campo elétrico em espaço livre³⁹

$$E_0 = \frac{k_0^2}{4\pi r} e^{-jk_0 r} \quad (2.92)$$

³⁸ A aresta pode ser aproximada por um modelo de obstáculo “gume de faca”.

³⁹ $2 E_0$ denota o campo sobre uma terra plana condutora perfeita.

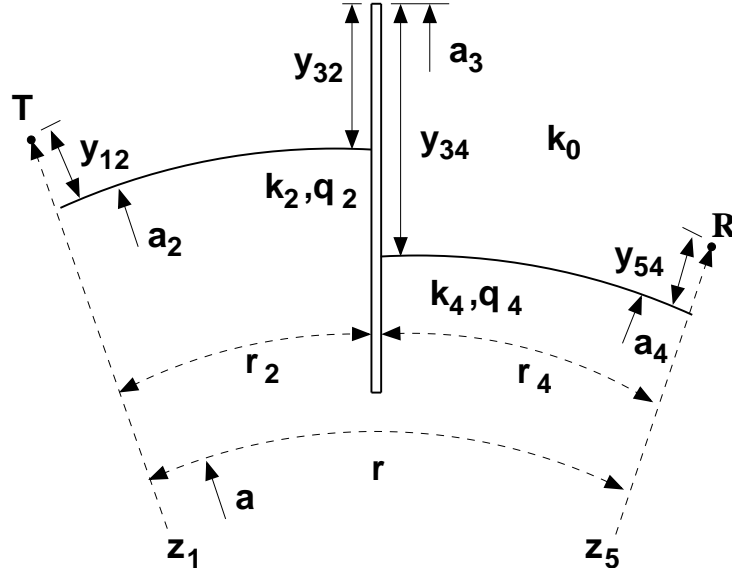


FIG. 2.6: Geometria do relevo da teoria de Furutsu.

$$r = r_2 + r_4 \quad (2.93)$$

$$k_0 = 2\pi/\lambda \quad (\lambda - \text{Comprimento de onda no espaço livre}) \quad (2.94)$$

$$k_m = k_0 \sqrt{\varepsilon_{r_m} - j 60 \sigma_m \lambda} \quad (m = 2, 4) \quad (2.95)$$

A – Coeficiente de atenuação do percurso, considerando-se as variações da forma do relevo, altura das antenas e constantes elétricas do solo. É expresso pelo somatório duplo:

$$A = \sum_{t_4, t_2} \sqrt{(c_2 + c_4)/c_4} \times A(y_{54}, c_4)_{t_4} \times T^{(3)}(c_2)_{t_4, t_2} \times f_{t_2}(y_{12}) \quad (2.96)$$

Onde:

$$A(y_{54}, c_4)_{t_4} = \sqrt{\pi c_4} (t_4 - q_4^2)^{-1} f_{t_4}(y_{54}) e^{-j[c_4(y_4 + t_4) + \pi/4]} \quad (2.97)$$

$$T^{(3)}(c_2)_{t_4, t_2} = [q_4 f'_{t_4}(y_{34}) f_{t_2}(y_{32}) - q_2 f_{t_4}(y_{34}) f'_{t_2}(y_{32})] \times \\ \times (y_4 - y_2 + t_4 - t_2)^{-1} (t_2 - q_2^2)^{-1} e^{-j c_2 (y_2 + t_2)} \quad (2.98)$$

$c_{2,4}$ – Distância numérica dos terminais à descontinuidade do relevo

$$c_m = \left(\frac{k_0 a}{2} \right)^{1/3} (r_m/a) \Big|_{m=2,4} \quad (2.99)$$

y_i ($i = 1 : 5$) – Alturas numéricas dos terminais e desníveis do terreno

$$y_1 = \left(\frac{2}{k_0 a} \right)^{1/3} k_0 (z_1 - a) \quad (2.100)$$

$$y_i = \left(\frac{2}{k_0 a} \right)^{1/3} k_0 (a_i - a) \Big|_{i=2,3,4} \quad (2.101)$$

$$y_5 = \left(\frac{2}{k_0 a} \right)^{1/3} k_0 (z_5 - a) \quad (2.102)$$

($t = t_{2,4}$) – Conjunto de raízes da equação:

$$w'(t_m) - q_m w(t_m) = 0 \Big|_{m=2,4} \quad (2.103)$$

$$w(t) = e^{-j\pi/3} (-\pi t/3)^{1/2} H_{1/3}^{(2)} \left[\left(\frac{2}{3} \right) (-t)^{3/2} \right] \quad (2.104)$$

$$w'(t) = dw(t)/dt \quad (2.105)$$

$q_{2,4}$ – Parâmetro característico do solo

$$q_m = -j \left(\frac{k_0 a}{2} \right)^{1/3} \frac{k_0^2}{k_m^2} \sqrt{\frac{k_m^2}{k_0^2} - 1} \quad (PV) \quad (2.106)$$

$$q_m = -j \left(\frac{k_0 a}{2} \right)^{1/3} \sqrt{\frac{k_m^2}{k_0^2} - 1} \quad (PH) \quad (2.107)$$

$$m = 2, 4$$

A função $f_{t_m}(y)$, com $y = y_{ij} = -y_{ji} = y_i - y_j$, denota a função ganho de altura, definida por

$$f_{t_m}(y) = \frac{w(t_m - y)}{w(t_m)} \Big|_{m=2,4} \quad (2.108)$$

, enquanto sua derivada é dada por

$$\begin{aligned} f'_{t_m}(y) &= \frac{w'(t_m - y)}{w'(t_m)} \\ &= q_m^{-1} \frac{w'(t_m - y)}{w(t_m)} \Big|_{m=2,4} \end{aligned} \quad (2.109)$$

No caso particular de uma terra lisa onde $h = 0$ e $y_2 = y_3 = y_4 = 0$, através das equações (2.110) e (2.114), obtém-se

$$T^{(3)}(c_2)_{t_4, t_2} = (q_4 - q_2) (t_4 - t_2)^{-1} (t_2 - q_2^2)^{-1} e^{-j c_2 t_2} \quad (q_4 \neq q_2) \quad (2.115)$$

$$= \begin{matrix} e^{-j c_2 t_2} & , & t_4 = t_2 \\ 0 & , & t_4 \neq t_2 \end{matrix} \quad (q_2 = q_4) \quad (2.116)$$

Logo, o coeficiente de atenuação (A) dado pela EQ. 2.96 poderá ser expresso em uma forma mais simplificada para o caso especial de uma terra lisa, conforme as equações:

$$A = \sum_{t_4, t_2} \sqrt{\pi(c_2 + c_4)} (q_4 - q_2) (t_4 - t_2)^{-1} (t_2 - q_2^2)^{-1} (t_4 - q_4^2)^{-1} \times \\ \times f_{t_2}(y_1) f_{t_4}(y_5) e^{-j(c_2 t_2 + c_4 t_4 + \pi/4)} \quad (q_4 \neq q_2) \quad (2.117)$$

$$= \sum_{t_2} \sqrt{\pi(c_2 + c_4)} (t_2 - q_2^2)^{-1} f_{t_2}(y_1) f_{t_2}(y_5) \times \\ \times e^{-j[(c_2 + c_4) t_2 + \pi/4]} \quad (q_4 = q_2) \quad (2.118)$$

Com a solução de Furutsu, concluem-se as discussões das diferentes abordagens da série dos resíduos, segundo a notação utilizada por diversos autores. Por uma questão de comodidade e sem fazer críticas desmerecedoras às demais soluções existentes, optou-se por utilizar uma notação mais simples expressa em termos das funções de Airy. Portanto, a análise do problema proposto neste trabalho estará calcada nas idéias estabelecidas por Fock e estendidas posteriormente por Wait e Furutsu.

Na análise da difração sobre a terra esférica, as diversas soluções aproximadas existentes apresentam restrições quanto a sua aplicação. A inobservância das limitações inerentes a cada caso particular podem extrapolar a região de validade dessas aproximações e conduzir a erros inaceitáveis. No entanto, as limitações impostas a estas aproximações não invalidam o mérito dessas soluções simplificadas que, quando empregadas corretamente fornecem resultados numéricos bastante precisos e aplicáveis diretamente à engenharia.

Na seção seguinte é comentada a região de aplicação da solução geral da série dos resíduos, assim como da aproximação da óptica geométrica, de menor importância para os objetivos deste trabalho.

2.5 LIMITE DE APLICAÇÃO DA ÓPTICA GEOMÉTRICA E DA SÉRIE DOS RESÍDUOS

Na análise do problema da difração sobre a curvatura da terra foi visto que aplicando a “transformação de Watson” à série rigorosa dos harmônicos esféricos obtém-se duas soluções de grande interesse prático: a aproximação da óptica geométrica e a série dos resíduos. Enquanto a óptica geométrica apresenta uma validade restrita que impossibilita a sua utilização em algumas situações, a série dos resíduos possui um caráter mais geral, podendo ser aplicada em um maior número de casos. Dentre estes casos de interesse prático para cálculos usuais de engenharia, a aplicação da série dos resíduos é mais apropriada naquelas situações em que é possível obter a sua rápida convergência na obtenção dos resultados numéricos. Nesta seção são discutidos os limites de aplicação prática das duas soluções existentes, considerando o critério que permite separar a zona de interferência da zona de difração do transmissor (ASSIS, 1966; 1979). Convém destacar que no processo de investigação da transição entre relevo suave e terreno acidentado será levado em conta este critério, daí a importância em abordá-lo.

2.5.1 REGIÃO DE VISIBILIDADE DO TRANSMISSOR

Nos enlaces em visibilidade, também denominados de visada direta, a antena transmissora está ligada opticamente à antena receptora. Esta condição corresponde à situação em que o receptor está situado na região de visibilidade do transmissor. Numericamente, esta região é representada pelo horizonte óptico radioelétrico d_h , definido como a máxima distância atingida pela trajetória retilínea da energia irradiada por uma antena situada a uma altura h acima da superfície esférica terrestre de raio de curvatura a , conforme mostra a FIG. 2.8.

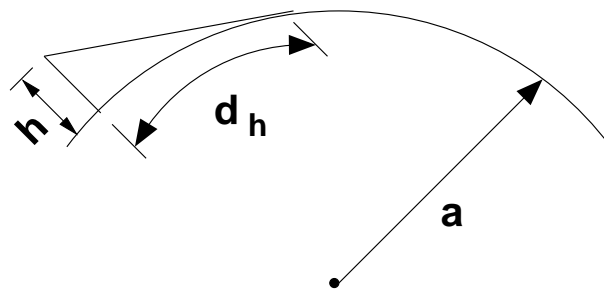


FIG. 2.8: Horizonte radioelétrico [$d_h = \sqrt{(a + h)^2 - a^2} \approx \sqrt{2ah}$].

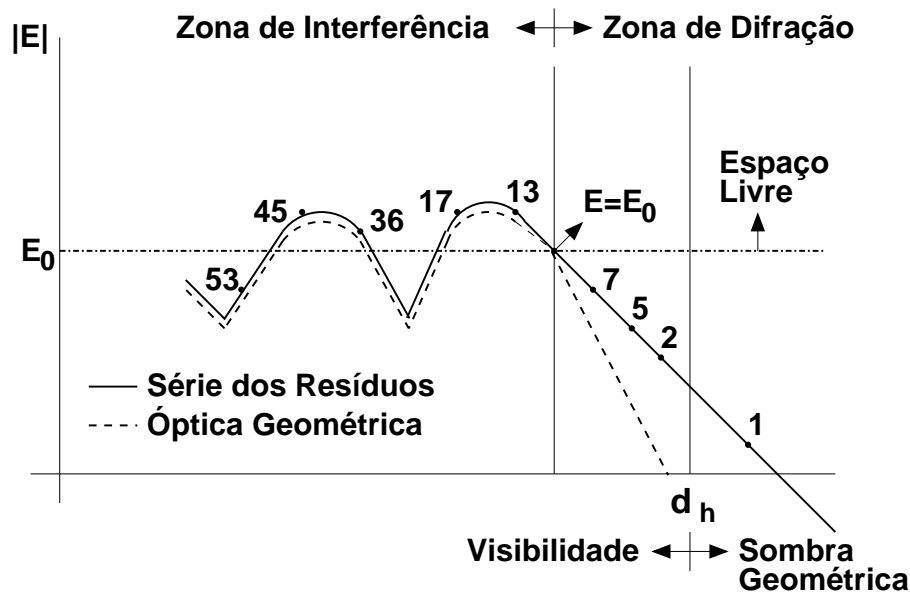


FIG. 2.9: Comportamento do campo dado pela série dos resíduos e pela óptica geométrica.

Observando a curva da FIG. 2.9, verifica-se que a condição de visibilidade poderá ocorrer tanto na região de interferência, quanto de difração do transmissor. Pelo critério definido para separar as zonas de interferência e de difração, foi estabelecido que:

★ Zona de Interferência – Corresponde a região na qual a composição dos raios direto e refletido no solo provoca uma oscilação do campo em torno do seu valor em espaço livre. Nesta situação, existe uma folga maior ou igual a 0.6 do raio do primeiro elipsóide de Fresnel em todo o percurso entre o transmissor e o receptor⁴⁰.

★ Zona de Difração – Corresponde a uma folga do percurso inferior a 0.6 do raio da primeira zona de Fresnel. Nesta região, a intensidade do campo elétrico é caracterizada por não mais oscilar em torno do seu valor em espaço livre. O campo decresce monotonicamente à medida que o ponto de observação se afasta do transmissor, o que caracteriza o efeito da difração.

Usualmente, a folga (H) do percurso é medida no plano perpendicular à terra e que contém a linha de visada direta entre o transmissor e o receptor. O corte do elipsóide neste plano define a denominada primeira zona de Fresnel. Assim, o ponto

⁴⁰ De forma mais precisa, esta folga H corresponde a 0.56 do raio R do primeiro elipsóide de Fresnel ($H = 0.56 R$).

de separação entre as zonas de interferência e difração é definido por $H = 0.6 R$, onde:

$$R = \sqrt{\frac{\lambda d_1 d_2}{d}} \quad (2.119)$$

R – Raio da primeira zona de Fresnel em um ponto situado a uma distância d_1 da antena transmissora e d_2 da antena receptora.

λ – Comprimento de onda.

$d = d_1 + d_2$

Uma vez enunciado o critério que separa as regiões de interferência e de difração do transmissor, resta comentar o método de cálculo a ser aplicado a cada situação específica. A aproximação da óptica geométrica é aplicável quando o receptor encontra-se na zona de interferência do transmissor, com o campo total dado pela composição dos raios direto e refletido no solo. Consequentemente, esta solução não é de interesse para os objetivos deste trabalho, que se propõe a analisar apenas os efeitos da difração pura. Por outro lado, embora a série dos resíduos possa ser utilizada na zona de interferência, ela possui maior aplicabilidade quando o receptor está situado na zona de difração do transmissor⁴¹. No entanto, sob o ponto de vista prático, a solução da série dos resíduos não é muito indicada à medida que o receptor penetra na região de visibilidade do transmissor, uma vez que o número de termos a serem considerados na série aumenta de forma significativa.

Uma vez estabelecidos os limites de aplicação da solução óptica e da série dos resíduos, resta analisar a seguir o comportamento do campo para as regiões de aplicação das várias soluções existentes, assim como a validade da série dos resíduos na região de sombra do transmissor.

2.5.2 REGIÃO DE SOMBRA GEOMÉTRICA DO TRANSMISSOR

A sombra geométrica corresponde a condição em que o receptor encontra-se além do horizonte do transmissor. Não existindo visibilidade radioelétrica entre o transmissor e o receptor, em alguns casos é possível aproximar o cálculo da intensidade do campo elétrico utilizando apenas um termo da série dos resíduos.

O comportamento do campo elétrico para pontos situados desde além do horizonte até a zona de interferência do transmissor é ilustrado na FIG. 2.9. O número de termos para a convergência da série dos resíduos é indicado apenas para exemplificar de forma

⁴¹ Mais especificamente, na região de sombra geométrica do transmissor.

hipotética a análise do problema. Pelo número de termos observado, nota-se a rápida convergência da série dos resíduos na região de sombra geométrica do transmissor.

Observa-se que somente a partir do ponto correspondente a $E = E_0$ anterior ao primeiro máximo, a divergência entre a solução óptica e a solução dada pela série dos resíduos começa a se tornar mais acentuada. Este ponto corresponde à transição entre as regiões de interferência e de difração do transmissor. É interessante notar também a generalidade da série dos resíduos para o cálculo do campo em qualquer região. No entanto, na condição de visibilidade e estando o receptor na zona de difração do transmissor, a complexidade do problema começa a se tornar mais evidente. Nesta condição, a necessidade de um maior número de termos da série torna o cálculo bastante laborioso, dificultando a aplicação prática da série dos resíduos a partir desta região.

Em particular, considerando distâncias breves⁴² dentro do limite do horizonte óptico, a aplicação da série dos resíduos leva a uma maior dificuldade computacional. Neste caso a série é lentamente convergente, tornando-se inadequada no cálculo do campo sobre a curvatura da terra. Nesta situação específica, torna-se necessário derivar uma expansão apropriada para atender a condição em que o receptor esteja localizado próximo ao transmissor. Uma expansão alternativa equivale à fórmula da terra plana modificada. Nesta solução, o termo principal corresponde à fórmula da terra plana de SOMMERFELD (1909 e 1926) e termos adicionais, em potências inversas de ka , estão associados à correção da terra plana, modificada para incluir o efeito da curvatura da terra. Os detalhes dos procedimentos algébricos para derivar tal expansão é um processo tedioso e maiores detalhes podem ser consultados em BREMMER (1949) e WAIT (1956).

Apesar das restrições em se aplicar em análises práticas a solução da série dos resíduos na região de visibilidade do transmissor ou com o receptor bem próximo ao transmissor, optou-se por utilizar esta solução. De fato, esta decisão foi tomada porque a região que mais interessa na análise do problema é a zona de difração e, em alguns casos, com o receptor situado na região de sombra geométrica do transmissor (terminais sem visibilidade). Nestas condições, o número de termos necessários para a convergência da série dos resíduos é tolerável, o que facilita a obtenção dos resultados numéricos para aplicações usuais em problemas de engenharia.

Concluindo, neste capítulo foram enunciados os conceitos fundamentais da teoria da difração sobre a curvatura da terra, tendo sido definida a notação matemática para a análise do problema em questão. Na análise dos principais tópicos abordados neste

⁴² Equivale a uma geometria terrestre de pequena curvatura ($a = d/\theta$)

capítulo, assumiu-se a condição idealizada de uma terra esférica lisa e homogênea. Aqui foram discutidas desde a solução mais rigorosa dos harmônicos zonais até a solução aproximada da série dos resíduos.

Em particular, algumas formulações da série dos resíduos apresentadas incorporam o efeito das irregularidades do terreno, tendo sido adotado o modelo teórico do “gume de faca” para o obstáculo do terreno. A partir do critério de separação entre as zonas de interferência e de difração do transmissor, foi definida a região de aplicação das diversas soluções existentes. Na análise deste critério foi traçada uma estratégia a ser adotada neste trabalho para investigar a transição entre os relevos suave e acidentado. A seguir, o Capítulo 3 aborda a teoria da difração, levando em conta o efeito da curvatura da terra lisa.

3 DIFRAÇÃO SOBRE A CURVATURA DA TERRA LISA

Este capítulo apresenta os resultados dos cálculos da atenuação por difração sobre a terra lisa e esférica. O método de cálculo é baseado na formulação da série dos resíduos, definida no capítulo anterior segundo a notação de diversos autores. Resultados obtidos incluem os valores práticos do raio equivalente da terra, frequência de operação, constantes do solo, polarização e alturas das antenas.¹

No final do capítulo será definido o conceito de faixa de transição ao longo do contorno da penumbra geométrica, entre as regiões de visibilidade e sombra do transmissor. Esta definição será importante para a interpretação dos resultados apresentados no próximo capítulo, quando então será estabelecido o critério de transição entre relevo suave (terra lisa) e terreno acidentado.

3.1 INTRODUÇÃO

De um modo geral, a perturbação causada pela geometria esférica da terra altera o comportamento da energia que se propaga, modificando de forma apreciável as características das ondas radioelétricas irradiadas sobre a superfície terrestre. Tais modificações provocam a atenuação da intensidade de campo elétrico recebido em torno do seu valor esperado em condições ideais de espaço livre. Embora seja introduzida esta perda adicional,² verificar-se-á a existência de um campo difratado, tal que a sua energia seja suficiente para produzir um sinal útil. Este efeito caracteriza a difração pela curvatura da terra, constituindo-se no principal mecanismo responsável pela propagação das ondas de rádio além do horizonte óptico das antenas.

Para análises de interesse prático para a engenharia, o problema da difração sobre a curvatura da terra deve ser abordado em condições idealizadas. Sendo assim, a geome-

¹ Valores práticos das variáveis envolvidas no problema incluem o raio equivalente da terra definido para a atmosfera padrão ($a_e = 8500 \text{ Km}$), faixas de frequências em VHF (30-300 MHz) e UHF (300-3000 MHz), permissividade dielétrica e condutividade para diferentes tipos de solo, terminais elevados ou sobre a superfície da terra, polarização vertical (PV) ou horizontal (PH) e distâncias do enlace dentro ou além do horizonte óptico das antenas.

² A perda adicional na intensidade de campo está associada ao rápido decréscimo de sua energia, conforme o receptor se aproxima da região mais profunda da sombra geométrica do transmissor. A magnitude desta perda aumenta com a distância do enlace e com a frequência de operação, dependendo também das alturas das antenas terminais.

tria da terra é imaginada ser uma esfera perfeita³ e homogênea, com suas propriedades elétricas caracterizadas pelas constantes do solo (permissividade dielétrica relativa ϵ_r e condutividade σ – *Siemens/km*). No que diz respeito à atmosfera terrestre, a propagação pode ser considerada em um meio homogêneo, desde que seja introduzido o conceito de raio equivalente da terra para compensar o efeito do decréscimo linear do índice de refração da atmosfera com a altura acima do solo. Com relação à superfície terrestre suposta perfeitamente lisa, requer-se que seja satisfeita a condição de que todas as irregularidades do relevo sejam ignoradas.

Vários métodos desenvolvidos para o cálculo da intensidade de campo e atenuação sobre a terra esférica lisa têm sido propostos por diversos autores. Neste trabalho, utiliza-se o método mais geral do cálculo da atenuação por difração sobre a terra esférica: a série dos resíduos. Conforme definido no Capítulo 2, o objetivo deste trabalho está na resolução do problema da propagação na região de difração definida por

$$\frac{H}{R} < 0.6 \quad (3.1)$$

, onde H denota a folga (ou obstrução) do percurso e R é o raio da primeira zona de Fresnel. Nesta região de interesse, o cálculo da atenuação através da série dos resíduos não requer um número considerável de termos para a sua convergência. Portanto, para este caso especial a solução dada pela série dos resíduos parece ser razoável em aplicações de interesse prático. A seguir, será descrito o método de cálculo da atenuação sobre a terra esférica lisa e homogênea dada pela série dos resíduos.

3.2 CÁLCULO DA ATENUAÇÃO PELA SÉRIE DOS RESÍDUOS

Conforme visto na seção anterior, a energia dos sinais de rádio que se propagam por difração sobre a curvatura da terra está sujeita a perdas adicionais. Análises quantitativas dessas perdas de energia estão associadas à atenuação do sinal e são importantes como medidas de desempenho dos sistemas de radioenlace. Esta medida de atenuação expressa a relação entre o módulo da intensidade do campo elétrico recebido e o campo em espaço livre. De acordo com a formulação descrita no Capítulo 2 e considerando uma terra esférica lisa e homogênea (vide FIG. 3.1(a)), a atenuação em relação ao espaço livre dada

³ A geometria esférica da terra representa o modelo teórico mais simples para discutir a influência da curvatura da terra na propagação do sinal. Uma esfera perfeita é caracterizada por apresentar uma curvatura constante.

pela série dos resíduos (A_R) pode ser reescrita da seguinte forma, segundo a notação adotada por WAIT (1962b; 1968b; 1974)

$$\left| \frac{E}{E_0} \right| = 2 \sqrt{\frac{\pi x}{j}} \left| \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{-j x t_s}}{(t_s - q^2)} f_s(h_t) f_s(h_r) \right| \quad (3.2)$$

Onde:

$$\left| \frac{E}{E_0} \right| = A_R \quad (3.3)$$

$$A_R (dB) = 20 \log(|E/E_0|) \quad (\text{Atenuação em decibéis}) \quad (3.4)$$

E – Intensidade do campo elétrico recebido

E_0 – Campo elétrico em espaço livre

x – Distância numérica do enlace

$$x = \left(\frac{k_0 a_e}{2} \right)^{1/3} \frac{d}{a_e} \quad (3.5)$$

d – Distância arco do enlace

a_e – Raio equivalente da terra

k_0 – Constante de propagação no espaço livre

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.6)$$

λ – Comprimento de onda

$f_s(h_{t,r})$ – Fator ganho de altura das antenas terminais

$$f_s(h_{t,r}) = \frac{w(t_s - y_{t,r})}{w(t_s)} \quad (3.7)$$

$y_{t,r}$ – Altura numérica dos terminais

$$y_{t,r} = \left(\frac{2}{k_0 a_e} \right)^{1/3} k_0 h_{t,r} \quad (3.8)$$

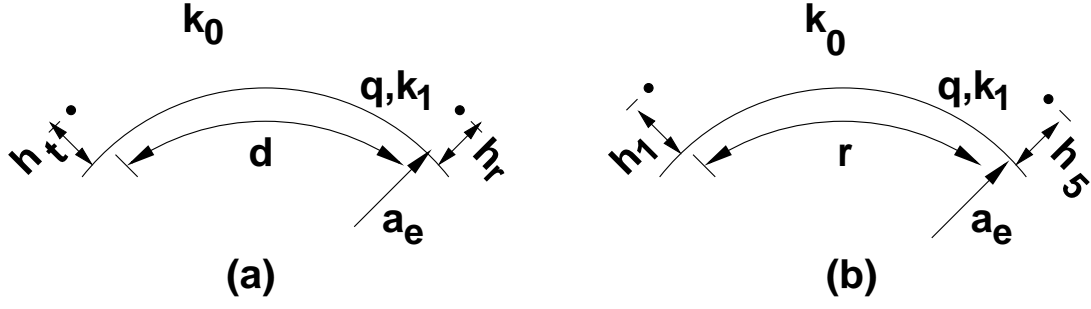


FIG. 3.1: Geometria da terra esférica lisa e homogênea. (a) Modelo de Wait (b) Modelo de Furutsu.

$w(t)$ – Integral de Airy, solução da equação diferencial:

$$w''(t) - t w(t) = 0 \quad (3.9)$$

t_s – Raízes que satisfazem a equação diferencial:

$$w'(t) - q w(t) = 0 \quad (3.10)$$

q – Parâmetro característico do solo

$$q = -j \left(\frac{k_0 a_e}{2} \right)^{1/3} \frac{k_0^2}{k_1^2} \sqrt{\frac{k_1^2}{k_0^2} - 1} \quad (\text{PV}) \quad (3.11)$$

$$q = -j \left(\frac{k_0 a_e}{2} \right)^{1/3} \sqrt{\frac{k_1^2}{k_0^2} - 1} \quad (\text{PH}) \quad (3.12)$$

k_1 – Constante de propagação do solo

$$k_1 = k_0 \sqrt{\varepsilon_r - j 60 \sigma \lambda} \quad (3.13)$$

Baseado na formulação de FURUTSU et al. (1964), a atenuação em relação ao espaço livre obtida pela série dos resíduos para o caso particular de uma terra lisa e homogênea, conforme geometria mostrada na FIG. 3.1(b), será representada por

$$A_R = 2A \quad (3.14)$$

Onde:

A – Coeficiente de atenuação

$$A = \sqrt{\pi c} \sum_{t_s} (t_s - q^2)^{-1} f_{t_s}(y_1) f_{t_s}(y_5) \times e^{-j[c t_s + \pi/4]} \quad (3.15)$$

c – Distância numérica entre os terminais

$$c = \left(\frac{k_0 a_e}{2} \right)^{1/3} (r/a) \quad (3.16)$$

$f_{t_s}(y_{1,5})$ – Função ganho de altura das antenas terminais

$$f_{t_s}(y_m) = \frac{w(t_s - y_m)}{w(t_s)} \Big|_{m=1,5} \quad (3.17)$$

$y_{1,5}$ – Altura numérica dos terminais

$$y_m = \left(\frac{2}{k_0 a_e} \right)^{1/3} k_0 h_m \Big|_{m=1,5} \quad (3.18)$$

$w(t_s)$ – Integral de Airy, solução da equação diferencial EQ. 3.9

t_s – Raízes da equação diferencial EQ. 3.10

q – Parâmetro característico do solo definido pela EQ. 3.11 e EQ. 3.12

A fim de caracterizar perfeitamente a idéia básica que originou o presente trabalho, torna-se necessário obter a máxima precisão nos cálculos da atenuação. Objetivando atingir esta máxima precisão e validar os resultados numéricos obtidos das formulações teóricas elaboradas para a análise da difração sobre a terra esférica lisa e homogênea, tomou-se como referência o programa *Ground-Wave (GrWaVe)* (CAVANAGH e THURSTON, 1988) desenvolvido para o setor de radiocomunicação da UIT (União Internacional de Telecomunicações).⁴ Este programa computa os valores da intensidade de campo e atenuação básica baseado nos métodos de cálculo da óptica geométrica (*G-Geometric*), da fórmula da terra plana modificada (*F-Flat*) e da série dos resíduos (*R-Residue*). Para maiores detalhes sobre este programa, considere o APÊNDICE 3.

⁴ Atual denominação do CCIR (Comitê Consultivo Internacional de Rádio).

Conforme visto anteriormente, a zona de difração é a região de interesse na análise deste trabalho. Nesta região, o número de termos necessários para assegurar a convergência da série dos resíduos é tolerável para aplicações de caráter prático. Portanto, esta análise enfoca apenas a formulação da série dos resíduos e não serão utilizadas as soluções do *GrWaVe* baseadas na aproximação da óptica geométrica e na fórmula da terra plana modificada. Para efeito de comparação dos valores da atenuação básica obtidos pelo programa *GrWaVe* com a atenuação em relação ao espaço livre computada das formulações teóricas de Wait e Furutsu apresentadas anteriormente, devem ser observadas as seguintes definições:

★ Atenuação em espaço livre (A_0):

$$A_0 (dB) = 32.4 + 20 \log (d) + 20 \log (f) \quad (3.19)$$

d – Distância do enlace (km)

f – Frequência de operação (MHz)

★ Atenuação adicional devida à difração sobre a curvatura da terra (A_a):

$$A_a (dB) = 20 \log (|E_0/E|) \quad (3.20)$$

★ Atenuação básica de transmissão (A_b):

$$A_b (dB) = A_0 (dB) + A_a (dB) \quad (3.21)$$

Considerando que nas notações de Wait e Furutsu tem-se a representação E/E_0 , para obter-se o valor da atenuação adicional (A_a) correspondente ao *GrWaVe* basta estabelecer a relação $A_a = -20 \log (|E/E_0|)$ nas formulações da série dos resíduos definidas por esses autores.

Com base nestas definições e objetivando verificar a precisão dos resultados obtidos através do método de cálculo da série dos resíduos, foram estabelecidos cinco enlaces diferentes para computar os valores da atenuação em relação ao espaço livre. Cada enlace é definido por uma frequência de operação (f), valores específicos das constantes do solo (ε_r e σ), polarização (PV–Vertical e PH–Horizontal) e alturas das antenas transmissora e receptora (h_t e h_r). Para o raio real da terra (a) de 6375 Km foi adotado um raio equivalente (a_e) de 8500 Km, correspondendo à correção da variação do índice de refração para a atmosfera padrão ($\kappa = 4/3$).

Os resultados dos cálculos da atenuação obtidos da série dos resíduos são mostrados na FIG. 3.2 (a)–(e) e TAB. 3.1 a TAB. 3.5. Valores da atenuação em relação ao espaço livre foram computados do programa *GrWaVe* ($A_{R_{GRW}}$) e das formulações de Wait ($A_{R_{WT}}$) e Furutsu ($A_{R_{FT}}$). O número de termos utilizados nos cálculos da série encontram-se indicados nas tabelas pela variável *NTS*. Como critério de convergência desta série, o número de termos no somatório foi incrementado até que a condição $|Termo/Soma| \leq 10^{-5}$ fosse satisfeita.

A análise dos resultados obtidos indica que as formulações teóricas de Wait e Furutsu concordam perfeitamente entre si e de uma forma aproximada com os resultados computados pelo *GrWaVe*. Devido a lenta convergência da série dos resíduos para distâncias breves⁵ dentro do horizonte óptico das antenas,⁶ foi tomado como valor inicial nos cálculos da atenuação a distância dada pelo *GrWaVe* correspondente ao limite de transição da óptica geométrica (*G*) ou da fórmula da terra plana modificada (*F*) para a série dos resíduos. Estas distâncias de transição encontram-se indicadas na FIG. 3.2 (a)–(e).

Observando a TAB. 3.1 a TAB. 3.5, nota-se que conforme a frequência aumenta os valores da atenuação obtidos pelo *GrWaVe* divergem de forma progressiva dos resultados computados através da série dos resíduos segundo as notações de Furutsu e Wait. Esta divergência é atribuída à formulação adotada pelo *GrWaVe* que inclui um decréscimo exponencial do índice de refatividade da troposfera terrestre. Segundo RICE et al. (1967), o efeito da variação deste índice altera o raio efetivo da terra, provocando uma variação mais significativa da atenuação nas altas frequências.

De acordo com a TAB. 3.5, para uma frequência de operação de 3000 MHz foi obtida uma diferença máxima de atenuação entre o *GrWaVe* e demais notações da série dos resíduos de ≈ 4 dB.⁷ No entanto, os valores de atenuação bastante aproximados obtidos na frequência de 30 MHz (vide TAB. 3.1) não invalida a precisão dos resultados obtidos com o programa implementado neste trabalho para o cálculo da atenuação através da série dos resíduos.

⁵ Para os enlaces de curta distância a curvatura da terra pode ser ignorada e a solução pode ser dada pela teoria da terra plana (BURROWS, 1947; NORTON, 1935). Segundo BREMMER (1949), para uma distância do transmissor $d_{Km} < 10 \lambda_m^{1/3}$ (λ_m - Comprimento de onda em metros) a influência da curvatura da terra não é apreciável e apenas alguns termos da série de potências expressa pela fórmula da terra plana modificada são suficientes para obter uma aproximação razoável, com um erro de 10 % nos cálculos da atenuação.

⁶ Mais especificamente, com o receptor situado na região de visibilidade do transmissor definida pela distância $d \leq (2 a_e)^{1/2} (\sqrt{h_t} + \sqrt{h_r})$.

⁷ $A_{R_{GRW}} - A_{R_{FT,WT}} = -4.16$ dB.

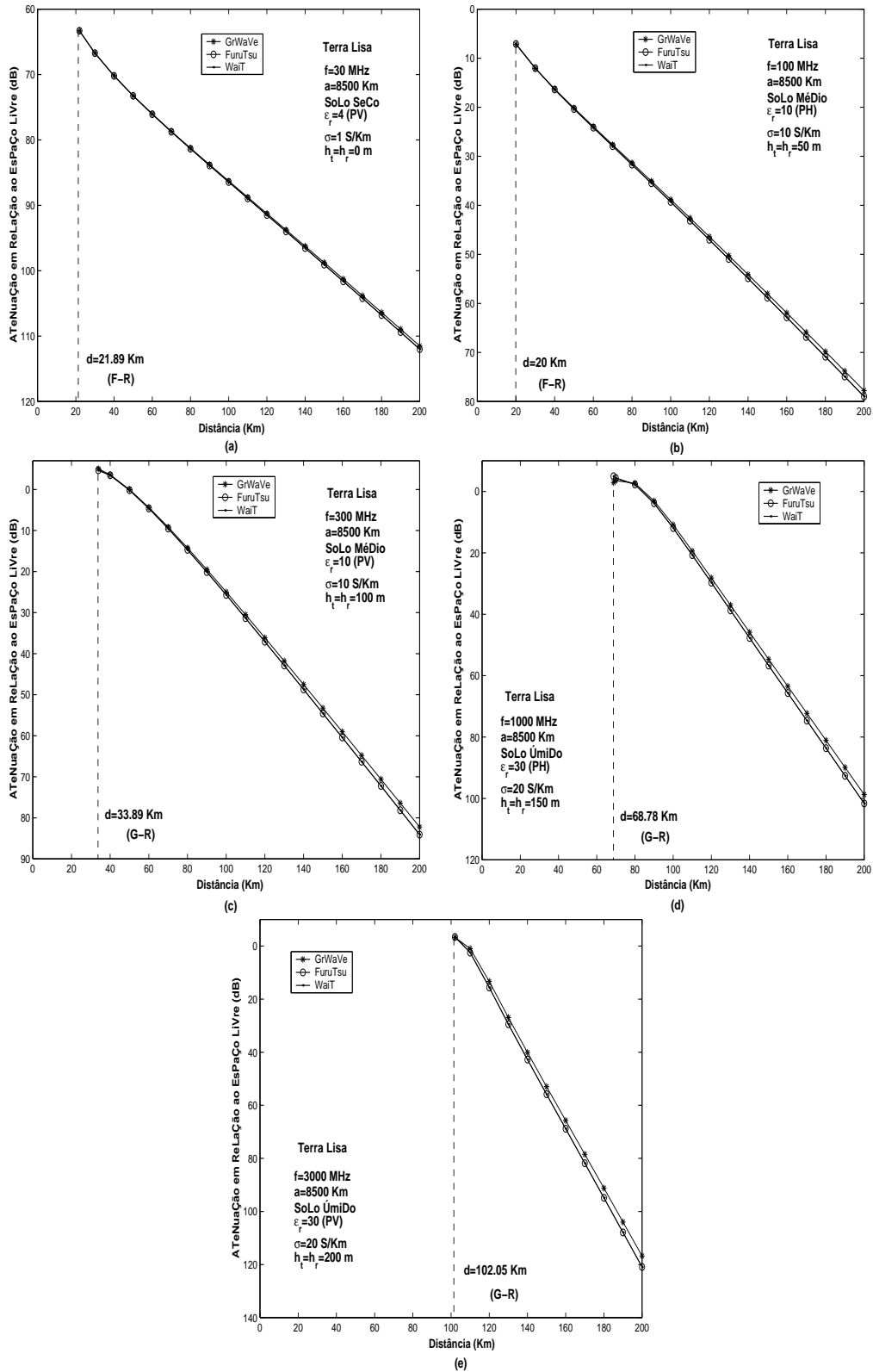


FIG. 3.2: Cálculo da atenuação em relação ao espaço livre pela série dos resíduos.

TAB. 3.1: Enlace 1 - $f = 30 \text{ MHz}$, $\varepsilon_r = 4$, $\sigma = 1 \text{ S/km}$, PV , $h_t = h_r = 0 \text{ m}$

D (Km)	A_{RGRW} (dB)	A_{RWT} (dB)	$A_{RGRW} - A_{RWT}$ (dB)	NTS	A_{RFT} (dB)	$A_{RGRW} - A_{RFT}$ (dB)	NTS
21.89	63.30	63.30	0.01	47	63.30	0.01	47
30.00	66.72	66.72	0.00	31	66.72	0.00	31
40.00	70.18	70.20	-0.02	22	70.20	-0.02	22
50.00	73.22	73.25	-0.03	16	73.25	-0.03	16
60.00	76.01	76.07	-0.06	13	76.07	-0.06	13
70.00	78.68	78.75	-0.08	11	78.75	-0.08	11
80.00	81.25	81.35	-0.11	9	81.35	-0.11	9
90.00	83.78	83.91	-0.12	8	83.91	-0.12	8
100.00	86.28	86.44	-0.16	7	86.44	-0.16	7
110.00	88.77	88.96	-0.19	6	88.96	-0.19	6
120.00	91.25	91.47	-0.22	6	91.47	-0.22	6
130.00	93.75	94.00	-0.25	5	94.00	-0.25	5
140.00	96.25	96.53	-0.28	5	96.53	-0.28	5
150.00	98.76	99.07	-0.32	4	99.07	-0.32	4
160.00	101.29	101.63	-0.35	4	101.63	-0.35	4
170.00	103.82	104.20	-0.38	4	104.20	-0.38	4
180.00	106.37	106.79	-0.41	4	106.79	-0.41	4
190.00	108.93	109.39	-0.45	3	109.39	-0.45	3
200.00	111.51	112.00	-0.49	3	112.00	-0.49	3

TAB. 3.2: Enlace 2 - $f = 100 \text{ MHz}$, $\varepsilon_r = 10$, $\sigma = 10 \text{ S/km}$, PH , $h_t = h_r = 50 \text{ m}$

D (Km)	A_{RGRW} (dB)	A_{RWT} (dB)	$A_{RGRW} - A_{RWT}$ (dB)	NTS	A_{RFT} (dB)	$A_{RGRW} - A_{RFT}$ (dB)	NTS
20.00	7.17	7.08	0.09	37	7.08	0.09	37
30.00	12.07	12.02	0.05	20	12.02	0.05	20
40.00	16.27	16.38	-0.11	13	16.38	-0.11	13
50.00	20.16	20.35	-0.19	10	20.35	-0.19	10
60.00	23.94	24.17	-0.24	8	24.17	-0.24	8
70.00	27.65	27.94	-0.30	6	27.94	-0.30	6
80.00	31.35	31.71	-0.36	5	31.71	-0.36	5
90.00	35.07	35.49	-0.43	5	35.49	-0.43	5
100.00	38.82	39.30	-0.48	4	39.30	-0.48	4
110.00	42.59	43.15	-0.56	4	43.15	-0.56	4
120.00	46.40	47.03	-0.63	4	47.03	-0.63	4
130.00	50.24	50.94	-0.70	3	50.94	-0.70	3
140.00	54.12	54.88	-0.76	3	54.88	-0.76	3
150.00	58.01	58.85	-0.84	3	58.85	-0.84	3
160.00	61.93	62.84	-0.91	3	62.84	-0.91	3
170.00	65.87	66.85	-0.98	3	66.85	-0.98	3
180.00	69.83	70.88	-1.05	2	70.88	-1.05	2
190.00	73.80	74.93	-1.13	2	74.93	-1.13	2
200.00	77.79	78.99	-1.20	2	78.99	-1.20	2

TAB. 3.3: Enlace 3 – $f = 300 \text{ MHz}$, $\varepsilon_r = 10$, $\sigma = 10 \text{ S/km}$, PV , $h_t = h_r = 100 \text{ m}$

D (Km)	A_{RGRW} (dB)	A_{RWT} (dB)	$A_{RGRW} - A_{RWT}$ (dB)	NTS	A_{RFT} (dB)	$A_{RGRW} - A_{RFT}$ (dB)	NTS
33.89	-5.04	-4.69	-0.36	26	-4.69	-0.36	26
40.00	-3.57	-3.47	-0.10	18	-3.47	-0.10	18
50.00	0.04	0.18	-0.14	12	0.18	-0.14	12
60.00	4.38	4.63	-0.24	8	4.63	-0.24	8
70.00	9.16	9.52	-0.36	7	9.52	-0.36	7
80.00	14.24	14.71	-0.47	5	14.71	-0.47	5
90.00	19.52	20.12	-0.59	5	20.12	-0.59	5
100.00	24.97	25.68	-0.71	4	25.68	-0.71	4
110.00	30.51	31.34	-0.83	3	31.34	-0.83	3
120.00	36.13	37.08	-0.95	3	37.08	-0.95	3
130.00	41.81	42.88	-1.07	3	42.88	-1.07	3
140.00	47.53	48.70	-1.18	3	48.70	-1.18	3
150.00	53.27	54.56	-1.29	2	54.56	-1.29	2
160.00	59.03	60.43	-1.40	2	60.43	-1.40	2
170.00	64.81	66.32	-1.51	2	66.32	-1.51	2
180.00	70.60	72.22	-1.62	2	72.22	-1.62	2
190.00	76.40	78.14	-1.74	2	78.14	-1.74	2
200.00	82.22	84.07	-1.85	2	84.07	-1.85	2

TAB. 3.4: Enlace 4 – $f = 1000 \text{ MHz}$, $\varepsilon_r = 30$, $\sigma = 20 \text{ S/km}$, PH , $h_t = h_r = 150 \text{ m}$

D (Km)	A_{RGRW} (dB)	A_{RWT} (dB)	$A_{RGRW} - A_{RWT}$ (dB)	NTS	A_{RFT} (dB)	$A_{RGRW} - A_{RFT}$ (dB)	NTS
68.78	-2.90	-4.94	2.04	10	-4.94	2.04	10
70.00	-3.52	-4.38	0.86	9	-4.38	0.86	9
80.00	-2.66	-2.29	-0.37	5	-2.29	-0.37	5
90.00	3.10	3.85	-0.76	5	3.85	-0.76	5
100.00	10.83	11.91	-1.08	4	11.91	-1.08	4
110.00	19.38	20.70	-1.32	3	20.70	-1.32	3
120.00	28.20	29.71	-1.52	2	29.71	-1.52	2
130.00	37.04	38.73	-1.69	2	38.73	-1.69	2
140.00	45.86	47.71	-1.85	2	47.71	-1.85	2
150.00	54.66	56.68	-2.02	2	56.68	-2.02	2
160.00	63.46	65.65	-2.19	2	65.65	-2.19	2
170.00	72.25	74.62	-2.37	1	74.62	-2.37	1
180.00	81.06	83.61	-2.54	1	83.61	-2.54	1
190.00	89.89	92.61	-2.72	1	92.61	-2.72	1
200.00	98.73	101.62	-2.89	1	101.62	-2.89	1

TAB. 3.5: Enlace 5 – $f = 3000 \text{ MHz}$, $\varepsilon_r = 30$, $\sigma = 20 \text{ S/km}$, PV , $h_t = h_r = 200 \text{ m}$

D (Km)	A_{RGRW} (dB)	A_{RWT} (dB)	$A_{RGRW} - A_{RWT}$ (dB)	NTS	A_{RFT} (dB)	$A_{RGRW} - A_{RFT}$ (dB)	NTS
102.05	-3.30	-3.43	0.13	8	-3.43	0.13	8
110.00	0.96	2.48	-1.52	7	2.48	-1.52	7
120.00	13.34	15.59	-2.25	4	15.59	-2.25	4
130.00	26.95	29.45	-2.50	3	29.45	-2.50	3
140.00	40.12	42.78	-2.67	2	42.78	-2.67	2
150.00	52.96	55.85	-2.89	2	55.85	-2.89	2
160.00	65.71	68.84	-3.14	2	68.84	-3.14	2
170.00	78.45	81.84	-3.39	1	81.84	-3.39	1
180.00	91.21	94.86	-3.65	1	94.86	-3.65	1
190.00	103.98	107.89	-3.91	1	107.89	-3.91	1
200.00	116.78	120.94	-4.16	1	120.94	-4.16	1

Na próxima seção são enunciados alguns resultados importantes obtidos na análise da difração sobre a curvatura da terra. Esses resultados relacionam a natureza do campo na faixa de transição ao longo do contorno da penumbra geométrica, entre as regiões de visibilidade e sombra do transmissor.

3.3 TRANSIÇÃO ENTRE LUZ E SOMBRA

A condição correspondente à folga do percurso igual a 0.6 do raio da primeira zona de Fresnel define o critério de separação entre a região de validade da óptica geométrica⁸ e a região de difração. Enquanto a aproximação da óptica geométrica está fortemente associada à propagação em visibilidade através de uma formulação relativamente simples, na zona de difração o procedimento de cálculo da atenuação torna-se bem mais complicado. A maior dificuldade de cálculo nesta região resulta da necessidade de se levar em conta no equacionamento matemático do problema a interação existente entre o relevo e o feixe de energia que se propaga.

Antes de prosseguir na análise da questão que constitui o objetivo principal desta seção, é interessante confirmar numericamente a condição enunciada acima. De acordo com a FIG. 3.3 e admitindo a simetria esférica do problema, tem-se para a condição de

⁸ Corresponde à zona de interferência do transmissor.

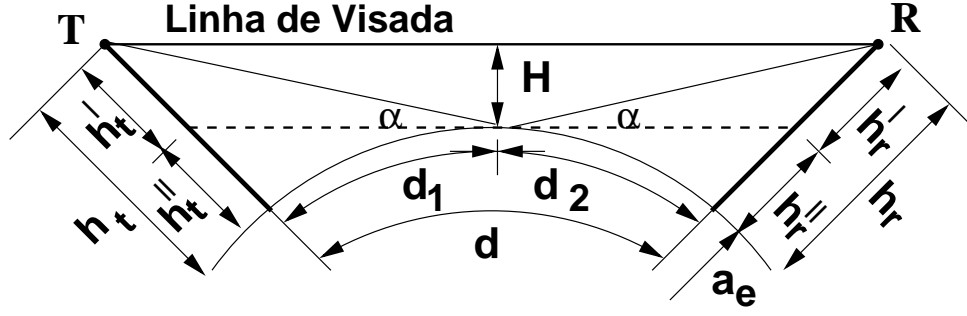


FIG. 3.3: Geometria aplicada no cálculo da folga do percurso.

antenas elevadas a seguinte relação aproximada para a folga (H) do percurso⁹

$$\begin{aligned}
 H &\simeq h_{t,r}^I \simeq h_{t,r} - h_{t,r}^{II} \\
 &\simeq h_{t,r} - \frac{d_{1,2}^2}{2a_e} \\
 &\simeq h_{t,r} - \frac{d^2}{8a_e}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Considerando a folga do percurso de 0.6 do raio da primeira zona de Fresnel ($H = 0.6 R$)¹⁰ na EQ. 3.22, obtém-se a distância d do ponto correspondente a esta folga através da equação

$$h_{t,r} = \frac{0.6 \sqrt{\lambda d}}{2} + \frac{d^2}{8a_e} \tag{3.23}$$

Ou de forma menos reduzida, através do polinômio de 4^a ordem

$$\frac{d^4}{64a_e^2} - \frac{h_{t,r}}{4a_e} d^2 - 0.09 \lambda d + h_{t,r}^2 = 0 \tag{3.24}$$

Resolvendo o polinômio definido pela EQ. 3.24 para os diferentes valores de frequências e alturas das antenas, foram obtidas as distâncias (D_{km}) mostradas na TAB. 3.6 para os pontos correspondentes à folga $H = 0.6 R$. De acordo com os dados desta tabela e considerando a formulação da série dos resíduos, foram obtidas as curvas de atenuação ilustradas na FIG. 3.4 (a)-(e).

⁹ Por definição, a folga H do percurso corresponde a menor distância da terra, suposta esférica, à linha de visada direta do transmissor ao receptor (vide FIG. 3.3). Neste trabalho, foi tomado como valor aproximado de H a medida sobre a perpendicular à tangente no ponto de reflexão, entre este ponto e o raio de visada direta.

¹⁰ $R = \sqrt{\frac{\lambda d_1 d_2}{d}} = \frac{\sqrt{\lambda d}}{2}$.

TAB. 3.6: Cálculo da distância D_{km} correspondente à folga $H = 0.6 R$ ($E = E_0$).

f (MHz)	$htr = 50$ m	$htr = 100$ m	$htr = 150$ m	$htr = 200$ m	$htr = 250$ m	$htr = 300$ m
	D_{km} ($H = 0.6 R$)	D_{km} ($H = 0.6 R$)	D_{km} ($H = 0.6 R$)	D_{km} ($H = 0.6 R$)	D_{km} ($H = 0.6 R$)	D_{km} ($H = 0.6 R$)
30	2.77	10.74	22.57	36.26	50.31	63.94
100	8.84	28.64	48.87	66.83	82.70	96.94
300	21.02	48.19	69.45	87.07	102.34	115.98
1000	35.84	63.18	83.49	100.31	114.94	128.07
3000	45.06	71.26	90.86	107.18	121.46	134.30

Deve ser observado que as curvas mencionadas na FIG. 3.4 (a)–(e) foram todas traçadas a partir do ponto em que $E = E_0$ ($A_R = 0$ dB)¹¹ antes do campo começar a decrescer continuamente, o que caracteriza o início da zona de difração.

Baseando-se nos resultados apresentados, pode ser verificada a validade da condição $E = E_0$ para a folga $H = 0.6 R$. Considerando uma frequência de 300 MHz ($\lambda = 1$ m) e antenas de 100 m, obtém-se através das curvas de atenuação para o ponto onde $E = E_0$

$$\begin{aligned} d &= 48.2 \text{ Km} \\ H &= 100 - \frac{(48.2 \times 10^3)^2}{8 \times 8500 \times 10^3} = 65.83 \text{ m} \end{aligned} \quad (3.25)$$

, enquanto que

$$\begin{aligned} R &= \frac{\sqrt{\lambda d}}{2} = \frac{\sqrt{1 \times 48.2 \times 10^3}}{2} = 109.77 \text{ m} \\ H &= 0.6 R = 65.86 \text{ m} \end{aligned} \quad (3.26)$$

e, portanto, os resultados obtidos em (3.25) e (3.26) mostram ser bastante aproximados. Logo, a condição da folga $H = 0.6 R$ no ponto em que $E = E_0$ define o critério que separa as zonas de interferência e de difração do transmissor.

¹¹ E denota a intensidade de campo elétrico recebido e E_0 o valor do campo em condições ideais de espaço livre.

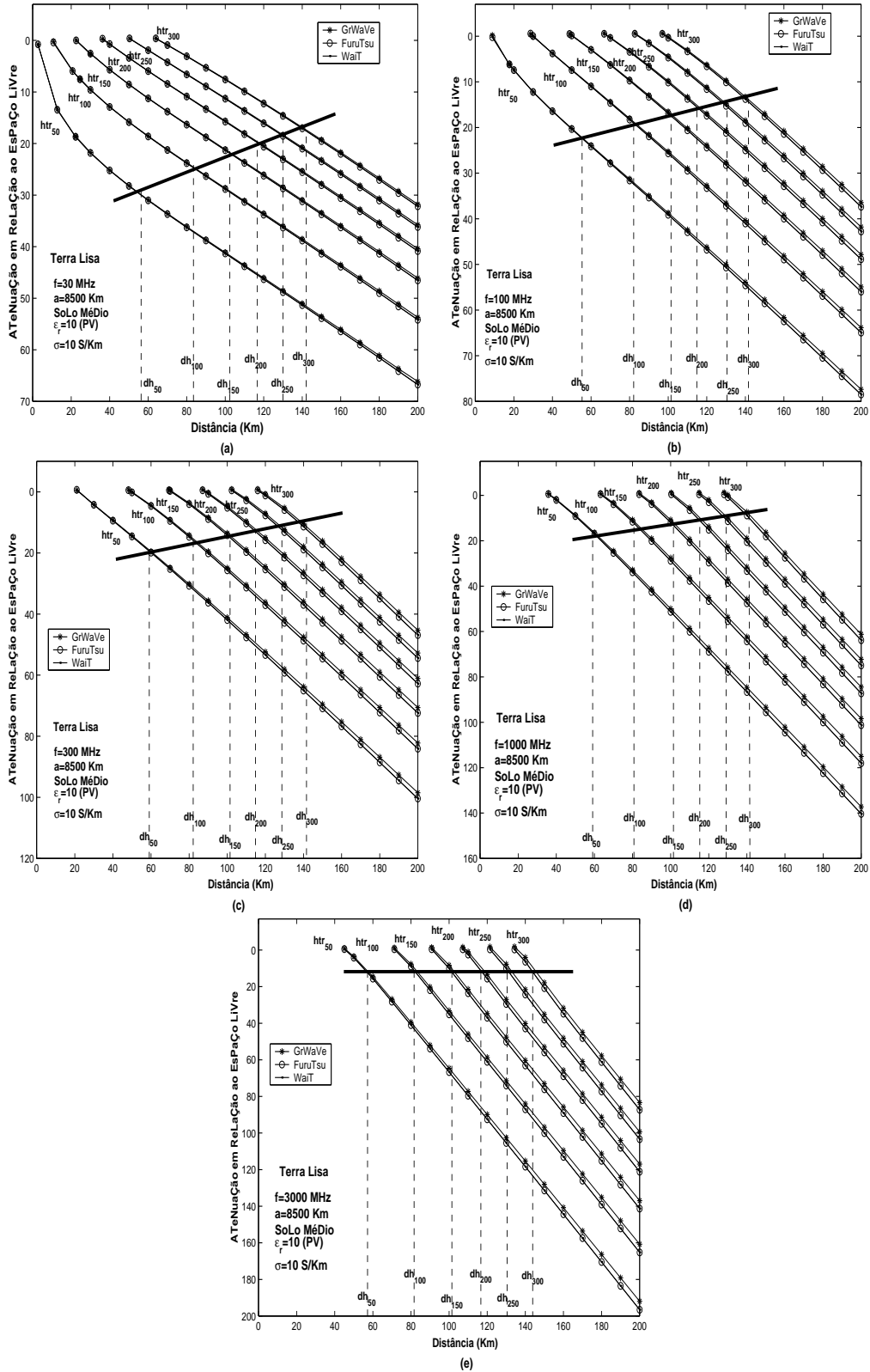


FIG. 3.4: Curvas de atenuação e do horizonte óptico total das antenas.

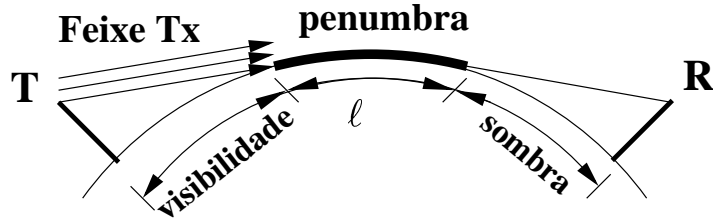


FIG. 3.5: Faixa de transição no contorno da penumbra geométrica do transmissor.

A análise da principal questão a ser tratada nesta seção estabelece que no limite da visibilidade geométrica ocorre outro fenômeno que tem importância fundamental no estudo da difração por obstáculos do terreno: A transição entre luz¹² e sombra¹³.

De acordo com a teoria da difração sobre a curvatura da terra, a transição entre luz e sombra não é abrupta. Esta transição ocorre de forma gradual ao longo de uma faixa denominada de região de penumbra, conforme ilustra a FIG. 3.5. A interação entre a energia que se propaga e o terreno depende unicamente das características do campo onde se processa a transição, evidenciando o caráter local desse campo nesta região. Esta propriedade peculiar que caracteriza a natureza do campo na região da penumbra geométrica foi traduzida por FOCK (1965) pelo “Princípio da Ação Local”, enunciado da seguinte forma:

“A transição da região de visibilidade para a região de sombra do transmissor se passa através de uma estreita faixa sobre o contorno da penumbra geométrica. O campo nesta faixa de transição apresenta um caráter local, dependendo somente da intensidade de energia incidente nesta região, das propriedades elétricas do solo e do raio de curvatura no ponto de incidência. A largura ℓ desta faixa de transição é da ordem de

$$\ell = \sqrt[3]{\frac{\lambda}{\pi} r^2} \quad (3.27)$$

, onde o raio de curvatura r corresponde ao raio equivalente da terra (a_e).”

Embora Fock tenha enunciado esta condição a partir do estudo da difração de uma onda plana por um obstáculo convexo, é possível estabelecer uma conexão com a formulação da série dos resíduos utilizada neste trabalho. Sendo assim, para atender ao “Princípio da Ação Local”, o cálculo do campo através da série dos resíduos deverá ser

¹² Visibilidade geométrica.

¹³ O receptor encontra-se além do horizonte do transmissor.

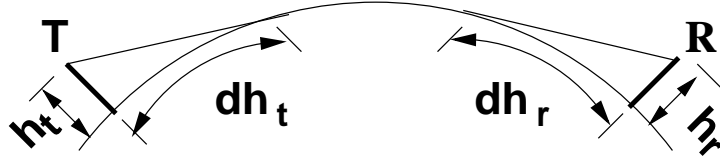


FIG. 3.6: Horizonte óptico das antenas transmissora ($dh_t = \sqrt{2a_e h_t}$), receptora ($dh_r = \sqrt{2a_e h_r}$) e horizonte total das duas antenas ($dh_{tr} = dh_t + dh_r$).

independente das alturas das antenas, o que é aproximadamente possível quando as antenas estiverem suficientemente elevadas em relação ao terreno. De fato, esta condição pode ser demonstrada analiticamente a partir de um desenvolvimento matemático da altura numérica das antenas ($\chi_{h_{t,r}}$) discutido a seguir.

Segundo a notação de Van der Pol e Bremmer, a altura numérica das antenas terminais é expressa por

$$\chi_{h_i} = (k_0 a_e)^{1/3} \left(\frac{2h_i}{a_e} \right)^{1/2} \Big|_{i=t,r} \quad (3.28)$$

, onde $k_0 = 2\pi/\lambda$. Das definições de largura de faixa de transição ($\ell = \lambda^{1/3} a_e^{2/3}/\pi^{1/3}$) e horizonte óptico das antenas terminais ($d_{h_{t,r}} = \sqrt{2a_e h_{t,r}}$),¹⁴ pode-se expressar o fator $\chi_{h_{t,r}}$ em termos desses dois parâmetros. Sendo assim,

$$\begin{aligned} \chi_{h_{t,r}} &= \left(\frac{2\pi}{\lambda} a_e \right)^{1/3} \left(\frac{2a_e h_{t,r}}{a_e^2} \right)^{1/2} \\ &= \frac{2^{1/3} \pi^{1/3}}{\lambda^{1/3}} a_e^{-2/3} d_{h_{t,r}} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Mas, de acordo com a EQ. 3.27,

$$a_e^{-2/3} = \frac{\lambda^{1/3}}{\ell \pi^{1/3}} \quad (3.30)$$

Efetuando a operação de substituição da EQ. 3.30 na EQ. 3.29, obtém-se:

$$\chi_{h_{t,r}} = 2^{1/3} \frac{d_{h_{t,r}}}{\ell} \quad (3.31)$$

Para as antenas terminais suficientemente elevadas tem-se $\chi_{h_{t,r}} \gg 1$ e, portanto,

$$d_{h_{t,r}} \gg \frac{1}{2^{1/3}} \ell \quad (3.32)$$

¹⁴ Vide FIG. 3.6.

A EQ. 3.32 define de forma analítica a condição para que a intensidade de campo dependa unicamente das características da zona de penumbra, não havendo fora desta região uma interação significativa entre o feixe de energia e o terreno. Este resultado pode ser observado visualmente através da FIG. 3.4 (a)–(e) em conjunto com os valores numéricos da TAB. 3.7. Nesta tabela tem-se para cada frequência a largura ℓ em *km* da faixa de penumbra. Adicionalmente, esta tabela apresenta a distância ao horizonte ($d_{h_{tr}}$)¹⁵ para cada par de alturas das antenas consideradas, assim como os correspondentes valores da atenuação para estas distâncias ao horizonte¹⁶.

Em complementação às curvas de atenuação, a FIG. 3.4 (a)–(e) indica a posição do horizonte para cada um dos pares de antenas, dada pela soma da distância ao horizonte de cada uma delas. Para estas posições resultam as curvas de atenuação do horizonte óptico total das antenas, conforme ilustrado em cada um dos gráficos desta figura. Verifica-se que nas frequências onde $\ell \gtrsim d_{h_{t,r}}$, a intensidade de campo no horizonte apresenta claramente uma dependência em relação às alturas das antenas. No entanto, à medida que a frequência aumenta a condição $\ell \ll 2^{1/3}d_{h_{t,r}}$ tende a ser satisfeita. Sob esta condição, a curva do horizonte total das antenas tende a um valor constante. Esta situação evidencia que no horizonte a dependência do campo em relação às alturas das antenas tende a desaparecer, conforme mostra a FIG. 3.4 (e) para a frequência de 3000 MHz.

TAB. 3.7: Cálculos da atenuação, da largura (ℓ) da faixa de penumbra e do horizonte óptico total ($d_{h_{tr}}$) dos pares de antenas terminais.

f (MHz)	ℓ (Km)	$h_{tr} = 50$ m $d_{h_{tr}} = 58.31$ Km		$h_{tr} = 100$ m $d_{h_{tr}} = 82.46$ Km		$h_{tr} = 150$ m $d_{h_{tr}} = 101$ Km		$h_{tr} = 200$ m $d_{h_{tr}} = 116.62$ Km		$h_{tr} = 250$ m $d_{h_{tr}} = 130.38$ Km		$h_{tr} = 300$ m $d_{h_{tr}} = 142.83$ Km	
		$A_{R_{G,W}}$ (dB)	$A_{R_{FT,WT}}$ (dB)	$A_{R_{G,W}}$ (dB)	$A_{R_{FT,WT}}$ (dB)	$A_{R_{G,W}}$ (dB)	$A_{R_{FT,WT}}$ (dB)	$A_{R_{G,W}}$ (dB)	$A_{R_{FT,WT}}$ (dB)	$A_{R_{G,W}}$ (dB)	$A_{R_{FT,WT}}$ (dB)	$A_{R_{G,W}}$ (dB)	$A_{R_{FT,WT}}$ (dB)
30	61.27	30.49	30.56	24.31	24.43	21.38	21.53	19.61	19.79	18.41	18.61	17.54	17.76
100	41.01	23.32	23.49	18.88	19.16	16.91	17.27	15.72	16.15	14.92	15.38	14.31	14.82
300	28.44	18.64	18.97	15.52	16.02	14.09	14.72	13.19	13.93	12.54	13.37	12.06	12.95
1000	19.04	15.09	15.67	12.79	13.66	11.64	12.73	10.87	12.15	10.30	11.74	9.84	11.43
3000	13.20	10.74	10.93	10.68	10.78	9.60	10.72	8.83	10.67	8.24	10.60	7.77	10.57

¹⁵ Horizonte óptico total das duas antenas ($d_{h_{tr}} = d_{h_t} + d_{h_r}$).

¹⁶ Para simplificar o cálculo numérico e a geometria do problema, em cada caso foram utilizadas antenas de alturas iguais.

Neste capítulo foram abordados os principais tópicos relacionados à teoria da difração sobre a curvatura da terra lisa. Resultados dos cálculos da atenuação obtidos pela série dos resíduos incluíram os valores práticos das variáveis envolvidas no problema. Os modelos de Wait e Furutsu adotados concordaram perfeitamente entre si e de uma maneira aproximada com os resultados obtidos do programa *GrWaVe* tomado como referência.

Em especial, foi estabelecido o conceito de faixa de transição ao longo do contorno da penumbra geométrica, entre as regiões de visibilidade e sombra do transmissor. A análise da natureza do campo associado a esta faixa de penumbra demonstrou o caráter local desse campo, traduzindo numericamente o formalismo teórico estabelecido pelo “Princípio da Ação Local”. No próximo capítulo, este resultado será empregado para interpretar o comportamento da atenuação do sinal propagando-se em presença da terra com um obstáculo situado na metade do trajeto entre o transmissor e o receptor.

4 DIFRAÇÃO PELAS IRREGULARIDADES DO RELEVO

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos da análise que considera o efeito combinado da difração pela curvatura da terra lisa e pelas irregularidades do relevo. Através do conceito de “ganho de obstáculo” é estabelecido o critério para que o efeito de um obstáculo “gume de faca” possa ser ignorado. Por outro lado, as condições de propagação poderão ser significativamente afetadas pela presença do obstáculo, tal que o relevo do terreno passa a ser caracterizado como irregular. Nesse contexto, uma análise particularmente importante define a transição entre os relevos suave e acidentado, baseando-se no critério proposto para definir a separação entre as regiões de interferência e de difração do transmissor.

No final do capítulo é apresentada uma discussão dos principais resultados obtidos desta análise sobre a teoria da difração pelas irregularidades do terreno. Uma interpretação desses resultados está associada à largura de faixa de transição no contorno da penumbra geométrica e será utilizada para justificar o critério a ser estabelecido para definir a transição entre a terra lisa e o terreno acidentado.

4.1 INTRODUÇÃO

A análise precedente feita no capítulo 3 assume uma condição que na maioria dos casos não se realiza na prática: supõe-se que a terra seja perfeitamente lisa. Entretanto, em situações reais, o relevo apresenta-se acidentado, com os obstáculos proeminentes do terreno interferindo nas condições de propagação do sinal sobre a superfície terrestre.

As bases da teoria clássica da difração por um obstáculo do relevo foram estabelecidas inicialmente por FRESNEL (1818), utilizando o “Princípio de Huygens”.¹ A formulação matemática da análise de Fresnel foi estruturada por KIRCHHOFF (1882), resultando na “teoria da difração de Fresnel-Kirchhoff”. Dentro do escopo deste trabalho, uma importante aplicação da teoria de Fresnel-Kirchhoff corresponde ao estudo da difração tomando como base o modelo teórico de um obstáculo “gume de faca”. A análise do comportamento do campo difratado por este obstáculo idealizado constitui o fundamento da solução rigorosa da teoria da difração pelas irregularidades do relevo.

¹ Segundo o “Princípio de Huygens”, supõe-se que uma frente de onda é formada por infinitos radiadores secundários atuando como fonte de perturbação e se combinando para formarem uma nova frente de onda na direção de propagação.

O tratamento matemático sugerido pela teoria de Fresnel-Kirchhoff na análise da difração pelas irregularidades do terreno considera o efeito isolado do obstáculo no cálculo da atenuação, não levando em conta a difração pela curvatura da terra, as características do solo, a polarização e as alturas das antenas terminais. Desta forma, a solução dada pela série dos resíduos apresenta um caráter mais geral por incluir o efeito combinado de todos os fatores relacionados com as propriedades do solo, as características dos terminais e o efeito da curvatura da terra esférica.

Com base na teoria de Fresnel e na solução da série dos resíduos, será definido o critério de transição entre relevo suave e acidentado. Na seção seguinte, é iniciada a análise do problema proposto através da discussão das condições necessárias para que o obstáculo possa ser ignorado e a atenuação esteja diretamente associada unicamente à curvatura da terra lisa.

4.2 CRITÉRIO PARA DESPREZAR O EFEITO DO OBSTÁCULO

No capítulo anterior foi abordada através da formulação da série dos resíduos o cálculo da atenuação do sinal sobre a terra esférica suposta lisa e homogênea. Um caso particular da teoria da difração pelas irregularidades do relevo considera que em determinadas situações o efeito do obstáculo superposto ao terreno pode ser ignorado, tal que a terra possa ser aproximada a uma superfície perfeitamente lisa. Nesta seção será estabelecido o critério para que um obstáculo “gume de faca” tenha um efeito irrelevante sobre a onda radioelétrica transmitida. Tal critério baseia-se na relação existente entre a altura do obstáculo e o raio da primeira zona de Fresnel no ponto onde se localiza o obstáculo.

O critério de separação entre as zonas de interferência e de difração apresentado no capítulo 2 demonstrou a importância de uma obstrução no interior da primeira zona de Fresnel. Em geral, se uma obstrução não interceptar o volume contido dentro da primeira zona de Fresnel, então as perdas por difração serão mínimas, tal que o efeito da presença do obstáculo possa ser desconsiderado.

Desta forma, é fácil concluir que se não houver no trajeto do percurso obstáculos de alturas significativas comparadas com o raio da primeira zona de Fresnel, o efeito da irregularidade do relevo pode ser ignorado. Portanto, as perdas por difração estariam diretamente associadas com a atenuação devida à curvatura da terra lisa. Por outro lado, se a altura do obstáculo for considerável em relação ao raio de Fresnel, as condições de propagação poderão ser substancialmente afetadas.

Considere um dipolo elétrico transmissor posicionado no ponto A e em uma altura h_A sobre o relevo plano condutor perfeito, conforme ilustra a FIG. 4.1 (a). Um receptor está situado em B e elevado a uma altura h_B acima do solo. Um obstáculo “gume de faca” de altura h_c encontra-se posicionado a uma distância d_1 do elemento transmissor e d_2 do receptor, tal que $d_1 + d_2$ denota a distância de separação horizontal entre os terminais. Sabe-se da teoria da difração da luz por um anteparo (BORN e WOLF, 1980) que o campo elétrico vertical em B será dado segundo a teoria da imagem (MACLEAN e WU, 1993) (vide FIG. 4.1 (b)) por

$$E_B = E_{BA} [F_d(u_{c,1}) + F_d(u_{c,4})] + E'_{BA} [F_d(u_{c,2}) + F_d(u_{c,3})] \quad (4.1)$$

Onde:

E_{BA}, E'_{BA} – Campos elétricos em B associados à fonte em A e sua imagem em A' , respectivamente.

$F_d(u_{c,i})\Big|_{i=1(1)4}$ – Integral complexa de Fresnel

$$F_d(u_{c,i}) = \frac{1+j}{2} \int_{u_{c,i}}^{\infty} \exp(-j\pi u^2/2) du \quad (4.2)$$

$$u_{c,i} = \left(\frac{2d}{\lambda d_1 d_2} \right)^{1/2} h_{c,i} \quad (4.3)$$

$$h_{c,1} = h_c - \frac{d_1 d_2}{d} \left(\frac{h_A}{d_1} + \frac{h_B}{d_2} \right) \quad (4.4)$$

$$h_{c,2} = h_c - \frac{d_1 d_2}{d} \left(-\frac{h_A}{d_1} + \frac{h_B}{d_2} \right) \quad (4.5)$$

$$h_{c,3} = h_c + \frac{d_1 d_2}{d} \left(-\frac{h_A}{d_1} + \frac{h_B}{d_2} \right) \quad (4.6)$$

$$h_{c,4} = h_c + \frac{d_1 d_2}{d} \left(\frac{h_A}{d_1} + \frac{h_B}{d_2} \right) \quad (4.7)$$

Para que o efeito do obstáculo “gume de faca” possa ser desprezado, na EQ. 4.1 tanto a soma $F_d(u_{c,1}) + F_d(u_{c,4})$, quanto $F_d(u_{c,2}) + F_d(u_{c,3})$ devem ser próximas à unidade. Para que isto aconteça, os argumentos $u_{c,i}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) da integral de Fresnel devem ser pequenos, tal que possa ser feita a aproximação:

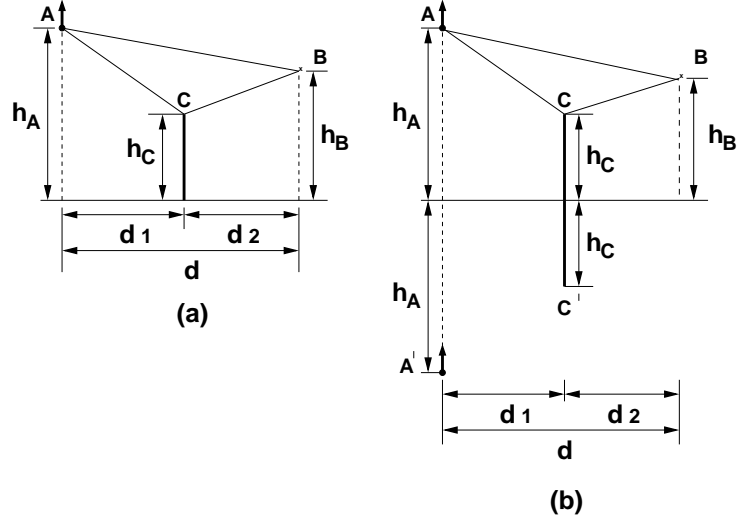


FIG. 4.1: (a) Difração por um obstáculo “gume de faca” de altura h_c superposto à terra plana. (b) Geometria para a aplicação da teoria da imagem.

$$F_d(u_{c,i}) \approx \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} u_{c,i} \right) \quad (4.8)$$

Logo,

$$F_d(u_{c,1}) + F_d(u_{c,4}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2d}{\lambda d_1 d_2} \right)^{1/2} h_c \quad (4.9)$$

$$F_d(u_{c,2}) + F_d(u_{c,3}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2d}{\lambda d_1 d_2} \right)^{1/2} h_c \quad (4.10)$$

Consequentemente, o efeito do obstáculo será desprezível se sua altura h_c é tal que,

$$h_c \left(\frac{d}{\lambda d_1 d_2} \right)^{1/2} \ll 1 \quad (4.11)$$

Ou seja,

$$h_c/R \ll 1 \quad (4.12)$$

, onde R é o raio da primeira zona de Fresnel definido por

$$R = \left(\frac{\lambda d_1 d_2}{d} \right)^{1/2} \quad (4.13)$$

, sendo um parâmetro independente das alturas das antenas terminais e função apenas do comprimento de onda e da geometria do problema.

O critério definido pela EQ. 4.12 estabelece a condição para ignorar o efeito do obstáculo e considerar a terra lisa. No entanto, trata-se de um critério subjetivo, porque não define numericamente a magnitude da altura do obstáculo em relação ao raio da primeira zona de Fresnel. Na próxima seção será definido de forma numérica o critério para desprezar o efeito da irregularidade do relevo utilizando o conceito de “ganho de obstáculo”. Através da formulação da série dos resíduos serão incluídos na análise do critério o efeito da curvatura da terra, assim como os valores práticos das demais variáveis envolvidas no problema.

4.3 GANHO DE OBSTÁCULO

O objetivo desta seção é discutir o efeito da difração do sinal pelas irregularidades do terreno, utilizando o conceito de “ganho de obstáculo”. Historicamente, este conceito foi introduzido pela primeira vez por DICKSON et al. (1953) que, aplicando o método dos quatro raios definido por SCHELLENG et al. (1933), realizaram uma análise de percursos que apresentavam o efeito combinado da reflexão no solo² e da difração por um obstáculo dominante do terreno. No entanto, coube a FURUTSU et al. (1970;1971) e WAIT (1968b) a generalização deste conceito considerando outros fatores, tais como formas especiais do relevo, características elétricas do solo, polarização e alturas das antenas.

De um modo geral, a ocorrência de um obstáculo em um enlace modifica as características do sinal que se propaga, reforçando ou atenuando a intensidade do campo elétrico recebido em torno do seu valor esperado caso a propagação se desse sobre a terra lisa. A idéia de “ganho de obstáculo” corresponde à diferença observada entre a atenuação em um enlace considerando o relevo como se fosse terra lisa e a atenuação deste mesmo enlace levando em conta a presença do obstáculo nele existente. Este efeito determina uma atenuação bem menor do que a obtida na ausência do obstáculo (terra lisa), resultando favoravelmente em um campo recebido de maior magnitude.

Segundo o método de cálculo da óptica geométrica baseado na teoria dos quatro raios desenvolvida por Schelleng et al, o “ganho de obstáculo” é obtido de forma satisfatória quando a folga entre o obstáculo e os terminais do trajeto (antenas) é maior que 0.6 do raio da primeira zona de Fresnel. O modelo leva em consideração o efeito da reflexão no solo nos trechos entre os obstáculos e os terminais. O campo elétrico na recepção resulta da soma fasorial dos raios que chegam no receptor em R (vide FIG. 4.2). A variação da

² Através da composição de raios, a análise da reflexão feita por Dickson et al englobava todos os possíveis trajetos entre os terminais e o topo do obstáculo, incluindo a superfície do solo.

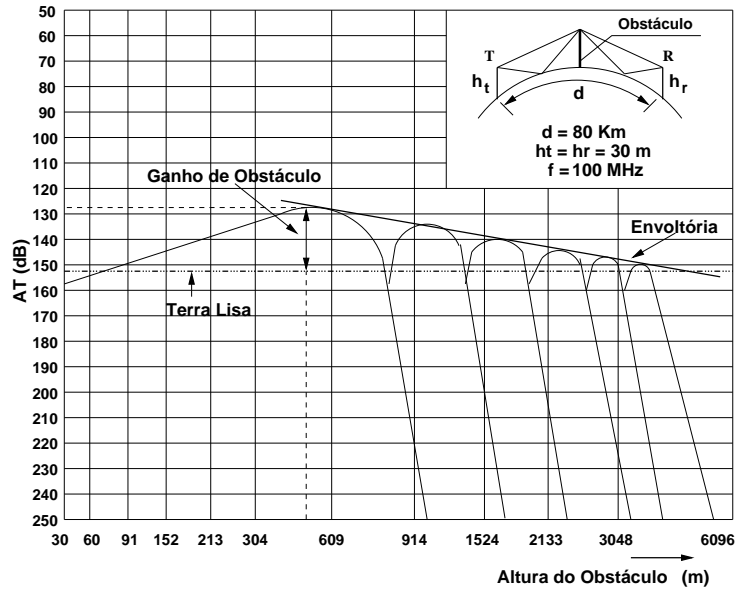


FIG. 4.2: Ganho de obstáculo pela óptica geométrica (Teoria dos Quatro Raios).

altura do obstáculo faz com que o campo resultante na recepção se comporte de modo oscilatório, apresentando valores máximos e mínimos de intensidade.

O “ganho de obstáculo” é observado quando a atenuação resultante da difração no obstáculo for inferior ao seu valor em terra lisa. A FIG. 4.2 mostra graficamente o conceito de “ganho de obstáculo” e resulta de estudos realizados por GRENIER (1962) e DICKSON et al. (1953). A altura do obstáculo é representada no eixo das abscissas e a atenuação (em dB) no eixo das ordenadas. A atenuação devida à terra esférica lisa é mostrada no gráfico por uma linha horizontal paralela ao eixo das abscissas.

Uma vez mantidas constantes as alturas das antenas terminais e variando a altura do obstáculo, a atenuação resultante assumirá valores máximos e mínimos em torno do valor constante devido a terra lisa. De acordo com a FIG. 4.2, para uma altura do obstáculo igual a 564 m a atenuação é de 127 dB , enquanto que em relação à terra lisa a atenuação corresponde a 152 dB . Consequentemente, o “ganho de obstáculo” será máximo neste ponto e igual a $152 - 127 = 25\text{ dB}$. Observa-se ainda da FIG. 4.2 que, aumentando continuamente a altura do obstáculo, o ganho tende a diminuir devido a predominância da atenuação por difração comparada com a reflexão no solo. Este efeito pode ser evidenciado pela envoltória dos valores mínimos da atenuação.

O método dos quatro raios é restrito à situação onde a folga relativa à primeira zona de Fresnel nos trechos entre o topo do obstáculo e os terminais é maior que 0.6 (zona de interferência do transmissor). Portanto, a aplicação da óptica geométrica no cálculo do

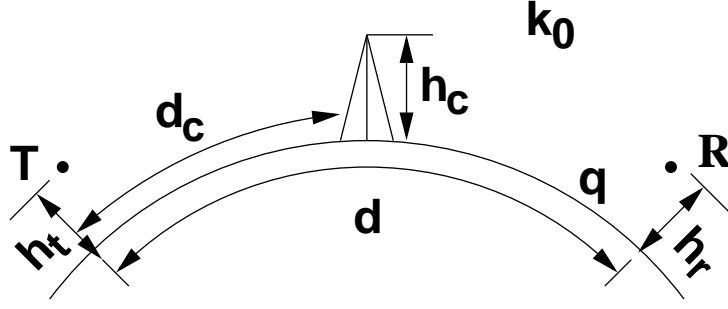


FIG. 4.3: Modelo do obstáculo “gume de faca” superposto a uma terra esférica lisa e homogênea.

“ganho de obstáculo” fugiria completamente aos objetivos do problema proposto neste trabalho, uma vez que a abordagem aqui apresentada enfoca a zona de difração. A solução dada pela série dos resíduos apresenta um caráter geral, válida nas regiões de interferência e difração dos terminais, em relação ao topo do obstáculo. Segundo a solução baseada na formulação da série dos resíduos, é apresentada a seguir a definição de “ganho de obstáculo” empregada nesta análise.

Seja $A_R|_{h_c \neq 0}$ o valor da atenuação na presença do obstáculo “gume de faca” de altura h_c e $A_R|_{h_c=0}$ a atenuação devida unicamente à difração pela curvatura da terra lisa, na ausência do obstáculo. Considerando que ambas as atenuações $A_R|_{h_c \neq 0}$ e $A_R|_{h_c=0}$ são expressas na forma de série dos resíduos, o “ganho de obstáculo” é definido algebricamente pela relação

$$G_{obs} = \frac{A_R|_{h_c \neq 0}}{A_R|_{h_c=0}} \quad (4.14)$$

, sendo que $G_{obs}(dB) = 20 \log_{10}(|G_{obs}|)$ denota o “ganho de obstáculo” em decibéis.

Considere a geometria do problema apresentada na FIG. 4.3. Baseado na definição anterior e utilizando a notação de WAIT e SPIES (1968b), o “ganho de obstáculo” é dado por

$$G_{obs} = \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w(t_m - y_t)}{(N_m)^{1/2}} e^{-jx_c t_m} \hat{S}_{n,m} e^{-j(x-x_c) t_n} \frac{w(t_n - y_r)}{(N_n)^{1/2}}}{\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-jx t_m}}{N_m} w(t_m - y_t) w(t_m - y_r)} \quad (4.15)$$

Onde:

x – Distância numérica entre os terminais

$$x = \left(\frac{k_0 a_e}{2} \right)^{1/3} \left(\frac{d}{a_e} \right) \quad (4.16)$$

x_c – Distância numérica entre o obstáculo e os terminais

$$x_c = \left(\frac{k_0 a_e}{2} \right)^{1/3} \left(\frac{d_c}{a_e} \right) \quad (4.17)$$

$$d_c = d/2 \quad (4.18)$$

$y_{t,r}$ – Altura numérica dos terminais

$$y_{t,r} = \left(\frac{2}{k_0 a_e} \right)^{1/3} k_0 h_{t,r} \quad (4.19)$$

$N_{m,n}$ – Fator de Normalização

$$N_{m,n} = (t_{m,n} - q^2) [w(t_{m,n})]^2 \quad (4.20)$$

$\hat{S}_{n,m}$ – Coeficiente de Espalhamento

$$\hat{S}_{n,m} = \frac{1}{(N_m N_n)^{1/2}} \frac{w(t_m - y_c) w'(t_n - y_c) - w(t_n - y_c) w'(t_m - y_c)}{(t_n - t_m)} \quad (4.21)$$

($n \neq m$)

$$\hat{S}_{n,m} = \frac{1}{N_m} \left[(t_m - y_c) [w(t_m - y_c)]^2 - [w'(t_m - y_c)]^2 \right] \quad (4.22)$$

($n = m$)

y_c – Altura numérica do obstáculo

$$y_c = \left(\frac{2}{k_0 a_e} \right)^{1/3} k_0 h_c \quad (4.23)$$

$w(t_{m,n})$ – Integral de Airy

q – Parâmetro característico do solo

$$q = -j \left(\frac{k_0 a_e}{2} \right)^{1/3} \frac{k_0^2}{k_1^2} \sqrt{\frac{k_1^2}{k_0^2} - 1} \quad (PV) \quad (4.24)$$

$$q = -j \left(\frac{k_0 a_e}{2} \right)^{1/3} \sqrt{\frac{k_1^2}{k_0^2} - 1} \quad (PH) \quad (4.25)$$

$$k_0 = 2\pi/\lambda \quad (4.26)$$

$$k_1 = k_0 \sqrt{\varepsilon_r - j 60 \sigma \lambda} \quad (4.27)$$

Caso $q = \infty$ (ou $|q| \gg 1$)³, podem ser feitas as seguintes aproximações:⁴

$$N_{m,n}^{1/2} \simeq j w'(t_{m,n}) \quad (4.28)$$

$$\hat{S}_{n,m} \simeq \frac{w(t_m - y_c) w'(t_n - y_c) - w(t_n - y_c) w'(t_m - y_c)}{(t_m - t_n) w'(t_m) w'(t_n)} \quad (4.29)$$

$$\hat{S}_{n,m} \simeq \frac{1}{[w'(t_m)]^2} \left[[w'(t_m - y_c)]^2 - (t_m - y_c) [w(t_m - y_c)]^2 \right] \quad (4.30)$$

($n \neq m$)

($n = m$)

, obtendo como valor final para o “ganho de obstáculo” a forma aproximada

$$G_{obs} \simeq \frac{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-j x_c t_m} \hat{S}_{n,m} e^{-j(x-x_c) t_n}}{\sum_{m=1}^{\infty} e^{-j x t_m}} \quad (4.31)$$

Através da simplificação obtida no cálculo do “ganho de obstáculo” em decorrência do caso $q = \infty$, foram traçadas as curvas da FIG. 4.4 (a)-(c). Nestas curvas foram obtidas as estimativas do “ganho de obstáculo” em função da relação existente entre a altura do obstáculo e o raio da primeira zona de Fresnel (h_c/R). O conjunto de curvas mostra o comportamento do ganho em relação à distância entre as antenas, a frequência de operação, o raio de curvatura da terra e as alturas dos terminais.

Numericamente, o comportamento do “ganho de obstáculo” é ilustrado na TAB. 4.1, TAB. 4.2 e TAB. 4.3. Observa-se que, para a razão $h_c/R = 0.1$ (ou $h_c = 10\% R$), o “ganho de obstáculo” é inferior a 1 dB para todos os casos práticos previstos nas estimativas do ganho. Portanto, para uma altura do obstáculo 10 vezes menor que o raio da primeira zona de Fresnel pode ser estabelecido um critério razoável para desprezar o efeito do obstáculo e considerar apenas o efeito da curvatura da terra lisa na análise do problema da difração sobre a superfície terrestre.

³ Este caso supõe não haver dependência do “ganho de obstáculo” com a polarização das antenas terminais e as propriedades elétricas do solo. Esta aproximação é válida a partir da faixa de frequências em VHF e polarização horizontal sobre qualquer tipo de solo ou polarização vertical independentemente das características do terreno, com exceção da água do mar onde tal aproximação somente é válida para frequências acima de 100 MHz. Como este trabalho enfoca a análise da difração nas frequências em VHF e UHF sobre a terra, $q = \infty$ pode ser empregado na maioria dos casos.

⁴ Nestas aproximações é utilizada a relação $w'(t_{m,n}) - q w(t_{m,n}) = 0$.

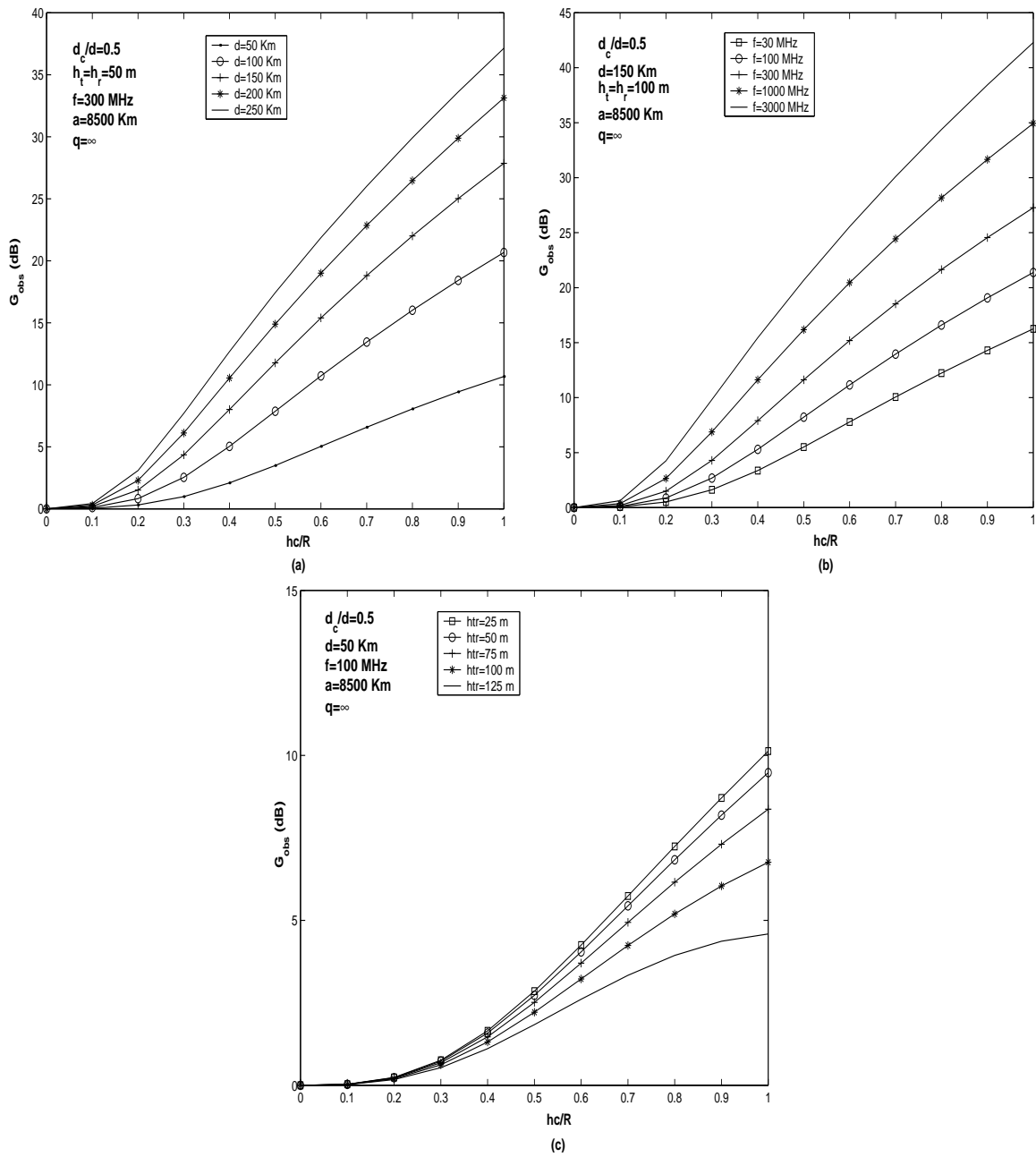


FIG. 4.4: Estimativas do “ganho de obstáculo” pela série dos resíduos.

TAB. 4.1: Ganho de Obstáculo – $f = 300 \text{ MHz}$, $h_{t,r} = 50 \text{ m}$, $a_e = 8500 \text{ km}$, $q = \infty$

h_c/R	$d = 50 \text{ Km}$ $R = 112 \text{ m}$			$d = 100 \text{ Km}$ $R = 158 \text{ m}$			$d = 150 \text{ Km}$ $R = 194 \text{ m}$			$d = 200 \text{ Km}$ $R = 224 \text{ m}$			$d = 250 \text{ Km}$ $R = 250 \text{ m}$		
	$h_c \text{ (m)}$	$G_{obs} \text{ (dB)}$	NTS	$h_c \text{ (m)}$	$G_{obs} \text{ (dB)}$	NTS	$h_c \text{ (m)}$	$G_{obs} \text{ (dB)}$	NTS	$h_c \text{ (m)}$	$G_{obs} \text{ (dB)}$	NTS	$h_c \text{ (m)}$	$G_{obs} \text{ (dB)}$	NTS
0.0	0.00	0.00	1	0.00	0.00	1	0.00	0.00	1	0.00	0.00	1	0.00	0.00	1
0.1	11.18	0.04	8	15.81	0.10	4	19.36	0.20	3	22.36	0.31	2	25.00	0.43	2
0.2	22.36	1.17	12	31.62	1.82	5	38.73	1.52	4	44.72	2.29	3	50.00	3.08	2
0.3	33.54	1.99	15	47.43	2.54	6	58.09	4.36	4	67.08	6.11	3	75.00	7.70	2
0.4	44.72	2.09	17	63.25	5.04	7	77.46	8.01	4	89.44	10.55	3	100.00	12.68	3
0.5	55.90	3.49	19	79.06	7.87	8	96.82	11.77	5	111.80	14.90	3	125.00	17.43	3
0.6	67.08	5.04	22	94.87	10.72	8	116.19	15.39	5	134.16	19.00	4	150.00	21.86	3
0.7	78.26	6.59	24	110.68	13.45	9	135.55	18.80	6	156.52	22.85	4	175.00	26.01	3
0.8	89.44	8.06	27	126.49	16.02	10	154.92	22.01	6	178.89	26.47	4	200.00	29.92	3
0.9	100.62	9.43	30	142.30	18.42	11	174.28	25.02	6	201.25	29.89	4	225.00	33.62	3
1.0	111.80	10.67	33	158.11	20.67	12	193.65	27.86	7	223.61	33.13	5	250.00	37.14	4

TAB. 4.2: Ganho de Obstáculo - $d = 150 \text{ km}$, $h_{t,r} = 100 \text{ m}$, $a_e = 8500 \text{ km}$, $q = \infty$

h_c/R	$f = 30 \text{ MHz}$ $R = 612 \text{ m}$			$f = 100 \text{ MHz}$ $R = 335 \text{ m}$			$f = 300 \text{ MHz}$ $R = 194 \text{ m}$			$f = 1000 \text{ MHz}$ $R = 106 \text{ m}$			$f = 3000 \text{ MHz}$ $R = 62 \text{ m}$		
	$h_c \text{ (m)}$	$G_{obs} \text{ (dB)}$	NTS	$h_c \text{ (m)}$	$G_{obs} \text{ (dB)}$	NTS	$h_c \text{ (m)}$	$G_{obs} \text{ (dB)}$	NTS	$h_c \text{ (m)}$	$G_{obs} \text{ (dB)}$	NTS	$h_c \text{ (m)}$	$G_{obs} \text{ (dB)}$	NTS
0.0	0.00	0.00	1	0.00	0.00	1	0.00	0.00	1	0.00	0.00	1	0.00	0.00	1
0.1	61.24	0.06	5	33.54	0.11	4	19.36	0.19	3	10.61	0.36	3	6.12	0.63	2
0.2	122.47	1.51	7	67.08	1.88	5	38.73	1.49	4	21.21	2.66	3	12.25	4.26	3
0.3	183.71	2.61	9	100.62	2.68	6	58.09	4.30	5	31.82	6.89	4	18.37	9.82	3
0.4	244.95	3.36	10	134.16	5.30	7	77.46	7.91	5	42.43	11.62	4	24.49	15.44	4
0.5	306.19	5.51	11	167.71	8.22	7	96.82	11.63	6	53.03	16.19	5	30.62	20.68	4
0.6	367.42	7.79	12	201.25	11.15	8	116.19	15.19	6	63.64	20.46	5	36.74	25.55	4
0.7	428.66	10.05	13	234.79	13.96	9	135.55	18.53	6	74.25	24.44	5	42.87	30.10	4
0.8	489.90	12.23	15	268.33	16.59	9	154.92	21.65	7	84.85	28.16	6	48.99	34.38	5
0.9	551.14	14.30	16	301.87	19.07	10	174.28	24.55	8	95.46	31.66	6	55.11	38.44	5
1.0	612.37	16.26	18	335.41	21.38	11	193.65	27.27	8	106.07	34.94	6	61.24	42.30	5

TAB. 4.3: Ganho de Obstáculo - $f = 100 \text{ MHz}$, $d = 50 \text{ km}$, $R = 194 \text{ m}$, $a_e = 8500 \text{ km}$, $q = \infty$

h_c/R	$h_c \text{ (m)}$	$h_{t,r} = 25 \text{ m}$		$h_{t,r} = 50 \text{ m}$		$h_{t,r} = 75 \text{ m}$		$h_{t,r} = 100 \text{ m}$		$h_{t,r} = 125 \text{ m}$	
		$G_{obs} \text{ (dB)}$	NTS	$G_{obs} \text{ (dB)}$	NTS	$G_{obs} \text{ (dB)}$	NTS	$G_{obs} \text{ (dB)}$	NTS	$G_{obs} \text{ (dB)}$	NTS
0.0	0.00	0.00	1	0.00	1	0.00	1	0.00	1	0.00	1
0.1	19.36	0.03	10	0.03	10	0.03	11	0.03	12	0.02	14
0.2	38.73	1.24	15	1.23	15	1.22	17	1.20	19	1.17	21
0.3	58.09	1.46	18	1.73	19	1.69	21	1.62	23	1.54	26
0.4	77.46	1.65	22	2.18	23	1.87	25	2.22	27	1.96	31
0.5	96.82	2.85	25	2.73	26	2.51	28	2.74	32	2.04	36
0.6	116.19	4.25	28	4.05	29	3.70	32	3.22	36	2.61	41
0.7	135.55	5.74	31	5.44	33	4.94	36	4.24	41	3.34	46
0.8	154.92	7.24	35	6.83	37	6.16	41	5.20	46	3.94	52
0.9	174.28	8.71	38	8.19	41	7.31	46	6.04	51	4.37	59
1.0	193.65	10.13	43	9.48	46	8.37	51	6.76	58	4.59	66

Nesta seção foi obtida a condição para que o efeito de um obstáculo do terreno possa ser ignorado e a parcela significativa da atenuação por difração seja atribuída unicamente à curvatura da terra lisa. Nas seções apresentadas a seguir inicia-se propriamente dita a análise do critério que define a transição entre os relevos suave e acidentado. A estratégia adotada nesta análise baseia-se em um estudo comparativo das estimativas da atenuação relativa ao espaço livre, obtidas pela teoria de Fresnel-Kirchhoff e pela solução geral representada pela série dos resíduos.⁵ A seguir é iniciada a discussão da teoria de Fresnel e redefinidas as formulações da série dos resíduos que incluem o efeito combinado da terra e do obstáculo, conforme as notações de Wait e Furutsu apresentadas no capítulo 2.

4.4 TEORIA DA DIFRAÇÃO DE FRESNEL-KIRCHHOFF

O problema da difração por um obstáculo “gume de faca”⁶ foi solucionado formalmente através de uma formulação integral desenvolvida por Fresnel-Kirchhoff. De acordo com esta teoria, a intensidade de campo elétrico recebido em R (vide FIG. 4.5), em relação ao campo em espaço livre, é dado por

$$\begin{aligned} \frac{E}{E_0} &= F(v_0) \\ &= \frac{(1+j)}{2} \int_{v_0}^{\infty} e^{-j\pi v^2/2} dv \end{aligned} \quad (4.32)$$

Onde:

$F(v_0)$ – Integral complexa de Fresnel

$$F(v_0) = C(v_0) - jS(v_0) \quad (4.33)$$

⁵ Nas estimativas da atenuação pelas irregularidades do relevo a solução proposta por Fresnel-Kirchhoff considera o efeito isolado do obstáculo, enquanto a formulação da série dos resíduos inclui o efeito conjunto do obstáculo, da curvatura da terra, das características dos terminais (polarização e alturas das antenas) e das propriedades elétricas do solo.

⁶ O obstáculo “gume de faca” constitui o primeiro modelo teórico para a análise da difração pelas irregularidades do relevo. A análise de Fresnel supõe que este obstáculo seja um semi-plano infinito e perfeitamente absorvente, perpendicular à terra e posicionado ortogonalmente em relação ao plano que contém a linha de visada entre o transmissor e o receptor.

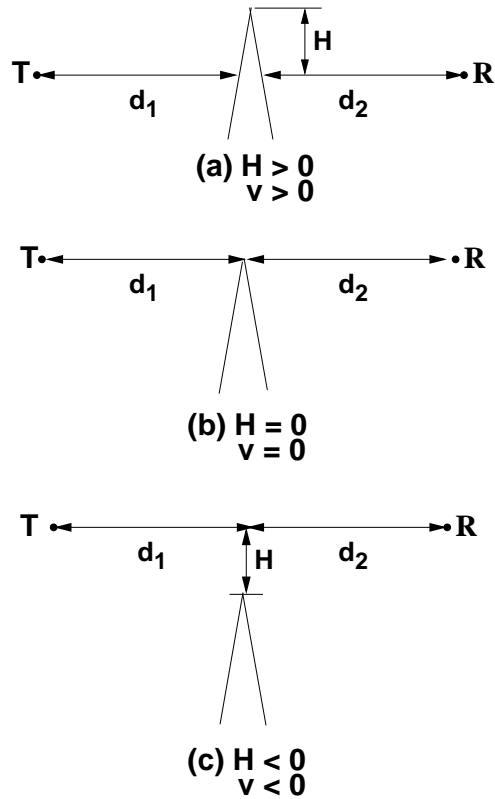


FIG. 4.5: Geometria da difração por um obstáculo “gume de faca” aplicada à teoria de Fresnel-Kirchhoff.

$C(v_0), S(v_0)$ – Integrais cosseno e seno de Fresnel⁷

$$C(v_0) = \int_0^{v_0} \cos(\pi v^2/2) dv \quad (4.34)$$

$$S(v_0) = \int_0^{v_0} \text{sen}(\pi v^2/2) dv \quad (4.35)$$

v_0 – Parâmetro de Fresnel⁸

$$v_0 = \sqrt{2} \frac{H}{R} \quad (4.36)$$

⁷ Consulte o APÊNDICE 4 para uma análise mais detalhada destas integrais.

⁸ O parâmetro de Fresnel é função apenas do comprimento de onda e da geometria do problema. Este fator será negativo se houver folga no percurso, positivo no caso de obstrução e nulo se o topo do obstáculo for tangente à linha de visada entre o transmissor e o receptor (vide FIG. 4.5 (a)-(c)).

H – Folga ou obstrução do percurso
 R – Raio da primeira zona de Fresnel

$$R = \sqrt{\frac{\lambda d_1 d_2}{d}} \quad (4.37)$$

A integral complexa de Fresnel pode ser expressa em termos das integrais seno e cosseno de Fresnel, obtendo-se para o módulo do campo elétrico relativo ao campo em espaço livre:

$$\left| \frac{E}{E_0} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \left| \left[\frac{1}{2} - C(v_0) \right] - j \left[\frac{1}{2} - S(v_0) \right] \right| \quad (4.38)$$

A FIG. 4.6 ilustra a curva de atenuação ($|E/E_0|$ em dB) relativa ao espaço livre e em função da variação da folga (ou obstrução) do percurso em relação ao raio da primeira zona de Fresnel (H/R). Pela análise da curva de atenuação, pode-se concluir que:

★ $H/R < 0$ — Corresponde a percursos com folga ($H < 0$) e com o receptor na região de visibilidade do transmissor.

★ $H/R = 0$ — Esta condição indica que o topo do obstáculo é tangente à linha de visada, com obstrução da metade da primeira zona de Fresnel. Neste caso, uma atenuação adicional de 6 dB é acrescentada à atenuação em espaço livre, o que representa um sinal recebido igual a 1/2 do sinal em espaço livre ($E = E_0/2$).

★ $H/R > 0$ — Corresponde a percursos obstruídos ($H > 0$), com o receptor na zona de sombra do transmissor.

★ $H/R < 0.6^9$ — O campo não mais oscila, decrescendo rapidamente à medida que aumenta a obstrução, o que caracteriza o efeito da difração.

★ $H/R = 0.6$ — Este caso corresponde a uma desobstrução de 60% da primeira zona de Fresnel, com o campo elétrico recebido podendo ser aproximado para o seu valor em espaço livre ($E = E_0$).

★ $H/R > 0.6$ — Neste caso o campo oscila em torno do seu valor em espaço livre, caracterizando a zona de interferência. Estas oscilações não ultrapassam a 1.5 dB, o que torna a margem de erro do modelo bastante razoável.

⁹ De forma mais exata, $H < 0.56 R$.

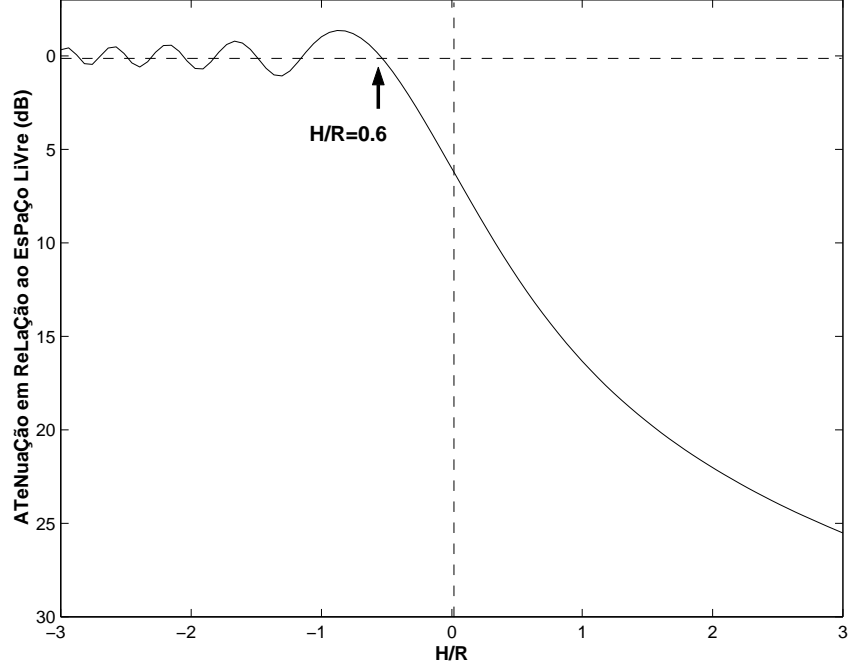


FIG. 4.6: Atenuação relativa ao espaço livre (Teoria de Fresnel-Kirchhoff).

4.5 A SÉRIE DOS RESÍDUOS PARA UM OBSTÁCULO “GUME DE FACA” SUPERPOSTO AO RELEVO

No capítulo 3 foi apresentada a solução do problema da difração sobre a curvatura da terra, baseando-se no método da série dos resíduos definido para o modelo de terra esférica lisa e homogênea. Naquela ocasião, os resultados dos cálculos da atenuação obtidos através das formulações de Wait e Furutsu concordaram perfeitamente. Entretanto, espera-se que a presença dos obstáculos do relevo altere o comportamento do campo, que poderá ser computado diferentemente pelas diversas soluções existentes.

Nesta seção é considerada a irregularidade do percurso na análise da difração pelas características de um terreno homogêneo. Inclui-se no cálculo da atenuação pela série dos resíduos o efeito do obstáculo “gume de faca”, conforme a formulação definida no capítulo 2. Segundo a notação de Wait e a geometria definida na FIG. 4.7 (a), a atenuação relativa ao espaço livre pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 |A_R| &= \left| E/E_0 \right| \\
 &= 2 \sqrt{\frac{\pi x}{j}} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w(t_m - y_t)}{N_m^{1/2}} e^{-j x_0 t_m} \hat{S}_{n,m} e^{-j(x-x_0) t_n} \frac{w(t_n - y_r)}{N_n^{1/2}} \right| \quad (4.39)
 \end{aligned}$$

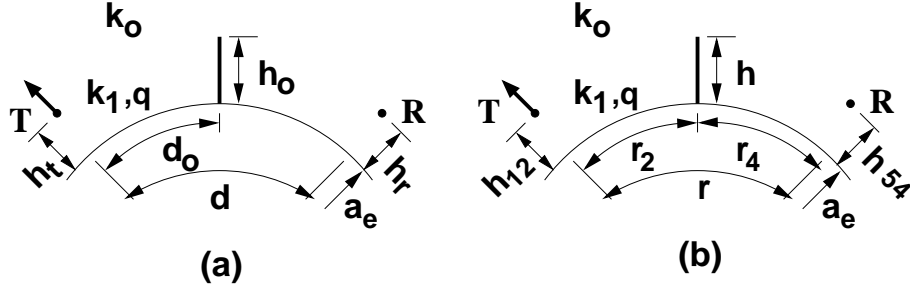


FIG. 4.7: Geometria da terra esférica lisa e homogênea com um obstáculo “gume de faca” superposto ao relevo. (a) Solução de Wait (b) Solução de Furutsu.

Onde:

x, x_0 – Distâncias numéricas

$$x = \left(\frac{k_0 a_e}{2} \right)^{1/3} \frac{d}{a_e} \quad (4.40)$$

$$x_0 = \left(\frac{k_0 a_e}{2} \right)^{1/3} \frac{d_0}{a_e} \quad (4.41)$$

y_t, y_r – Alturas numéricas dos terminais

$$y_t = \left(\frac{2}{k_0 a_e} \right)^{1/3} k_0 h_t \quad (4.42)$$

$$y_r = \left(\frac{2}{k_0 a_e} \right)^{1/3} k_0 h_r \quad (4.43)$$

$N_{m,n}$ – Fator de normalização

$$N_s = \int_0^\infty [w(t_s - y)]^2 dy = (t_s - q^2) [w(t_s)]^2 \Big|_{s=m,n} \quad (4.44)$$

$\hat{S}_{n,m}$ – Coeficiente de espalhamento

$$\begin{aligned} \hat{S}_{n,m} &= \frac{1}{(N_n N_m)^{1/2}} \frac{w(t_m - y_0) w'(t_n - y_0) - w(t_n - y_0) w'(t_m - y_0)}{(t_n - t_m)} \\ &= f_{n,m}(y_0) \quad (n \neq m) \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned}\hat{S}_{n,m} &= \frac{1}{N_m} \left\{ (t_m - y_0) [w(t_m - y_0)]^2 - [w'(t_m - y_0)]^2 \right\} \\ &= f_{m,m}(y_0) \quad (n = m)\end{aligned}\quad (4.46)$$

y_0 – Altura numérica do obstáculo

$$y_0 = \left(\frac{2}{k_0 a_e} \right)^{1/3} k_0 h_0 \quad (4.47)$$

q – Parâmetro característico do solo

$$q = -j \left(\frac{k_0 a_e}{2} \right)^{1/3} \frac{k_0^2}{k_1^2} \sqrt{\frac{k_1^2}{k_0^2} - 1} \quad (PV) \quad (4.48)$$

$$q = -j \left(\frac{k_0 a_e}{2} \right)^{1/3} \sqrt{\frac{k_1^2}{k_0^2} - 1} \quad (PH) \quad (4.49)$$

k_0, k_1 – Comprimentos de onda em espaço livre e no solo

$$k_0 = 2\pi/\lambda \quad (4.50)$$

$$k_1 = k_0 \sqrt{\varepsilon_r - j 60 \sigma \lambda} \quad (4.51)$$

$w(t)$ – Integral de Airy de argumentos $t = t_{m,n}$.

Análises práticas realizadas por Wait relacionam casos de pouco interesse para aplicações em engenharia. Cálculos numéricos feitos por este autor abordam as seguintes situações:

- a) Os terminais não estão elevados e se localizam sobre o solo. Esta condição não leva em conta o efeito do ganho de altura das antenas terminais ($f_s(h_{t,r}) = 1$)¹⁰;
- b) Variáveis são normalizadas em relação a outras variáveis, não se atribuindo a elas valores numéricos práticos;
- c) Quando as variáveis são expressas numericamente por valores práticos, as aplicações são obtidas apenas para baixas frequências (VLF e LF);

¹⁰ $f_s(h_{t,r}) = \frac{w(t_s - y_{t,r})}{w(t_s)}$.

d) Adicionalmente, o coeficiente de espalhamento $\hat{S}_{n,m}$ não considera a reflexão no obstáculo, limitando a aplicabilidade da solução de Wait à situação onde o receptor encontra-se bastante aprofundado na zona de difração do transmissor. À medida que o receptor aproxima-se da zona de penumbra a série não converge corretamente devido à não consideração dos termos associados à reflexão no obstáculo. Provavelmente, esta é a razão dos cálculos numéricos terem sido feitos para frequências baixas (VLF e LF), onde o problema da convergência da série é menos crítico.

Neste contexto, a solução de Furutsu é mais geral, pois há maior rigor matemático na determinação do termo equivalente¹¹ ao coeficiente de espalhamento de Wait. Desta forma, embora as soluções de Wait e Furutsu tenham apresentado resultados idênticos no caso da terra lisa, neste capítulo ao se considerar o efeito conjunto terra-obstáculo, a solução de Furutsu será tomada como referência.

Trabalhos publicados por Furutsu relacionam a maioria dos casos práticos previstos, incluindo terminais elevados, valores práticos das variáveis envolvidas no problema e aplicações também em altas frequências (VHF e UHF). Segundo a notação adotada por este autor e de acordo com a geometria ilustrada na FIG. 4.7 (b), a atenuação relativa ao espaço livre será novamente expressa da seguinte forma:

$$\begin{aligned} |A_R| &= \left| \frac{E}{E_0} \right| \\ &= 2 \left| \sum_{t_4, t_2} \sqrt{(c_2 + c_4)/c_4} \times A(y_{54, c_4})_{t_4} \times T^{(3)}(c_2)_{t_4, t_2} \times f_{t_2}(y_{12}) \right| \end{aligned} \quad (4.52)$$

Onde:

$$A(y_{54, c_4})_{t_4} = \sqrt{\pi c_4} (t_4 - q^2)^{-1} f_{t_4}(y_{54}) e^{-j[c_4(y_4 + t_4) + \pi/4]} \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} T^{(3)}(c_2)_{t_4, t_2} &= [q f'_{t_4}(y_{34}) f_{t_2}(y_{32}) - q f_{t_4}(y_{34}) f'_{t_2}(y_{32})] \times \\ &\quad \times (y_4 - y_2 + t_4 - t_2)^{-1} (t_2 - q^2)^{-1} e^{-j c_2 (y_2 + t_2)} \quad (t_4 \neq t_2) \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} T^{(3)}(c_2)_{t_4, t_2} &= \left\{ [1 - y_{32}(t_2 - q^2)^{-1}] f_{t_2}^2(y_{32}) + q^2 (t_2 - q^2)^{-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times [f_{t_2}^2(y_{32}) - f_{t_2}'^2(y_{32})] \right\} e^{-j c_2 (y_2 + t_2)} \quad (t_4 = t_2) \end{aligned} \quad (4.55)$$

¹¹ Termo $T^{(3)}(c_2)_{t_4, t_2}$ expresso segundo a EQ. 4.54 e EQ. 4.55.

$c_{2,4}$ – Distância numérica dos terminais ao obstáculo

$$c_m = \left(\frac{k_0 a_e}{2} \right)^{1/3} (r_m/a_e) \Big|_{m=2,4} \quad (4.56)$$

y_{12}, y_{54} – Alturas numéricas dos terminais

$$y_{12} = \left(\frac{2}{k_0 a_e} \right)^{1/3} k_0 h_{12} \quad (4.57)$$

$$y_{54} = \left(\frac{2}{k_0 a_e} \right)^{1/3} k_0 h_{54} \quad (4.58)$$

y_{32}, y_{34} – Altura numérica do obstáculo

$$y_{32} = y_{34} = \left(\frac{2}{k_0 a_e} \right)^{1/3} k_0 h \quad (4.59)$$

$f_{t_{2,4}}(y)$, e $f'_{t_{2,4}}(y)$ – Fator ganho de altura e sua derivada

$$f_{t_m}(y) = \frac{w(t_m - y)}{w(t_m)} \Big|_{m=2,4} \quad (4.60)$$

$$f'_{t_m}(y) = \frac{w'(t_m - y)}{w'(t_m)} \Big|_{m=2,4} \quad (4.61)$$

q – Parâmetro característico do solo, conforme EQ. 4.48 e EQ. 4.49

$w(t)$ – Integral de Airy de argumentos $t = t_{2,4}$

Demais parâmetros da solução de Furutsu são definidos na geometria mostrada na FIG. 4.7 (b). Redefinida a notação a ser utilizada no cálculo da atenuação que leva em conta o efeito do obstáculo do terreno, a próxima seção descreve o método de cálculo da folga do percurso entre os terminais e o topo do obstáculo. A análise das estimativas da atenuação obtidas em função da relação existente entre este parâmetro e o raio da primeira zona de Fresnel baseia-se no critério proposto para fixar a separação entre as regiões de interferência e de difração do transmissor. Esta análise será importante na definição do critério que estabelece a transição entre terra lisa e terreno acidentado.

4.6 CÁLCULO DA FOLGA DO PERCURSO ENTRE OS TERMINAIS E O TOPO DO OBSTÁCULO (H')

O primeiro passo na análise do critério que define a transição entre relevo suave e relevo acidentado consiste em determinar a folga do percurso entre os terminais e o topo do obstáculo. O procedimento de cálculo considera que a folga seja determinada a partir do ponto de reflexão em cada trecho do percurso entre as antenas terminais e o obstáculo.

Por definição, a altura H' (vide FIG. 4.8) é a menor distância da terra, suposta esférica, à linha de visada direta entre os terminais e o topo do obstáculo. O valor aproximado de H' será a medida sobre a perpendicular à tangente no ponto de reflexão, entre este ponto e o raio de visada direta entre um dos terminais e o topo do obstáculo.

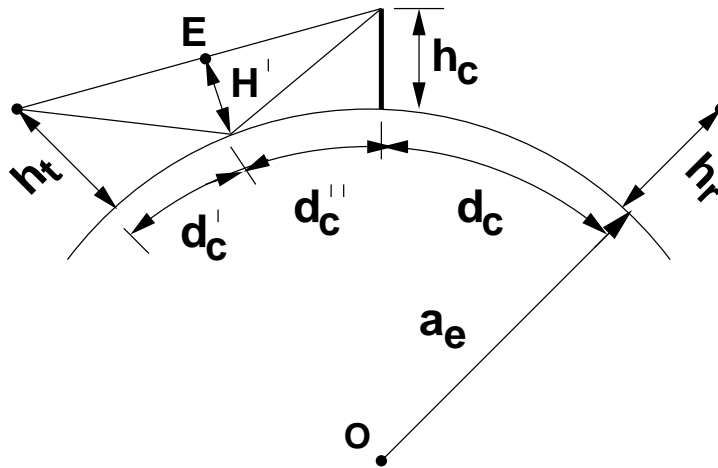


FIG. 4.8: Geometria para o cálculo da folga do percurso entre os terminais e o topo do obstáculo.

A FIG. 4.8 ilustra a condição de antenas elevadas. Colocando-a em um plano cartesiano, conforme mostrado na FIG. 4.9, tem-se:

$$\widehat{AB} = d'_c \quad (4.62)$$

$$\widehat{AC} = d_c \quad (4.63)$$

$$\alpha (rd) = \frac{\widehat{AC}}{a_e} = \frac{(d'_c + d''_c)}{a_e} \quad (4.64)$$

$$\beta (rd) = \frac{\widehat{AB}}{a_e} = \frac{d'_c}{a_e} \quad (4.65)$$

Coordenadas:

$$T (0, a_e + h_t)$$

$$B (a_e \operatorname{sen}\beta + a_e \operatorname{cos}\beta)$$

$$D \left((a_e + h_c) \operatorname{sen}\alpha + (a_e + h_c) \operatorname{cos}\alpha \right)$$

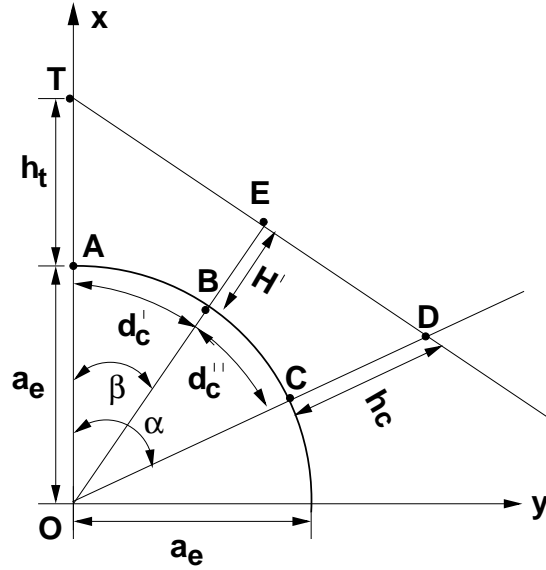


FIG. 4.9: Geometria cartesiana da folga do percurso entre os terminais e o topo do obstáculo na condição de antenas elevadas.

De acordo com a geometria cartesiana do problema:

- (1) A reta TD terá a equação:

$$\left[(a_e + h_t) - (a_e + h_c) \operatorname{cos}\alpha \right] x + \left[(a_e + h_c) \operatorname{sen}\alpha \right] y = (a_e + h_t)(a_e + h_c) \operatorname{sen}\alpha \quad (4.66)$$

- (2) A reta OE será definida pela equação:

$$x - y \operatorname{tg}\beta = 0 \quad (4.67)$$

- (3) O ponto E será a interseção das retas TD e OE. Logo:

$$H' = d_{OE} - a_e \quad (4.68)$$

$$d_{OE} = \left[\frac{(a_e + h_t)(a_e + h_c) \operatorname{sen} \alpha}{[(a_e + h_t) - (a_e + h_c) \cos \alpha] \operatorname{tg} \beta + (a_e + h_c) \operatorname{sen} \alpha} \sqrt{tg^2 \beta + 1} \right] \quad (4.69)$$

(4) Basta agora calcular d'_c , ou seja, a posição do ponto de reflexão (ponto B), que pode ser calculado através das fórmulas:

$$d'_c = \frac{d_c}{2} (1 + b) \quad (4.70)$$

$$b = 2 \sqrt{\frac{m+1}{3m}} \cos \left[\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{3c}{2} \sqrt{\frac{3m}{(m+1)^3}} \right) \right] \quad (4.71)$$

$$m = \frac{d_c^2}{4a_e(h_t + h_c)} \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} c &= \frac{h_t - h_c}{h_t + h_c} ; h_t \geq h_c \\ &= \frac{h_c - h_t}{h_t + h_c} ; h_t < h_c \end{aligned} \quad (4.73)$$

4.7 TRANSIÇÃO ENTRE TERRA LISA E TERRENO ACIDENTADO

Nesta seção são comparados os resultados numéricos dos cálculos da atenuação obtidos pela teoria de Fresnel-Kirchhoff e pelo método da série dos resíduos. Com base nestas estimativas e considerando a folga do percurso entre os terminais e o topo do obstáculo, é estabelecido o critério que define a transição da terra lisa para relevo acidentado. Na análise do critério são apresentadas as formulações básicas utilizadas, as considerações de caráter prático e a discussão final dos principais resultados obtidos.

4.7.1 FÓRMULAS BÁSICAS

Nas seções anteriores foram discutidos em detalhe os métodos para computar os valores de atenuação, levando em conta as irregularidades do terreno. A formulação aqui utilizada na obtenção dos resultados numéricos pode ser sumarizada da seguinte forma:

- (1) **Cálculo da Atenuação pela Teoria de Fresnel-Kirchhoff (AT_{FK})** – A formulação inclui apenas o efeito do obstáculo, o comprimento de onda e os parâmetros associados com a geometria do problema.

$$|AT_{FK}| = \frac{\sqrt{2}}{2} \left| \left[\frac{1}{2} - C(v_0) \right] - j \left[\frac{1}{2} - S(v_0) \right] \right| \quad (4.74)$$

(2) **Cálculo da Atenuação pela Série dos Resíduos (A_R)** – A fórmula básica leva em conta o efeito combinado do obstáculo, da curvatura da terra, das propriedades elétricas do solo, da polarização e das alturas das antenas terminais.

$$|A_{R_{WT}}| = 2 \sqrt{\frac{\pi x}{j}} \left| \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w(t_m - y_t)}{N_m^{1/2}} e^{-j x_0 t_m} \hat{S}_{n,m} e^{-j(x-x_0)t_n} \frac{w(t_n - y_r)}{N_n^{1/2}} \right| \quad (4.75)$$

(Wait)

$$|A_{R_{FT}}| = 2 \left| \sum_{t_4, t_2} \sqrt{(c_2 + c_4)/c_4} \times A(y_{54, c_4})_{t_4} \times T^{(3)}(c_2)_{t_4, t_2} \times f_{t_2}(y_{12}) \right| \quad (4.76)$$

(Furutsu)

, onde todos os parâmetros envolvidos na EQ. 4.74, EQ. 4.75 e EQ. 4.76 foram definidos anteriormente. Para maiores detalhes, consulte as seções 4.4 e 4.5.

4.7.2 CONSIDERAÇÕES PRÁTICAS

A geometria do problema a ser analisado considera a terra esférica lisa com um obstáculo “gume de faca” superposto ao terreno na metade do trajeto entre os terminais. Antes de proceder à comparação dos métodos no cálculo da atenuação são necessárias algumas considerações práticas que facilitem a obtenção dos resultados numéricos.

- Vale ressaltar que o programa computacional implementado neste trabalho para o cálculo da atenuação pela série dos resíduos foi verificado através de uma comparação numérica com resultados publicados por FURUTSU et al. (1964). Os cálculos apresentados por este autor assumem os seguintes valores práticos dos parâmetros de operação envolvidos em sua análise:

Frequência: $f = 300 \text{ MHz}$

Constantes elétricas do solo: $\varepsilon_r = 10$ e $\sigma = 1 \times 10^{-4} \text{ Siemens/m}$

Raio equivalente da terra: $a_e = 8500 \text{ km}$

Alturas das antenas terminais: $\begin{matrix} h_{12}=h_{54}=10 \text{ m} \\ y_{12}=y_{54}=0.21 \end{matrix}$

Polarização: PV (Vertical)

Altura do obstáculo:¹² $\begin{matrix} h=0, 100, 200, 300 \text{ (m)} \\ y_{32}=y_{34}=2.10 \text{ (100)}, 4.21 \text{ (200)}, 6.31 \text{ (300)} \end{matrix}$

Distância do enlace: $r = 200 \text{ Km}$ ($r_2 = r_4 = 100 \text{ km}$)

¹² Os valores entre parênteses denotam a altura do obstáculo correspondente (em metros).

Os cálculos numéricos resultaram nos seguintes valores de atenuação ($|A|$):

Furutsu: $|A| = 1.49 \times 10^{-7}$ (0), $|A| = 6.20 \times 10^{-7}$ (100), $|A| = 4.27 \times 10^{-6}$ (200), $|A| = 1.91 \times 10^{-5}$ (300)

Programa implementado: $|A| = 1.49 \times 10^{-7}$ (0), $|A| = 6.24 \times 10^{-7}$ (100), $|A| = 4.38 \times 10^{-6}$ (200), $|A| = 2.05 \times 10^{-5}$ (300)

- Verificada a precisão dos métodos de cálculo, foi iniciada a análise do critério que define a transição entre terra lisa e terreno acidentado. Sendo assim, a solução numérica foi desenvolvida para diversos valores práticos das variáveis envolvidas no problema. Cada enlace é definido por sua frequência de operação (f), alturas das antenas transmissora (h_t) e receptora (h_r) e a distância do percurso (d). Utilizou-se os seguintes dados numéricos:

Frequências: Valores típicos de 100, 300, 1000 e 3000 (MHz)

Alturas das antenas terminais: 50, 75, 100, 150, 200 (m)

Distância do enlace:¹³ $d = 100 km$

- O raio de curvatura equivalente da terra (a_e) adotado foi de 8500 km, correspondendo à condição de uma atmosfera padrão ($\kappa = 4/3$).
- A aproximação para o caso $q = \infty$ supõe não haver dependência da atenuação com a polarização das antenas e as propriedades elétricas do solo.
- O valor aproximado da folga (H') entre os terminais e o topo do obstáculo corresponde à folga mínima do percurso, medida no ponto de reflexão.
- A condição de antenas de mesma altura, além da facilidade de cálculo obtida devido a simetria do problema, leva a resultados mais precisos na definição da folga (H').

¹³ Para todos os casos foi mantida constante a distância entre as antenas transmissora e receptora. Esta consideração foi feita para obter-se apenas o efeito da variação da frequência e das alturas das antenas terminais.

- A série dos resíduos na região de interesse deste trabalho¹⁴ não requer um número considerável de termos para a sua convergência, o que facilita a solução numérica em termos de cálculo. Nas estimativas da atenuação, adotou-se o seguinte critério de convergência:

$$\left| \frac{\textit{Termo}}{\textit{Soma}} \right| \leq 10^{-5}$$

Tendo-se estabelecido essas considerações práticas e tomando-se os valores numéricos das variáveis envolvidas no problema, calculou-se o valor da atenuação relativa ao espaço livre pela teoria de Fresnel-Kirchhoff (AT_{FK}) e pela série dos resíduos ($A_{R_{WT}}$ e $A_{R_{FT}}$). Através dos valores numéricos obtidos foram elaboradas as curvas da FIG. 4.10 (a)-(e) a FIG. 4.13 (a)-(e). Dadas a frequência, a distância do enlace e as alturas das antenas transmissora e receptora, estas curvas fornecem o valor da atenuação relativa ao espaço livre (em dB) em função da relação H'/R' . Na próxima seção é apresentada uma discussão dos resultados obtidos desta análise comparativa e estabelecido o critério de transição entre os relevos suave e acidentado.

4.7.3 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A partir da observação da FIG. 4.10 (a)-(e) a FIG. 4.13 (a)-(e) são feitos os seguintes comentários:

- a) A solução de Wait concorda com a de Furutsu apenas quando o receptor encontra-se na região mais profunda da zona de difração do transmissor. Conforme comentado anteriormente, este comportamento é devido à aproximação do coeficiente de espalhamento ($\hat{S}_{n,m}$) que não considera as ondas refletidas no obstáculo;
- b) Tomando a solução de Furutsu como referência, observa-se que na maioria dos casos¹⁵ a interseção da solução geral da série dos resíduos com a atenuação calculada pela teoria do obstáculo “gume de faca” isolado acontece para uma obstrução entre 0.5 e 0.6 do raio da primeira zona de Fresnel. Ou seja, a interseção entre as curvas dá-se na transição entre as zonas de interferência e de difração em cada trecho do enlace;

¹⁴ Conforme visto anteriormente, trata-se da região de difração definida pela condição $0 < H'/R' < 0.6$. O fator R' denota o raio da primeira zona de Fresnel em cada trecho do percurso considerado (transmissor-obstáculo e obstáculo-receptor).

¹⁵ Exceto a FIG. 4.10 (a)-(c), FIG. 4.11 (a)-(b) e FIG. 4.12 (a).

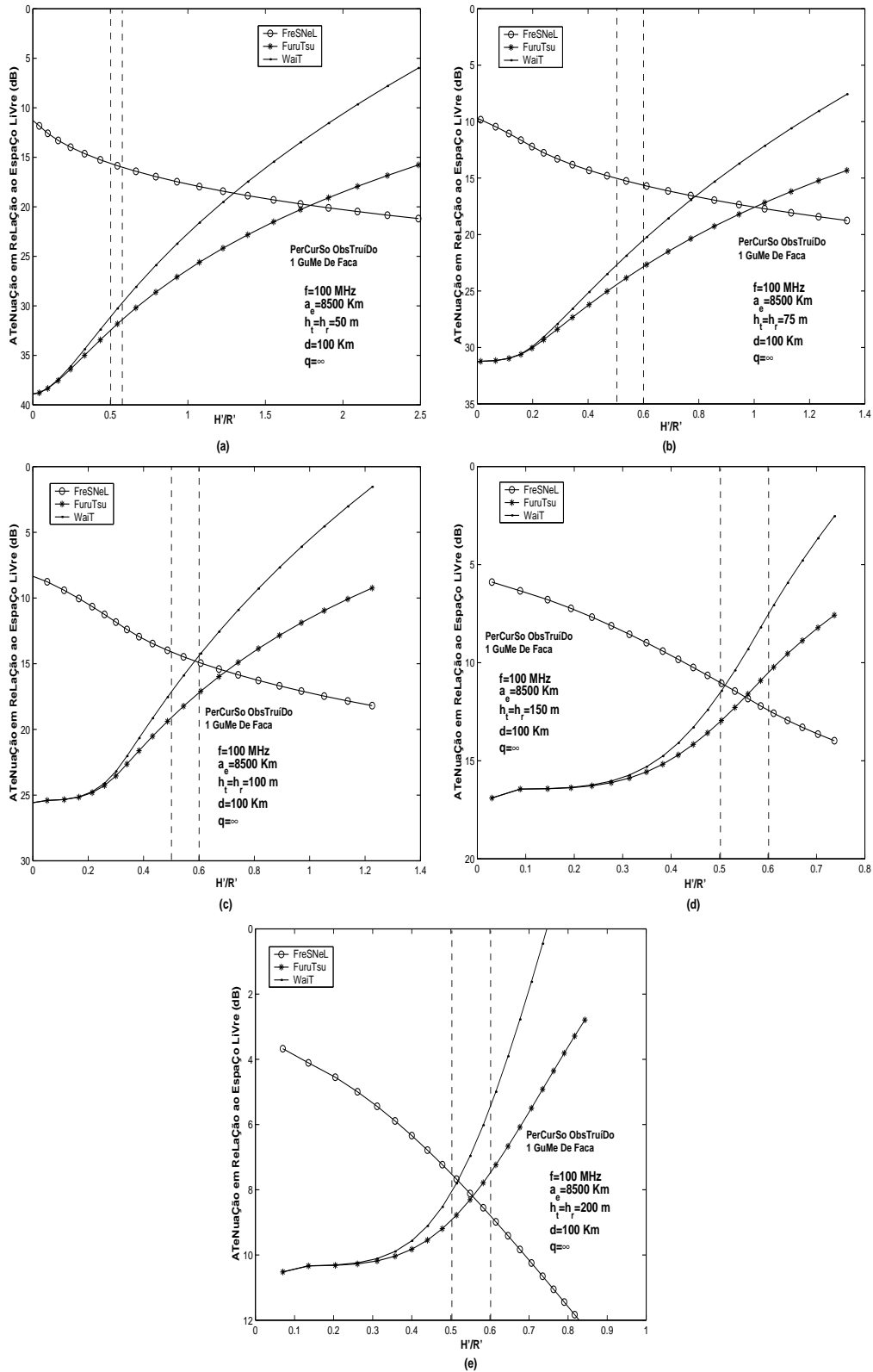


FIG. 4.10: Curvas de atenuação em função de H'/R' ($f = 100\text{ MHz}$).

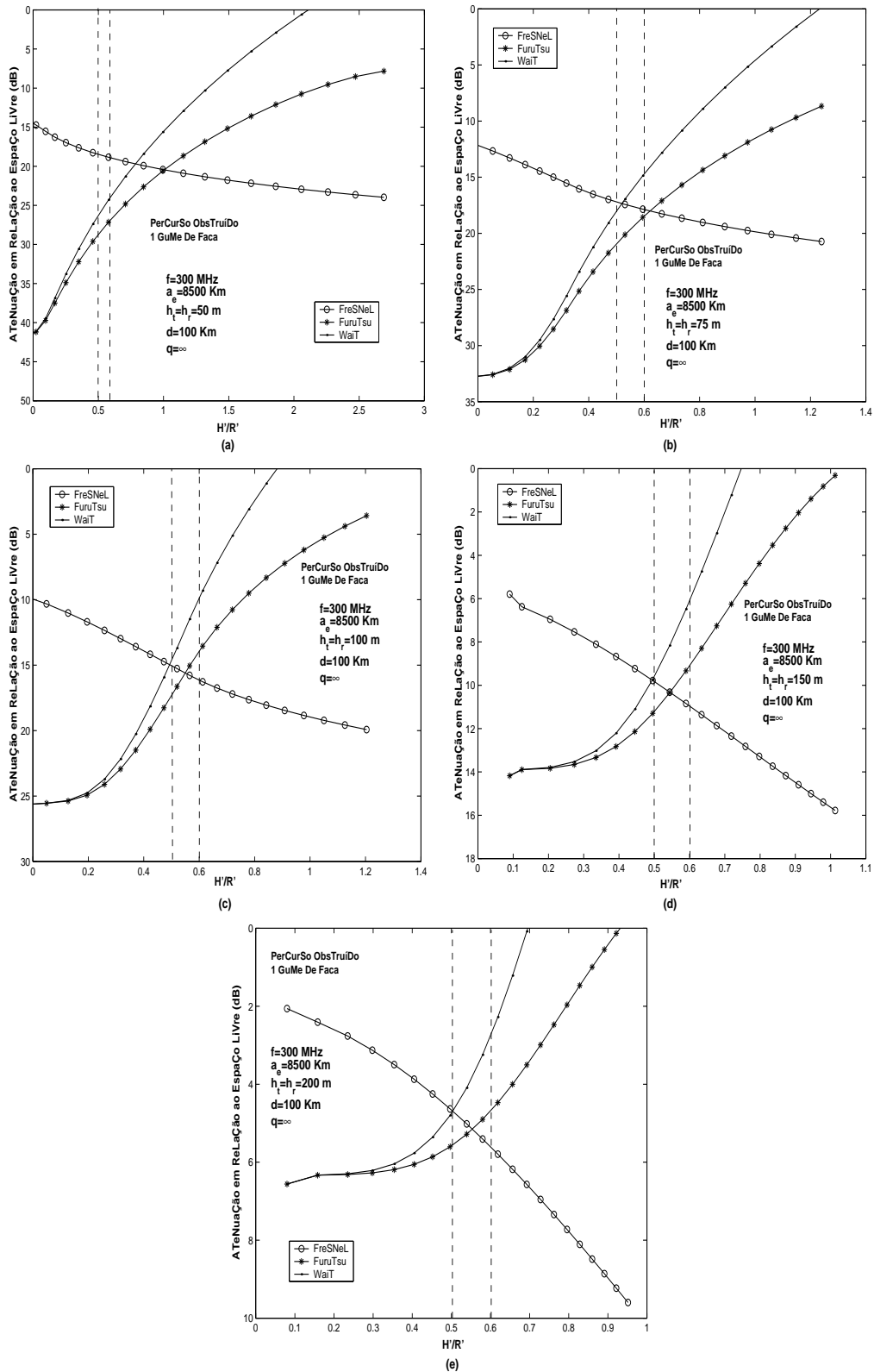


FIG. 4.11: Curvas de atenuação em função de H'/R' ($f = 300$ MHz).

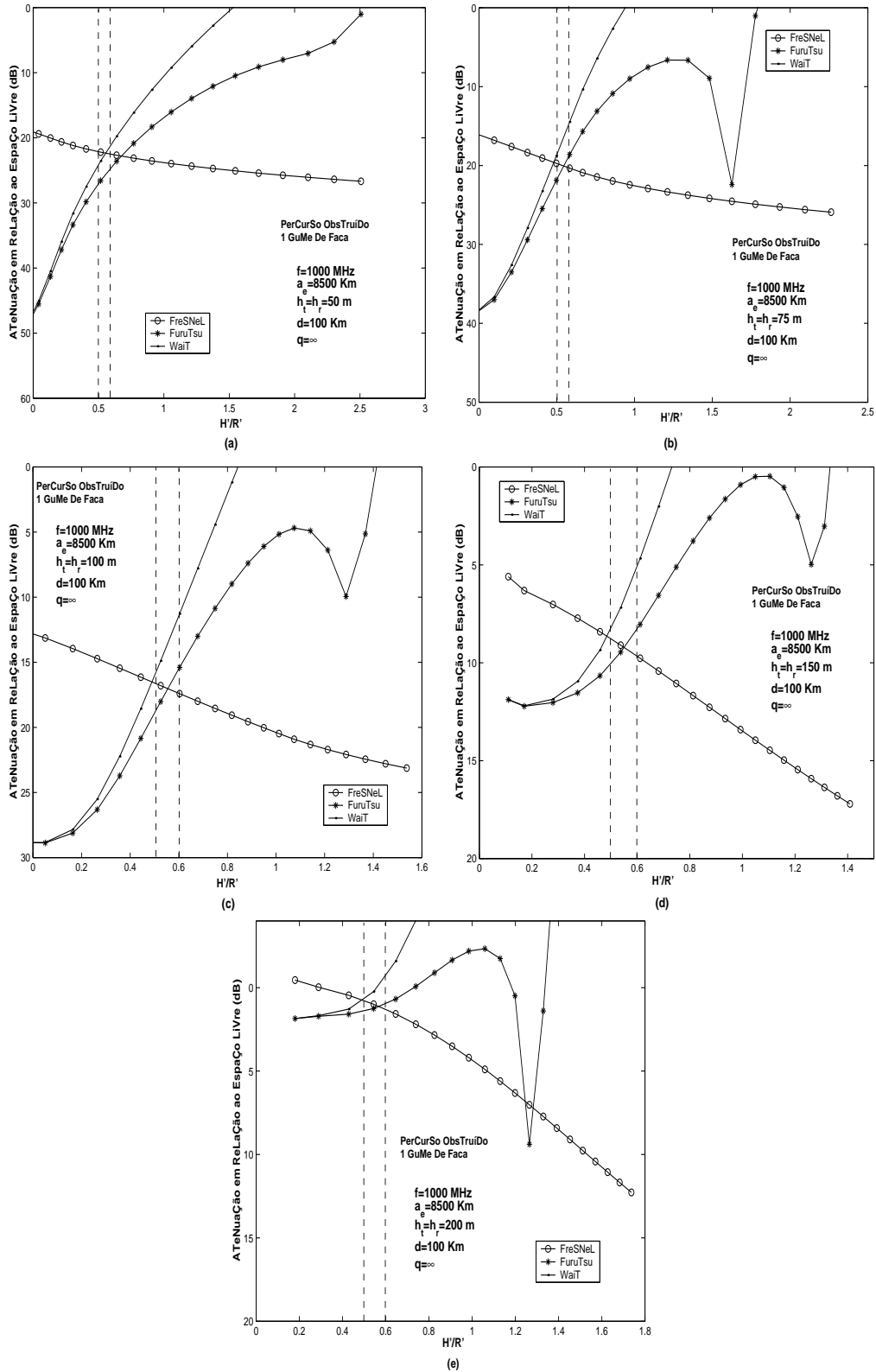


FIG. 4.12: Curvas de atenuação em função de H'/R' ($f = 1000$ MHz).

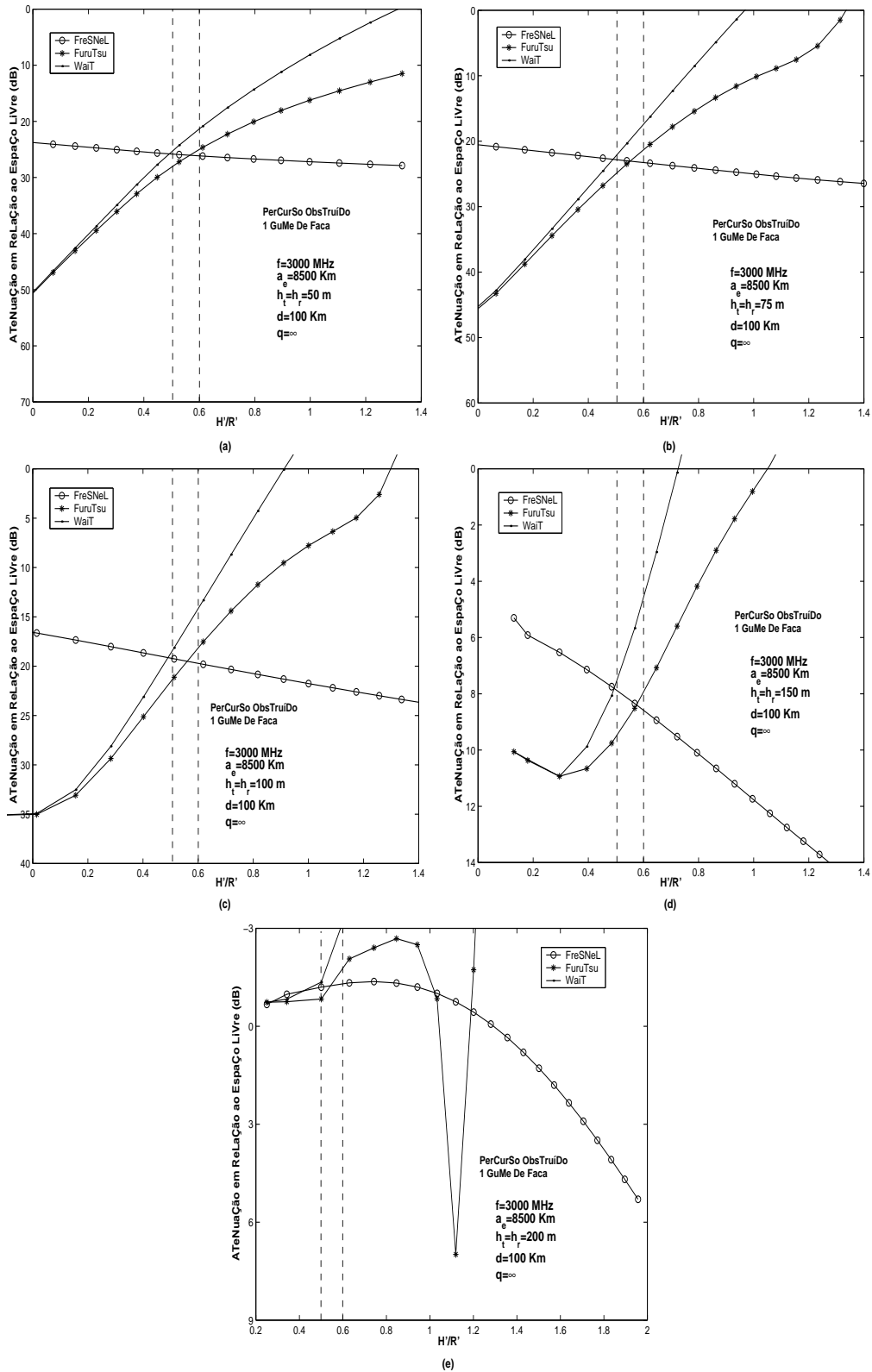


FIG. 4.13: Curvas de Atenuação em função de H'/R' ($f = 3000\text{ MHz}$).

c) A partir do ponto com folga H' maior ou igual a $0.6 R'$, caso o relevo seja liso como o modelo idealizado da FIG. 4.7, pode-se calcular o campo com base na teoria dos 4 raios descrita na seção 4.3 em conjunto com a difração pelo obstáculo;

d) Caso o relevo seja suficientemente rugoso para que as ondas refletidas no solo possam ser ignoradas, tem-se apenas a difração pelo obstáculo “gume de faca”, sendo este, inclusive, a situação mais usual nos casos práticos. Esta situação representa a condição em que o obstáculo pode ser considerado realmente isolado, uma vez que não sofre nenhuma influência do terreno. Nesta configuração ocorre a condição de propagação em espaço livre nos trechos entre o obstáculo e os terminais. O cálculo da atenuação poderá ser feito pela teoria de Fresnel-Kirchhoff que considera apenas o efeito isolado do obstáculo no trajeto entre os terminais;

e) A convergência das séries dos resíduos expressas pela EQ. 4.75 e EQ. 4.76 a partir de $H'/R' > 0.6$ torna-se bastante crítica. Em particular, a solução de Wait é bastante divergente. Entretanto, em algumas situações, na solução de Furutsu (FIG. 4.12 (b)-(e) e FIG. 4.13 (e)) observa-se a tendência a um ponto de máximo, indicando a interferência entre os raios direto e refletido no solo;

f) O comportamento observado na FIG. 4.10 (a)-(c), FIG. 4.11 (a)-(b) e FIG. 4.12 (a) comentado em (b) pode ser explicado com base na faixa de transição entre luz e sombra (penumbra geométrica). Para esta análise considera-se os seguintes casos:

Caso 1: Referência à FIG. 4.11 (a)

Frequência: $f = 300 \text{ MHz}$

Largura da faixa de penumbra: $\ell = 28.44 \text{ km}$

Alturas das antenas terminais: $h_{t,r} = 50 \text{ m}$

Horizonte óptico dos terminais: $dh_{t,r} = \sqrt{2a_e h_{t,r}} = 29.2 \text{ km}$

Altura do obstáculo ($H'/R' = 0.6$):¹⁶ $h_c \approx 123 \text{ m}$

Horizonte óptico do obstáculo: $dh_c = \sqrt{2a_e h_c} = 45.73 \text{ km}$

Raio equivalente da terra: $a_e = 8500 \text{ km}$

¹⁶ Na FIG. 4.11 (a) quando $H'/R' = 0.6$ o obstáculo correspondente a esta folga tem uma altura aproximada de 123 m e com um horizonte de 45.73 km (vide TAB. 4.4).

Considerando estes parâmetros numéricos, pode ser feita a representação gráfica¹⁷ mostrada na FIG. 4.14 (a). Devido a ocorrência de superposição entre as faixas de penumbra de cada um dos terminais e do obstáculo não haverá a interseção entre as soluções para $H'/R' \approx 0.6$. Por outro lado, esta interseção acontece para $H'/R' = 1$. Neste caso, a altura (h_c) do obstáculo correspondente é de $\approx 165 m$, com um horizonte (dh_c) de $52.96 km$ (vide TAB. 4.4). Esses novos valores numéricos resultam na geometria representada na FIG. 4.14 (b). Observa-se que como as soluções se cortam no ponto $H'/R' = 1$, conseqüentemente não ocorrerá a superposição entre as faixas de penumbra.

Caso 2: Referência à FIG. 4.12 (a)

Frequência: $f = 1000 MHz$

Largura da faixa de penumbra: $\ell = 19.04 km$

Alturas das antenas terminais: $h_{t,r} = 50 m$

Horizonte óptico dos terminais: $dh_{t,r} = \sqrt{2a_e h_{t,r}} = 29.2 km$

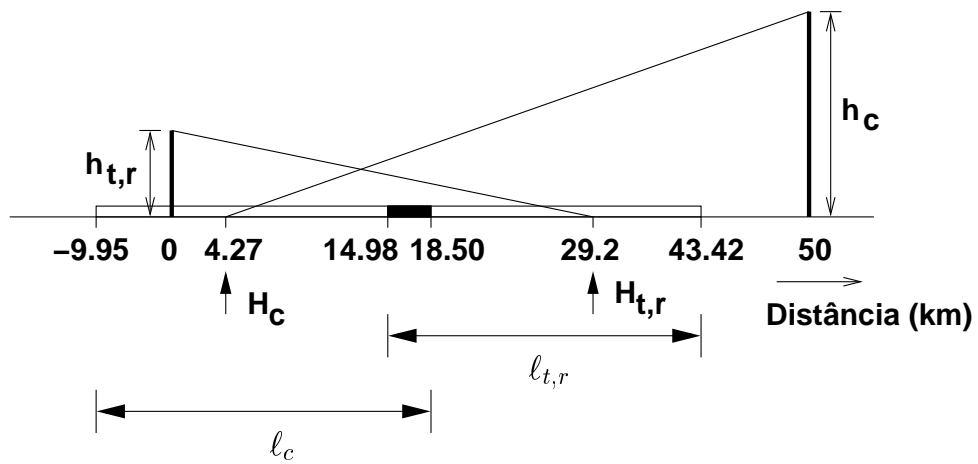
Altura do obstáculo ($H'/R' = 0.6$): $h_c \approx 87 m$

Horizonte óptico do obstáculo: $dh_c = \sqrt{2a_e h_c} = 38.46 km$

Raio equivalente da terra: $a_e = 8500 km$

De forma análoga ao caso anterior, a partir dos dados numéricos apresentados foram obtidas as geometrias ilustradas na FIG. 4.15 (a) e (b). Nota-se que para $H'/R' = 0.6$ haverá a superposição das faixas de penumbra. No entanto, a interseção entre as soluções ocorrerá para $H'/R' = 0.68$. Este caso corresponde a um obstáculo de altura $h_c \approx 95 m$ e com um horizonte de $40 km$. Conforme mostra a FIG. 4.15 (b), nesta situação não se verifica a superposição das faixas de penumbra dos terminais e do obstáculo. Todos os demais casos referentes às figuras FIG. 4.10 a FIG. 4.13 podem ser verificados seguindo o mesmo procedimento.

¹⁷ Para facilitar a geometria do problema, as distâncias medidas sobre a curvatura da terra são representadas no plano horizontal.



(a)

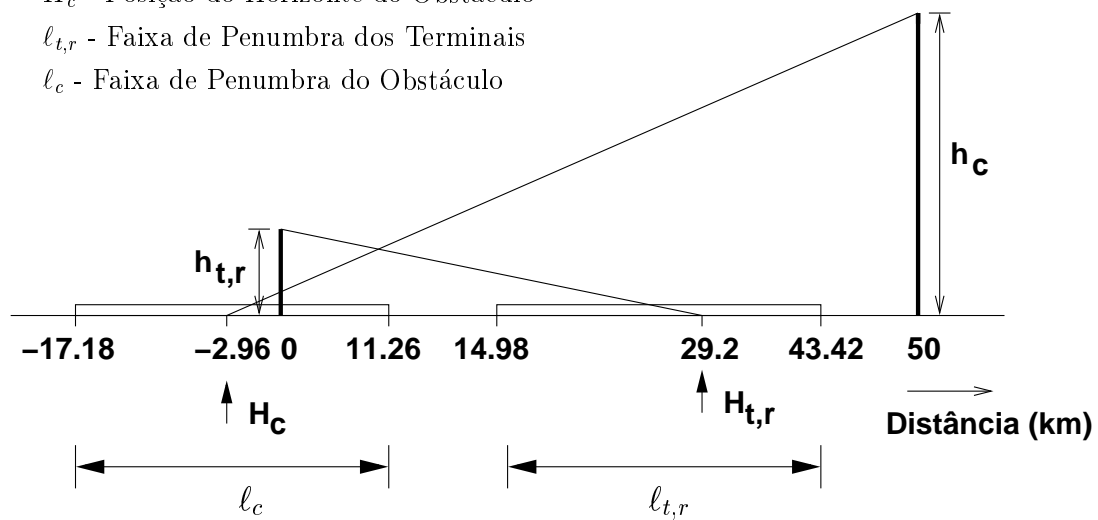
Legenda:

$H_{t,r}$ - Posição do Horizonte dos Terminais

H_c - Posição do Horizonte do Obstáculo

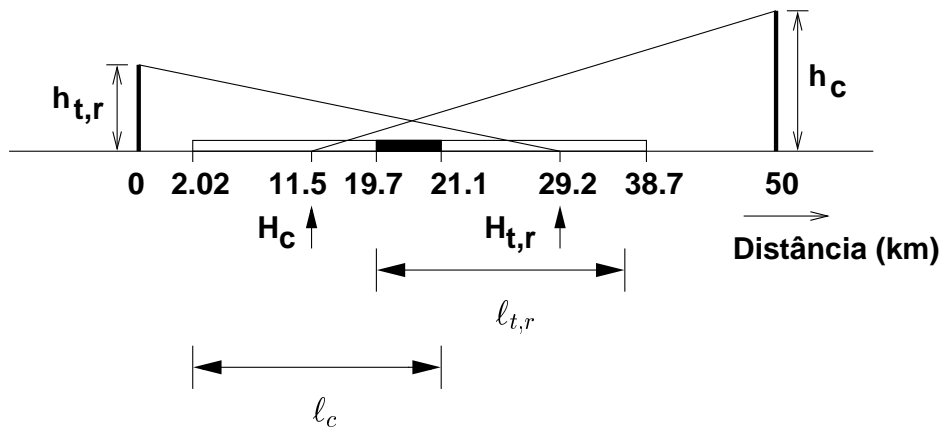
$l_{t,r}$ - Faixa de Penumbra dos Terminais

l_c - Faixa de Penumbra do Obstáculo

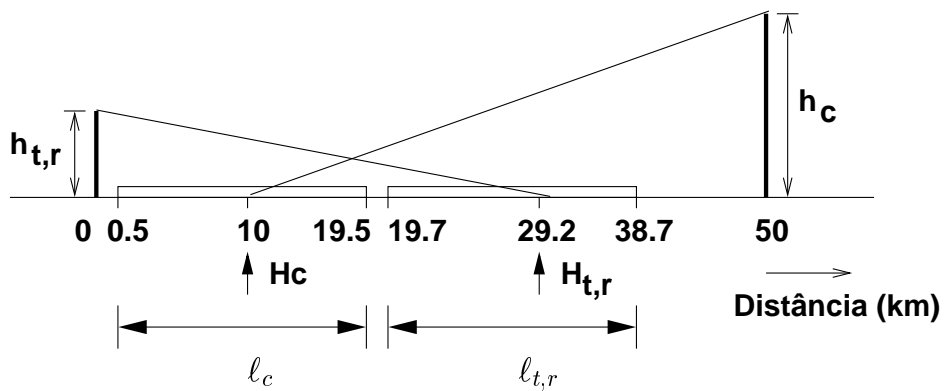


(b)

FIG. 4.14: Análise da superposição das faixas de penumbra dos terminais e do obstáculo ($f = 300 \text{ MHz}$, $h_{t,r} = 50 \text{ m}$) – (a) $H'/R' = 0.6$ e $h_c \approx 123 \text{ m}$. (b) $H'/R' = 1$ e $h_c \approx 165 \text{ m}$.



(a)



(b)

FIG. 4.15: Análise da superposição das faixas de penumbra dos terminais e do obstáculo ($f = 1000 \text{ MHz}$, $h_{t,r} = 50 \text{ m}$) - (a) $H'/R' = 0.6$ e $h_c \approx 87 \text{ m}$. (b) $H'/R' = 0.68$ e $h_c \approx 95 \text{ m}$.

TAB. 4.4: Valores aproximados de altura e horizonte do obstáculo ($H' = 0.6R'$, $A_R = A_{T_{FK}}$)

f (MHz)	ℓ (Km)	$h_{t,r} = 50$ m $dh_{t,r} = 29.2$ km					$h_{t,r} = 75$ m $dh_{t,r} = 35.71$ km					$h_{t,r} = 100$ m $dh_{t,r} = 41.23$ km					$h_{t,r} = 150$ m $dh_{t,r} = 50.5$ km					$h_{t,r} = 200$ m $dh_{t,r} = 58.31$ km									
		$H' = 0.6R'$		$A_R = A_{T_{FK}}$			$H' = 0.6R'$		$A_R = A_{T_{FK}}$			$H' = 0.6R'$		$A_R = A_{T_{FK}}$			$H' = 0.6R'$		$A_R = A_{T_{FK}}$			$H' = 0.6R'$		$A_R = A_{T_{FK}}$							
		h_c (m)	dh_c (km)	h_c (m)	dh_c (km)	H'/R'	h_c (m)	dh_c (km)	h_c (m)	dh_c (km)	H'/R'	h_c (m)	dh_c (km)	h_c (m)	dh_c (km)	H'/R'	h_c (m)	dh_c (km)	h_c (m)	dh_c (km)	H'/R'	h_c (m)	dh_c (km)	h_c (m)	dh_c (km)	H'/R'	h_c (m)	dh_c (km)	h_c (m)	dh_c (km)	H'/R'
100	41.01	170	53.76	325	74.33	1.77	178	55.01	248	64.87	0.99	176	54.70	203	58.67	0.71	156	51.50	140	48.79	0.56	114	44.02	102	41.64	0.56					
300	28.44	123	45.73	165	52.96	1.00	120	45.17	128	46.56	0.65	108	42.85	98	40.82	0.56	70	34.50	60	31.94	0.54	47	28.27	43	27.04	0.56					
1000	19.04	87	38.46	95	40	0.68	72	34.99	68	33.87	0.56	52	29.73	48	28.57	0.56	29	22.20	27	21.22	0.56	18	17.25	16	16.34	0.56					
3000	13.20	65	33.11	62	32.47	0.56	44	27.19	41	26.40	0.56	29	22.20	27	21.42	0.56	14	15.15	13	14.58	0.57	7	10.83	6	10.27	0.56					

Concluída a análise dos resultados e considerando a geometria definida por um obstáculo “gume de faca” superposto a uma terra esférica lisa e homogênea, finalmente podem ser enunciados os fundamentos do critério de transição entre os relevos suave e acidentado.

a) Para uma altura do obstáculo (h_c) 10 vezes menor que o raio da primeira zona de Fresnel (R)¹⁸ no percurso entre o transmissor e o receptor pode ser estabelecida a condição para ignorar o efeito do obstáculo e associar a parcela significativa das perdas por difração unicamente à curvatura da terra lisa, o que caracteriza o relevo suave. Por outro lado, se a elevação do terreno for considerável em relação ao raio de Fresnel, as condições de propagação poderão ser substancialmente afetadas, tal que o efeito do obstáculo haverá de ser considerado;

b) Supondo não haver superposição entre as faixas de penumbra de cada um dos terminais e do obstáculo e considerando o terreno suficientemente rugoso para que o raio refletido no solo possa ser ignorado, a folga (H') maior ou igual a 0.6 do raio de Fresnel (R') em cada trecho do enlace estabelece a condição de obstáculo realmente isolado do terreno, caracterizando a transição para relevo acidentado sem nenhuma influência do terreno. Nesta situação, o cálculo da atenuação pode ser feito pela teoria da difração de Fresnel-Kirchhoff. Caso haja a possibilidade de reflexão em um ou ambos os percursos entre os terminais e o obstáculo, deve-se empregar a formulação da óptica geométrica em conjunto com a difração pelo obstáculo;

c) Na situação em que $H'/R' < 0.6$ haverá de ser avaliado através da formulação geral da série dos resíduos o efeito combinado da interação da onda em propagação com o terreno. Por fim, havendo a superposição entre as faixas de penumbra, o critério de transição terá que ser reformulado para uma nova relação H'/R' onde não haja a interação entre as faixas de transição entre a visibilidade e a sombra geométrica de cada um dos terminais e do obstáculo.

¹⁸ $h_c/R = 0.1$ ou $h_c = 10\% R$.

5 CONCLUSÕES

A análise realizada neste trabalho foi direcionada ao estudo do problema da difração considerando os efeitos da curvatura da terra e dos obstáculos do terreno nas faixas de frequências em VHF e UHF. Embora o tema abordado tenha um caráter geral, o enfoque principal concentrou-se na análise da transição entre terra lisa e terreno acidentado. O método de cálculo proposto nesta análise baseou-se na formulação geral da série dos resíduos, descrita segundo a notação de diferentes autores. Neste capítulo é apresentada uma síntese dos principais resultados obtidos neste trabalho. No final do capítulo são sugeridos alguns tópicos que possam constituir assunto de pesquisas futuras, de forma a complementar os resultados obtidos nesta análise e estender os aspectos mais importantes do presente trabalho.

5.1 PRINCIPAIS RESULTADOS

Nesta dissertação, um amplo estudo foi realizado objetivando definir o critério de transição entre os relevos suave e acidentado. Dentre os resultados de maior relevância, podem ser destacadas as seguintes conclusões:

- a) A análise da difração na faixa de frequências abordada permitiu introduzir simplificações adicionais, tal que o cálculo da atenuação pôde ser feito independentemente da polarização das antenas terminais e das características elétricas do solo;
- b) A transição entre as regiões de visibilidade e sombra geométrica do transmissor se processa ao longo da faixa de penumbra. Nesta faixa de transição, a interação entre a energia que se propaga e o terreno depende unicamente das características do campo na região onde acontece a transição, traduzindo o caráter local deste campo;
- c) Verificou-se das análises que, em frequências onde a largura da faixa de penumbra (ℓ) é maior ou se aproxima do horizonte óptico ($d_{h_{t,r}}$) de uma das antenas¹, a intensidade de campo no horizonte apresenta uma dependência explícita em relação às alturas das antenas. Por outro lado, à medida que a frequência aumenta esta dependência tende a diminuir, caracterizando o efeito enunciado pelo “Princípio da Ação Local”;

¹ $\ell \gtrsim d_{h_{t,r}}$.

d) Considerando as antenas terminais suficientemente elevadas em relação ao terreno ($\chi_{h_{t,r}} \gg 1$), a condição $\ell \ll 2^{1/3} d_{h_{t,r}}$ tende a ser satisfeita. Sob esta condição, a intensidade de campo dependerá unicamente das características da faixa de penumbra, não havendo fora desta região uma interação significativa entre o feixe de energia e o terreno;

e) A idéia de “ganho de obstáculo” corresponde à diferença observada entre a atenuação em um enlace considerando a terra lisa e a atenuação neste mesmo enlace levando em conta a presença do obstáculo nele existente. Este efeito determina uma atenuação bem menor do que a obtida na ausência do obstáculo (terra lisa), resultando favoravelmente em um campo difratado de maior magnitude;

f) Foi observado que se o efeito da altura do obstáculo for irrelevante sobre a energia do sinal que se propaga, essa irregularidade do terreno pode ser ignorada. Sendo assim, explorando o conceito de “ganho de obstáculo” foi estabelecido o critério para desprezar o efeito de um obstáculo “gume de faca” sobre o sinal radioelétrico transmitido. Numericamente, para uma altura do obstáculo (h_c) 10 vezes menor que o raio da primeira zona de Fresnel (R) no percurso entre os terminais, o “ganho de obstáculo” foi inferior a 1 dB para todos os casos previstos. Portanto, para uma relação $h_c/R = 0.1$ (ou $h_c = 10\% R$) pode ser fixado um critério suficientemente razoável para desprezar o efeito do obstáculo e associar a parcela significativa das perdas por difração unicamente à curvatura da terra lisa, o que caracteriza o relevo suave. Por outro lado, se a elevação do obstáculo do terreno for significativa em relação ao raio de Fresnel, as condições de propagação poderão ser substancialmente afetadas, tal que o efeito do obstáculo haverá de ser considerado na análise do problema da difração;

g) Embora as soluções de Wait e Furutsu tenham apresentado resultados idênticos no cálculo da atenuação para o caso da terra lisa, ao se considerar o efeito combinado da terra e do obstáculo a solução de Furutsu foi tomada como referência por se mostrar mais precisa. Devido ao caráter mais geral da solução proposta por Furutsu, o rigor matemático aplicado em sua formulação considera a reflexão no obstáculo e prevê a interferência entre os raios direto e refletido no solo. Por outro lado, a formulação de Wait despreza os termos associados à reflexão no obstáculo. Apenas na condição em que o receptor encontra-se na região mais profunda da zona de difração do transmissor, os termos relacionados à reflexão no obstáculo não são importantes e assim as duas soluções concordaram de forma satisfatória;

h) A folga H' em cada trecho do percurso corresponde à menor distância da terra, suposta esférica, à linha de visada direta entre um dos terminais e o topo do obstáculo. O valor aproximado de H' foi medido sobre a perpendicular à tangente no ponto de reflexão, entre este ponto e o raio de visada direta entre um dos terminais e o topo do obstáculo. Considerando as antenas com alturas iguais, esta folga foi obtida de forma precisa sobre o ponto de reflexão;

i) O cálculo da atenuação na região de interesse deste trabalho restringe-se à zona de difração dos terminais em cada trecho do enlace. Nesta região, a folga (H') em cada trecho do percurso, relativa ao raio da primeira zona de Fresnel (R'), varia no intervalo $0 < H'/R' < 0.6$. Dentro destes limites fixados para a relação H'/R' , o cálculo da atenuação através da série dos resíduos não requer um número considerável de termos para a sua convergência, o que facilita sob o ponto de vista prático a aplicação desta solução;

j) A convergência da série dos resíduos a partir de $H'/R' > 0.6$ é bastante crítica. Em particular, a solução de Wait é bastante divergente, uma vez que não considera os termos relacionados à reflexão no obstáculo. Provavelmente, isto explica porque na grande maioria dos casos os resultados numéricos da solução de Wait tenham sido obtidos em baixas frequências (LF e VLF), onde o problema da convergência é menos crítica. No entanto, em algumas situações, a solução de Furutsu apresenta a tendência a um ponto de máximo no valor da atenuação, caracterizando a interferência entre os raios direto e refletido no solo;

k) Supondo não haver superposição entre as faixas de penumbra dos terminais e do obstáculo e tomando-se a solução de Furutsu como referência, a interseção das curvas de atenuação obtidas pela série dos resíduos e pela teoria de Fresnel-Kirchhoff acontece para uma obstrução entre 0.5 e 0.6 do raio da primeira zona de Fresnel. Este ponto define a transição entre as zonas de interferência e de difração em cada trecho do enlace;

l) Havendo folga maior ou igual a $0.6 R'$ nos trajetos entre o terminal e o topo do obstáculo, podem ocorrer as seguintes situações: 1) Caso o relevo seja suficientemente irregular para que o raio refletido possa ser ignorado, ocorrerá a condição de propagação em espaço livre em cada trecho do percurso. Esta condição corresponde à difração por um obstáculo realmente isolado do terreno, caracterizando a transição para o relevo acidentado sem nenhuma influência do trecho do terreno que circunda o obstáculo. Neste caso, o cálculo da atenuação pode ser feito pela teoria da difração

de Fresnel-Kirchhoff. 2) Caso haja a possibilidade de reflexão em um ou ambos os percursos entre os terminais e o obstáculo, deve-se empregar a formulação da óptica geométrica em conjunto com a difração pelo obstáculo;

m) Havendo a superposição das zonas de penumbra, o ponto de interseção entre as curvas de atenuação não acontecerá para $H'/R' \approx 0.6$. Esta interseção ocorrerá para uma nova relação H'/R' onde não haja a interação entre as faixas de transição (luz-sombra) de cada um dos terminais e do obstáculo;

n) Na situação em que $H'/R' < 0.6$ haverá a possibilidade de se utilizar a solução geral da série dos resíduos, tal que se possa avaliar a interação da onda que se propaga com o terreno. Neste caso, pode-se incluir na formulação os efeitos conjuntos da difração pela curvatura da terra e por obstáculos do terreno.

De forma a complementar o estudo realizado neste trabalho, podem ser citadas como contribuições adicionais o desenvolvimento dos seguintes programas computacionais que poderão ser disponibilizados para uso público:

★ A implementação do algoritmo de Runge-Kutta para o cálculo das raízes das funções de Airy.

★ A automatização das séries de potências e das frações continuadas pelo método de Lentz modificado para evoluir as integrais seno e cosseno de Fresnel.

5.2 TRABALHOS FUTUROS

A partir das conclusões apresentadas, ainda existe uma série de problemas que podem ser abordados de modo a complementar os resultados aqui obtidos. Finalmente, resta comentar alguns tópicos que podem dar continuidade à pesquisa iniciada neste trabalho. São sugeridos a seguir alguns estudos futuros que poderão ser realizados.

a) Para a análise do problema proposto foi adotado o modelo idealizado do “gume de faca” para o obstáculo do terreno. Entretanto, em uma formulação mais rigorosa e realística pode-se estender a teoria da difração por obstáculos convexos que levam em conta o raio de curvatura no topo da elevação do terreno;

b) Para o cálculo da atenuação do sinal foi estimada a folga do percurso entre cada um dos terminais e o topo de um obstáculo situado no meio do percurso. Uma generalização do método de cálculo proposto consistiria em supor a condição de um obstáculo superposto em qualquer posição do percurso sobre a superfície terrestre.

Neste caso, a geometria do problema seria assimétrica e o cálculo da folga do percurso deveria ser reformulado para obter-se os valores precisos de atenuação;

c) Estender a análise aqui desenvolvida para a estimativa do efeito das discontinuidades do relevo. Em uma situação mais complexa, poderia ser investigada a difração por geometrias do relevo em formas de platôs e escarpas abruptas;

d) Em uma abordagem mais abrangente do problema, investigar o efeito da difração múltipla por vários obstáculos do terreno na análise do critério de transição entre os relevos suave e acidentado.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABRAMOWITZ, M., and STEGUN, I.A. **Handbook of mathematical functions.** Dover Inc., pp. 446-456/475-478, New York, 1964.
- ASSIS, M.S. **Análise das teorias clássicas de propagação das ondas radioelétricas em presença da terra.** Tese de Mestrado, PUC/RJ, Julho/1966.
- ASSIS, M.S. **Aplicações da teoria matemática da difração.** Série CETUC, Caderno No. 32, PUC/RJ, Março/1979.
- BORN, M., and WOLF, M. **Principles of optics: electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light.** Oxford: Pergamon, 1980.
- BREMMER, H., and VAN DER POL, B. **The diffraction of electromagnetic waves from an electrical point source round a finitely conducting sphere with application to radiotelegraphy and the theory of rainbow.** 1st Part: Philosophical Magazine, Vol. 24, pp. 141–175, July 1937; 2nd Part: Philosophical Magazine, Vol. 24, pp. 825–864, Supl. November 1937.
- BREMMER, H., and VAN DER POL, B. **The propagation of radio waves over a finitely conducting spherical earth.** Philosophical Magazine, Vol. 25, pp. 817–834, July 1938.
- BREMMER, H., and VAN DER POL, B. **Further note on the propagation of radio waves over a finitely conducting spherical earth.** Philosophical Magazine, Vol. 27, pp. 261–271, March 1939.
- BREMMER, H. **Terrestrial radio waves.** Elsevier Publishing Company Inc., Netherlands, 1949.
- BULLINGTON, K. **Radio propagation at frequencies above 30 megacycles.** Proceedings of the IRE, Vol. 35, pp. 1122–1136, New York, October 1946.
- BURROWS, C.R. **Radio propagation over plane earth field strength curves.** Bell Sys. Tech. Jour., Vol. 16, pp. 45–75, January 1947.
- CAVANAGH, J.F., and THURSTON, S.A. **Grwave – for MS-DOS personal computers.** CCIR United States Study Group 5, Geneva, July, 1988. Disponível em: <http://www.itu.org/itu-r/study-group5/software>.
- DICKSON, F.H. et al. **Large reductions of VHF transmission loss And fading by the presence of a mountain obstacle in beyond-line-of-sight paths.** PROC. IRE, Vol. 41, pp. 967–969, August 1953.

- FOCK, V.A. **Diffraction of radio waves around the earth's surface.** J. Phys., Series 15, No. 9, pp. 256–266, 1945.
- FOCK, V.A. **The field of a vertical and a horizontal dipole raised above the earth's surface.** J. Phys., Series 19, No. 10, pp. 916–926, 1949.
- FOCK, V.A. **Electromagnetic diffraction and propagation problems.** Pergamon Press, Oxford, 1965.
- FRESNEL, A. **Ouvres complètes (mémoire sur la diffraction de la lumière).** Vol. I, pp. 247–382, Paris, 1818.
- FURUTSU, K. **Wave propagation over an irregular terrain.** Journal Of The Radio Research Laboratories, Part I, Vol. 4, p. 135; Part II, Vol. 4, p. 349; Part III, Vol. 6, p. 71, Tokyo, 1959.
- FURUTSU, K. **On the theory of radio wave propagation over inhomogeneous earth.** NBS Journal of Research, No. 1, Vol. 67D, pp. 39–62, 1963.
- FURUTSU, K., HARTMANN, R.F., and WILKERSON, R.E. **Some numerical results based on the theory of radio wave propagation over inhomogeneous earth.** NBS Journal, Vol. 68D, pp. 827–846, 1964.
- FURUTSU, K., and WILKERSON, R.E. **Obstacle gain in radio wave propagation over inhomogeneous earth.** Proc. IEE, No. 5, Vol. 117, pp. 887–893, 1970.
- FURUTSU, K., and WILKERSON, R.E. **Optical approximation for residue series of terminal gain in radiowave propagation over inhomogeneous earth.** Proc. IEE, No. 9, Vol. 118, pp. 1197–1202, 1971.
- GRENIER, G.H. **Obstacle gain and shadow loss.** The Microwave Journal, pp. 60–69, 1962.
- HUFFORD, G.A. **An integral equation approach to the problem of wave propagation over an irregular surface.** Quart. Appl. Math., Vol. 9, pp. 391–404, 1952.
- KIRCHHOFF, G. . **Vorlesungen über mathematischen physik.** Vol. 2 (Optik), Leipzig, 1882.
- KUO, S.S. **Numerical methods and computers.** Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, p. 109, New York, 1965.
- LEBEDEV, N.N. **Special functions and their applications.** Prentice-Hall Inc., pp. 136-139, Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.
- LENTZ, W.J. **Applied optics.** Vol. 15, pp. 668-671, 1976.
- MACLEAN, T.S.M., and WU, Z. **Radiowave propagation over ground.** Chapman & Hall, 1st Edition, London, 1993.

- MORSE, M.M., and FESHBACH, H. **Methods of theoretical physics**. McGraw Hill, Vol. 1, New York, 1953.
- NIESSEN, K.F. **The propagation of electromagnetic waves over a plane earth**. Ann. der Phys., Vol. 6, pp. 273–294, 1930.
- NORTON, K.A. **Propagation of radio waves over a plane earth**. Nature, Vol. 135, pp. 934–955, Paris/London, 1935.
- NORTON, K.A. **The calculation of ground-wave field intensity over a finitely conducting spherical earth**. Proceedings Of The I.R.E., Vol. 29, pp. 623–639, December, 1941.
- POINCARÉ, H. **Oeuvres complètes**. Gauthier Villars, Tome X, Paris, 1904.
- PRESS, W.H. et al. **Numerical recipes in fortran 77**. 2a. Edition, Cambridge University Press, Vol. 1, pp. 243-245, London, 1992.
- RICE, P.L., NORTON, K.A., and BARSIS, A.P. **Transmission loss predictions for tropospheric communication circuits**. NBS. Tech., Vol. 1, 1967.
- SCHELLENG, J.C., BURROWS, C.R., and FERREL, E.B. **Ultra short wave propagation**. Proc. IRE, Vol. 21, pp. 427–463, 1933.
- SOMMERFELD, A. **The propagation of waves in wireless telegraphy**. Ann. der Phys., Part I, Vol. 28, pp. 665–736, 1909; Part II, Vol. 81, pp. 1135–1153, 1926.
- THOMPSON, W.J. **Atlas for computing mathematical functions**. John Wiley & Sons Inc., pp. 414-432, New York, 1997.
- WAIT, J.R. **Radiation from a vertical antenna over a curved stratified ground**. NBS Journal of Research, No. 4, Vol. 56, pp. 237–244, 1956.
- WAIT, J.R., and CONDA, A.M. **Pattern of an antenna on a curved lossy surface**. IRE Trans., Vol. AP-6, pp. 348–359, October 1958.
- WAIT, J.R. **Electromagnetic radiation from cylindrical structures**. Pergamon Press Inc., New York, 1959.
- WAIT, J.R. **On the theory of mixed path ground wave propagation on a spherical earth**. J. Research NBS, Vol. D-65, pp. 401–410, 1961.
- WAIT, J.R. **Wave propagation around a curved boundary which contains an obstacle**. J. Phys., Vol. 40, No. 8, pp. 1010–1016, 1962a.
- WAIT, J.R. **Electromagnetic waves in stratified media**. NY, New York: Pergamon Press Inc., Vol. 3, pp. 1010–1016, 1962b.
- WAIT, J.R. **Electromagnetic surface waves**. Advances in Radio Research, London, England: Academic Press Inc., Vol. 1, pp. 157–217, 1964.

- WAIT, J.R. **On the theory of radiation from a raised electric dipole over an inhomogeneous ground plane.** Radio Sci., Vol. 2 (New Series), No. 9, pp. 997–1004, September 1967.
- WAIT, J.R. **Modal analysis of irregular terrain effects in radio propagation and the ray interpretation.** Electron. Lett., Series 4, Vol. 17, No. 10, pp. 367–368, 1968a.
- WAIT, J.R. **Diffraction and scattering of the electromagnetic ground wave by terrain features.** Radio Sci., Vol. 3 (New Series), No. 10, pp. 995–1003, October 1968b.
- WAIT, J.R., and SPIES, K.P. **On the diffraction by a knife-edge obstacle on a conducting earth.** Radio Science, Vol. 3 (New Series), pp. 1179–1181, 1968a.
- WAIT, J.R., and SPIES, K.P. **Radio propagation over a cylindrical hill including the effect of a surmounted obstacle.** IEEE Transactions Antennas Propagation, Vol. AP-16, pp. 700–705, November 1968b.
- WAIT, J.R., and SPIES, K.P. **On the diffraction by a knife-edge obstacle on a conducting earth.** Radio Sci., Vol. 3 (New Series), pp. 1179–1181, December 1968c.
- WAIT, J.R. **Electromagnetic probing in geophysics.** The Golem Press Inc., Colorado (USA), 1971.
- WAIT, J.R. **Recent analytical investigations of electromagnetic ground wave propagation over inhomogeneous earth models .** Proceedings of the IEEE, Vol. 62, No. 8, pp. 1061–1072, August 1974.
- WAIT, J.R. **Coupled mode analysis for ground wave propagation over inhomogeneous paths.** Electromagnetics, Vol. 1, pp. 91–100, 1981.
- WATSON, G.N. **The diffraction of electric waves by the earth.** Proc. of the Royal Society, Vol. 95, pp. 83–89, October, 1918; Vol. 96, pp. 546–563, July 1919.
- WATSON, G.N. **A treatise on the theory of Bessel functions.** Cambridge University Press, 2nd Edition, London, 1966.
- WEYL, H. **The propagation of electromagnetic waves over a plane conduction.** Ann. der Phys., Vol. 60, pp. 481–500, 1919.
- WISE, W.H. **The grounded condenser antenna radiation formula.** Proc. IRE, Vol. 19, pp. 1684–1689, 1931.
- ZENNECK, J. **The guiding and radiation of surface waves.** Ann. der Phys., Series 4, Vol. 23, p. 846, 1907.

7 APÊNDICES

7.1 APÊNDICE 1: FUNÇÕES DE AIRY

Neste apêndice são definidas as funções de Airy, comumente aplicadas na ciência Física Matemática e, em particular, na teoria da difração de ondas eletromagnéticas. O uso extensivo dessas funções na formulação adotada torna apropriado incluir neste trabalho um apêndice relacionando essas funções.

As funções de Airy são importantes na representação assintótica de funções especiais mais complicadas, surgindo como soluções de equações diferenciais de segunda ordem. Fórmulas práticas usuais para implementar numericamente essas funções e suas derivadas são apresentadas. Facilidades de cálculo podem ser obtidas disponibilizando os resultados numéricos dessas funções através de curvas e tabelas. Para uma descrição detalhada das propriedades dessas funções consulte ABRAMOWITZ e STEGUN (1964), LEBEDEV (1965), PRESS et al. (1992) e THOMPSON (1997).

7.1.1 DEFINIÇÃO

Considere a função $w(t)$ uma solução da equação diferencial linear de segunda ordem

$$w''(t) - tw(t) = 0, \forall t \quad (7.1)$$

, onde $w''(t) = d^2w(t)/dt^2$ denota a derivada segunda de $w(t)$ em relação ao argumento t .

Sejam as integrais de contorno de Airy, $w_1(t)$ e $w_2(t)$, os pares de soluções linearmente independentes da EQ. 7.1, tal que

$$w_1(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma_1} e^{(zt-z^3/3)} dz \quad (7.2)$$

$$w_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\Gamma_2} e^{(zt-z^3/3)} dz \quad (7.3)$$

, com Γ_1 e Γ_2 representando os percursos de integração no plano complexo Z , conforme ilustra a FIG. 7.1.

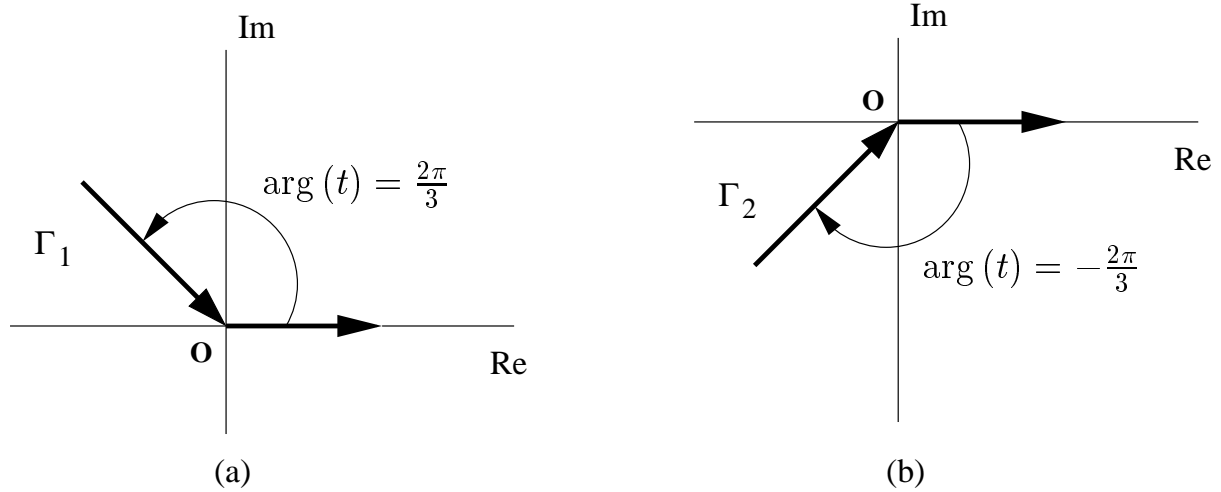


FIG. 7.1: Contornos de integração no plano complexo Z . (a) $\Gamma_1 : (\infty e^{j2\pi/3} \rightarrow \infty)$ e (b) $\Gamma_2 : (\infty e^{-j2\pi/3} \rightarrow \infty)$

Efetuada a operação de integração através dos contornos no plano complexo, obtém-se:

$$w_1(t) = \sqrt{\pi} [B_i(t) - jA_i(t)] \quad (7.4)$$

$$w_2(t) = \sqrt{\pi} [B_i(t) + jA_i(t)] \quad (7.5)$$

, onde $A_i(t)$ e $B_i(t)$ definem as funções de Airy.¹

As derivadas das integrais de Airy, $w_1'(t)$ e $w_2'(t)$, com relação a seus argumentos, também são usuais e expressas por

$$w_1'(t) = \sqrt{\pi} [B_i'(t) - jA_i'(t)] \quad (7.6)$$

$$w_2'(t) = \sqrt{\pi} [B_i'(t) + jA_i'(t)] \quad (7.7)$$

, com A_i' e B_i' denotando as derivadas das funções de Airy A_i e B_i , respectivamente. A seguir, são enunciadas as equações utilizadas para computar A_i , B_i e suas derivadas. As fórmulas analíticas dessas funções são definidas para argumentos z complexos ($z = x + jy$; x, y reais).

¹ Nota-se que $w_1(t)$ é o conjugado complexo de $w_2(t)$ Enquanto a notação de Fock emprega um fator de tempo e^{-jwt} , Wait utiliza o fator e^{jwt} . Portanto, as definições $w_1(t)$ e $w_2(t)$ de Fock correspondem, respectivamente, às definições $w_2(t)$ e $w_1(t)$ apresentadas neste trabalho.

7.1.2 CÁLCULO DE A_i E B_i

★ Séries de Potências ($|z| \leq 2$)

$$A_i(z) = c_1 f(z) - c_2 g(z) \quad (7.8)$$

$$B_i(z) = \sqrt{3} [c_1 f(z) + c_2 g(z)] \quad (7.9)$$

Onde:

c_1, c_2 - Constantes²

$$c_1 = 3^{-2/3} / \Gamma(2/3) = 0.355028053887817 \quad (7.10)$$

$$c_2 = 3^{-1/3} / \Gamma(1/3) = 0.258819403792807 \quad (7.11)$$

$f(z), g(z)$ - Funções auxiliares dadas pelas séries de potências:

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 + \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1 \cdot 4}{6!} z^6 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!} z^9 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \left(\frac{1}{3}\right)_k \frac{z^{3k}}{(3k)!} \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} g(z) &= z + \frac{2}{4!} z^4 + \frac{2 \cdot 5}{7!} z^7 + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{10!} z^{10} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 3^k \left(\frac{2}{3}\right)_k \frac{z^{3k+1}}{(3k+1)!} \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\left(\alpha + \frac{1}{3}\right)_0 = 1 \quad (7.14)$$

$$3^k \left(\alpha + \frac{1}{3}\right)_k = (3\alpha + 1)(3\alpha + 4) \cdots (3\alpha + 3k - 2) \quad (7.15)$$

(α arbitrário; $k = 1, 2, 3, \dots$)

² No valor atribuído a essas constantes, $\Gamma(x)$ denota a função Gamma de argumento x ($x \in \mathfrak{R}$). Por definição, $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{(x-1)} e^{-t} dt$

ou , de forma mais compacta,

$$c_1 f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{3k}}{3^{2k+2/3} k! \Gamma(k + 2/3)} \quad (7.16)$$

$$c_2 g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{3k+1}}{3^{2k+4/3} k! \Gamma(k + 4/3)} \quad (7.17)$$

★ Expansões Assintóticas ($|z| > 2$)

$$A_i(z) = \frac{e^{-\zeta}}{2\sqrt{\pi z^{1/2}}} D(\zeta) \quad (|\arg(z)| < \pi) \quad (7.18)$$

$$B_i(z) = \frac{e^{\zeta}}{\sqrt{\pi z^{1/2}}} E(\zeta) \quad (|\arg(z)| < \frac{\pi}{3}) \quad (7.19)$$

$$A_i(-z) = \frac{1}{\sqrt{\pi z^{1/2}}} [\text{sen}(\zeta + \pi/4) F(\zeta) - \text{cos}(\zeta + \pi/4) G(\zeta)] \quad (|\arg(z)| < \frac{2\pi}{3}) \quad (7.20)$$

$$B_i(-z) = \frac{1}{\sqrt{\pi z^{1/2}}} [\text{cos}(\zeta + \pi/4) F(\zeta) + \text{sen}(\zeta + \pi/4) G(\zeta)] \quad (|\arg(z)| < \frac{2\pi}{3}) \quad (7.21)$$

Onde:

$$\zeta = 2z^{3/2}/3 \quad (7.22)$$

D, E, F e G - Funções auxiliares dadas pelos somatórios:

$$D(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k / \zeta^k \quad (7.23)$$

$$E(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k / \zeta^k \quad (7.24)$$

$$F(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_{2k} / \zeta^{2k} \quad (7.25)$$

$$G(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_{2k+1} / \zeta^{2k+1} \quad (7.26)$$

$$c_0 = 1 \quad (7.27)$$

$$c_k = \frac{\Gamma(3k + 1/2)}{54^k k! \Gamma(k + 1/2)}, \quad k > 0 \quad (7.28)$$

7.1.3 CÁLCULO DE A'_i E B'_i

★ Séries de Potências ($|z| \leq 2$)

$$A'_i(z) = c_1 f'(z) - c_2 g'(z) \quad (7.29)$$

$$B'_i(z) = \sqrt{3} [c_1 f'(z) + c_2 g'(z)] \quad (7.30)$$

Onde:

c_1, c_2 - Constantes dadas pela EQ. 7.10 e EQ. 7.11, respectivamente,
 $f'(z), g'(z)$ - Funções auxiliares dadas pelas séries de potências:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \quad (7.31)$$

$$t_1 = z^3/2 \quad (7.32)$$

$$t_k/t_{k-1} = z^3/[(3k-1)(3k-3)] \quad (7.33)$$

$$g'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k \quad (7.34)$$

$$t_0 = 1 \quad (7.35)$$

$$t_k/t_{k-1} = z^3/[3k(3k-2)] \quad (7.36)$$

ou, de forma mais compacta,

$$c_1 f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{3k-1}}{3^{2k-1/3} (k-1)! \Gamma(k+2/3)} \quad (7.37)$$

$$c_2 g'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{3k}}{3^{2k+1/3} k! \Gamma(k+1/3)} \quad (7.38)$$

★ Expansões Assintóticas ($|z| > 2$)

$$A'_i(z) = -\frac{z^{1/4}e^{-\zeta}}{2\sqrt{\pi}}D_1(\zeta) \quad (|\arg(z)| < \pi) \quad (7.39)$$

$$B'_i(z) = \frac{z^{1/4}e^{\zeta}}{\sqrt{\pi}}E_1(\zeta) \quad (|\arg(z)| < \frac{\pi}{3}) \quad (7.40)$$

$$A'_i(-z) = -\frac{z^{1/4}}{\sqrt{\pi}}[\cos(\zeta + \pi/4)F_1(\zeta) + \operatorname{sen}(\zeta + \pi/4)G_1(\zeta)] \quad (|\arg(z)| < \frac{2\pi}{3}) \quad (7.41)$$

$$B'_i(-z) = \frac{z^{1/4}}{\sqrt{\pi}}[\operatorname{sen}(\zeta + \pi/4)F_1(\zeta) - \cos(\zeta + \pi/4)G_1(\zeta)] \quad (|\arg(z)| < \frac{2\pi}{3}) \quad (7.42)$$

Onde:

O parâmetro ζ é dado pela EQ. 7.22,

D_1 , E_1 , F_1 e G_1 - Funções auxiliares dadas pelos somatórios:

$$D_1(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k d_k / \zeta^k \quad (7.43)$$

$$E_1(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k / \zeta^k \quad (7.44)$$

$$F_1(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k d_{2k} / \zeta^{2k} \quad (7.45)$$

$$G_1(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k d_{2k+1} / \zeta^{2k+1} \quad (7.46)$$

$$d_0 = 1 \quad (7.47)$$

$$d_k = -\frac{6k+1}{6k-1}c_k, \quad k > 0 \quad (7.48)$$

, sendo c_k dado pela EQ. 7.28.

7.1.4 RAÍZES DAS FUNÇÕES DE AIRY

O aspecto mais importante nas aplicações das funções de Airy e suas derivadas consiste na determinação de suas raízes. Dada a equação diferencial

$$w'(t) - qw(t) = 0, \quad (7.49)$$

as soluções $t = t_s$ dessa equação dependem do valor de q , que em geral é um parâmetro complexo. Se $q = 0$, as raízes $t_s^0 = |t_s^0| e^{-j\pi/3}$ serão as soluções de

$$w'(t) = 0, \quad (7.50)$$

enquanto que, se $q = \infty$, as raízes $t_s^\infty = |t_s^\infty| e^{-j\pi/3}$ serão as soluções de

$$w(t) = 0 \quad (7.51)$$

Os módulos das primeiras cinco raízes t_s^0 e t_s^∞ são dados na TAB. 7.1. Para $s > 5$, resultados precisos dessas raízes podem ser obtidos através das relações assintóticas

$$|t_s^0| \simeq \left[\frac{3\pi}{2} \left(s - 3/4 \right) \right]^{2/3} \quad (7.52)$$

$$|t_s^\infty| \simeq \left[\frac{3\pi}{2} \left(s - 1/4 \right) \right]^{2/3} \quad (7.53)$$

TAB. 7.1: $|t_s^0|$ e $|t_s^\infty|$ ($s \leq 5$).

s	$ t_s^0 $	$ t_s^\infty $
1	1.0187929716	2.3381074105
2	3.2481975822	4.0879494441
3	4.8200992112	5.5205598281
4	6.1633073556	6.7867080901
5	7.3721772550	7.9441335871

Para o cálculo das raízes considerando outros valores finitos de q , tomamos a derivada em relação a q da EQ. 7.49, ou seja,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{dw(t)}{dt} - qw(t) \right] = w''(t) \frac{dt}{dq} - w(t) - qw'(t) \frac{dt}{dq} = 0 \quad (7.54)$$

Visto que $w''(t) = tw(t)$ e $w'(t) = qw(t)$, as raízes $t_s(q)$ irão satisfazer a seguinte equação diferencial

$$\frac{d[t_s(q)]}{dq} = \frac{1}{t_s(q) - q^2} \quad (7.55)$$

A EQ. 7.55 pode ser resolvida aplicando duas definições similares. Em uma dessas definições, as soluções $t_s(q)$ podem ser expandidas em série de Taylor em $q = 0$, conforme o somatório

$$t_s(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n, \quad (7.56)$$

com a condição inicial $a_0 = t_s^0$ em $q = 0$ e

$$a_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n[t_s(q)]}{dq^n} \right|_{q=0} \quad (7.57)$$

, obtendo-se a série de potências:

$$t_s(q) = t_s^0 + \frac{1}{t_s^0} q - \frac{1}{2(t_s^0)^3} q^2 + \left(\frac{1}{3(t_s^0)^2} + \frac{1}{2(t_s^0)^5} \right) q^3 - \left(\frac{7}{12(t_s^0)^4} + \frac{5}{8(t_s^0)^7} \right) q^4 +$$

+ outros termos em potências ascendentes de q

$$(|q| < |\sqrt{t_s^0}|)^3 \quad (7.58)$$

Por outro lado, uma outra definição similar estabelece que as raízes $t_s(q)$ serão expandidas em série de Taylor em $Q = q^{-1} = 0$, conforme o somatório

$$t_s(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q^n, \quad (7.59)$$

dada a condição inicial $a_0 = t_s^\infty$ em $Q = 0$ ($q = \infty$) e

$$a_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n[t_s(q)]}{dQ^n} \right|_{Q=0 (q=\infty)} \quad (7.60)$$

Desde que, a EQ. 7.55 para $Q = q^{-1}$ transforma-se na nova equação diferencial

$$\frac{d[t_s(q)]}{dQ} = \frac{1}{1 - Q^2 t_s(q)} \quad (7.61)$$

³ Intervalo de convergência da série.

De forma similar, obtém-se a série de potências:

$$t_s(q) = t_s^\infty + \frac{1}{q} + \frac{t_s^\infty}{3q^3} + \frac{1}{4q^4} + \frac{(t_s^\infty)^2}{5q^5} + \frac{7t_s^\infty}{18q^6} + \left(\frac{(t_s^\infty)^3}{7} + \frac{5}{28} \right) \frac{1}{q^7} +$$

+ outros termos em potências descendentes de q

$$(|q| > |\sqrt{t_s}|) \quad (7.62)$$

Cada uma das séries de potências obtidas na EQ. 7.58 e EQ. 7.62 constituem as soluções das equações diferenciais equivalentes EQ. 7.55 e EQ. 7.61. No entanto, neste trabalho foi implementado um método prático para um cálculo mais preciso das raízes $t_s(q)$, proposto por KUO (1965). Segundo o método, dado o valor de q , com $|q| \leq 1$, é formada uma sequência no plano complexo q de $R + 1$ pontos

$$0 = q_0, q_1, q_2, \dots, q_R = q,$$

igualmente espaçados no segmento de reta unindo a origem ao valor de q . Partindo da solução conhecida $t = t_s^0$ em $q_0 = 0$, as soluções em q_1, q_2, \dots, q_R serão calculadas pelo uso sucessivo da fórmula de quarta ordem de Runge-Kutta (KUO, 1965):

$$t_s(q_{j+1}) = t_s(q_j) + \frac{\Delta q}{6}(p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4) \quad (7.63)$$

Onde:

$$p_1 = f(q_j, t_s(q_j)) \quad (7.64)$$

$$p_2 = f\left(q_j + \frac{1}{2}\Delta q, t_s(q_j) + \frac{1}{2}p_1\right) \quad (7.65)$$

$$p_3 = f\left(q_j + \frac{1}{2}\Delta q, t_s(q_j) + \frac{1}{2}p_2\right) \quad (7.66)$$

$$p_4 = f(q_j + \Delta q, t_s(q_j) + p_3) \quad (7.67)$$

$$\Delta q = q_r - q_{r-1} \quad (7.68)$$

$$f(q, t) = \frac{1}{t - q^2} \quad (7.69)$$

, com $j = (0, 1, 2, \dots, R)$ ⁴.

⁴ O inteiro R foi determinado tal que $|\Delta q| \sim 10$. Quanto menor o valor escolhido de $|\Delta q|$, maior o número de pontos obtidos e o tempo de cálculo das raízes $t_s(q)$. No entanto, melhor será a precisão dos resultados. Para $|\Delta q| \sim 10$, obteve-se uma precisão relativamente razoável.

Dado q , com $|q| > 1$, supõe-se $Q = q^{-1}$ e a equação diferencial EQ. 7.55 assumirá a forma da EQ. 7.61, com a condição inicial $t = t_s^\infty$ em $Q = 0$ ($q = \infty$). De maneira similar ao caso $|q| \leq 1$, toma-se no plano complexo Q a sequência de $R + 1$ pontos

$$0 = Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_R = Q = \frac{1}{q},$$

igualmente espaçados no segmento formado da origem ao valor de q . Supondo a condição inicial $t = t_s^\infty$ em $Q_0 = 0$, as soluções em Q_1, Q_2, \dots, Q_R serão calculadas pelo uso sucessivo da mesma formulação de Runge-Kutta apresentada anteriormente⁵.

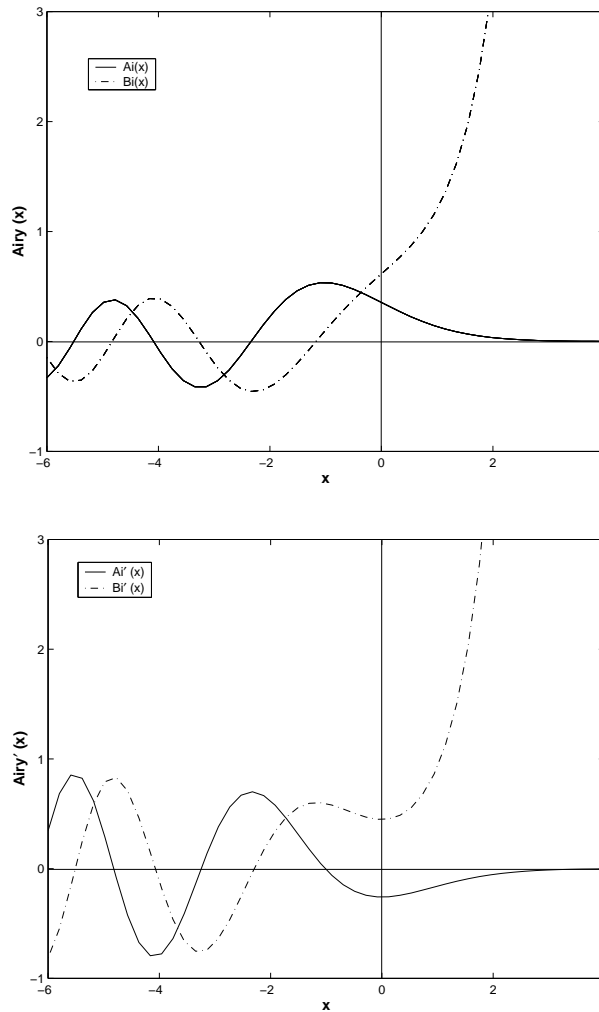


FIG. 7.2: Funções de Airy e suas derivadas.
(a) A_i e B_i (b) A'_i e B'_i

⁵ As expressões apropriadas são obtidas substituindo q por Q e $f(q, t)$ por $f(Q, t) = 1/(1 - Q^2t)$.

TAB. 7.2: Funções de Airy Ai e Bi .

x	$Ai(x)$	$Bi(x)$	$Ai(-x)$	$Bi(-x)$	x	$Ai(x)$	$Bi(x)$	$Ai(-x)$	$Bi(-x)$
0.0	3.55028e-001	6.14927e-001	3.55028e-001	6.14927e-001	5.0	1.08344e-004	6.57792e+002	3.50761e-001	-1.38369e-001
0.1	3.29203e-001	6.59862e-001	3.80849e-001	5.69999e-001	5.1	8.61324e-005	8.19210e+002	3.09526e-001	-2.12089e-001
0.2	3.03703e-001	7.05464e-001	4.06284e-001	5.24509e-001	5.2	6.83286e-005	1.02262e+003	2.52580e-001	-2.75027e-001
0.3	2.78806e-001	7.52486e-001	4.30903e-001	4.77978e-001	5.3	5.40905e-005	1.27947e+003	1.82568e-001	-3.23716e-001
0.4	2.54742e-001	8.01773e-001	4.54226e-001	4.30021e-001	5.4	4.27299e-005	1.60448e+003	1.02935e-001	-3.55317e-001
0.5	2.31694e-001	8.54277e-001	4.75728e-001	3.80353e-001	5.5	3.36853e-005	2.01658e+003	1.77815e-002	-3.67813e-001
0.6	2.09800e-001	9.11063e-001	4.94850e-001	3.28792e-001	5.6	2.65006e-005	2.54018e+003	-6.83307e-002	-3.60172e-001
0.7	1.89162e-001	9.73329e-001	5.11000e-001	2.75268e-001	5.7	2.08058e-005	3.20680e+003	-1.50620e-001	-3.32458e-001
0.8	1.69846e-001	1.04242e+000	5.23574e-001	2.19828e-001	5.8	1.63018e-005	4.05720e+003	-2.24352e-001	-2.85890e-001
0.9	1.51887e-001	1.11987e+000	5.31960e-001	1.62639e-001	5.9	1.27471e-005	5.14422e+003	-2.85123e-001	-2.22830e-001
1.0	1.35292e-001	1.20742e+000	5.35561e-001	1.03997e-001	6.0	9.94769e-006	6.53645e+003	-3.29145e-001	-1.46698e-001
1.1	1.20049e-001	1.30707e+000	5.33811e-001	4.43266e-002	6.1	7.74773e-006	8.32309e+003	-3.53512e-001	-6.18225e-002
1.2	1.06126e-001	1.42113e+000	5.26194e-001	-1.58214e-002	6.2	6.02246e-006	1.06204e+004	-3.56421e-001	2.67908e-002
1.3	9.34747e-002	1.55228e+000	5.12272e-001	-7.57696e-002	6.3	4.67226e-006	1.35800e+004	-3.37348e-001	1.13737e-001
1.4	8.20380e-002	1.70366e+000	4.91700e-001	-1.34724e-001	6.4	3.61776e-006	1.74001e+004	-2.97138e-001	1.93541e-001
1.5	7.17495e-002	1.87894e+000	4.64257e-001	-1.91785e-001	6.5	2.79588e-006	2.23406e+004	-2.38020e-001	2.61013e-001
1.6	6.25369e-002	2.08247e+000	4.29863e-001	-2.45963e-001	6.6	2.15660e-006	2.87420e+004	-1.63526e-001	3.11600e-001
1.7	5.43248e-002	2.31941e+000	3.88607e-001	-2.96203e-001	6.7	1.66034e-006	3.70521e+004	-7.83125e-002	3.41728e-001
1.8	4.70362e-002	2.59587e+000	3.40762e-001	-3.41406e-001	6.8	1.27588e-006	4.78602e+004	1.21045e-002	3.49084e-001
1.9	4.05944e-002	2.91918e+000	2.86800e-001	-3.80466e-001	6.9	9.78611e-007	6.19433e+004	1.01688e-001	3.32838e-001
2.0	3.49241e-002	3.29809e+000	2.27407e-001	-4.12303e-001	7.0	7.49213e-007	8.03278e+004	1.84281e-001	2.93762e-001
2.1	2.99526e-002	3.74315e+000	1.63485e-001	-4.35902e-001	7.1	5.72532e-007	1.04372e+005	2.54036e-001	2.34251e-001
2.2	2.56104e-002	4.26704e+000	9.61454e-002	-4.50361e-001	7.2	4.36717e-007	1.35874e+005	3.05852e-001	1.58217e-001
2.3	2.18320e-002	4.88506e+000	2.67063e-002	-4.54928e-001	7.3	3.32514e-007	1.77225e+005	3.35770e-001	7.08741e-002
2.4	1.85561e-002	5.61577e+000	-4.33341e-002	-4.49052e-001	7.4	2.52717e-007	2.31600e+005	3.41324e-001	-2.15965e-002
2.5	1.57259e-002	6.48166e+000	-1.12325e-001	-4.32422e-001	7.5	1.91726e-007	3.03230e+005	3.21776e-001	-1.12463e-001
2.6	1.32893e-002	7.51009e+000	-1.78502e-001	-4.05008e-001	7.6	1.45195e-007	3.97758e+005	2.78250e-001	-1.94934e-001
2.7	1.11985e-002	8.73439e+000	-2.40038e-001	-3.67092e-001	7.7	1.09762e-007	5.22726e+005	2.13720e-001	-2.62670e-001
2.8	9.41051e-003	1.01953e+001	-2.95098e-001	-3.19294e-001	7.8	8.28296e-008	6.88226e+005	1.32852e-001	-3.10301e-001
2.9	7.88631e-003	1.19426e+001	-3.41905e-001	-2.62585e-001	7.9	6.23964e-008	9.07791e+005	4.17019e-002	-3.33879e-001
3.0	6.59114e-003	1.40373e+001	-3.78814e-001	-1.98290e-001	8.0	4.69221e-008	1.19959e+006	-5.27051e-002	-3.31252e-001
3.1	5.49400e-003	1.65547e+001	-4.04382e-001	-1.28072e-001	8.1	3.52244e-008	1.58805e+006	-1.42908e-001	-3.02303e-001
3.2	4.56744e-003	1.95870e+001	-4.17443e-001	-5.39058e-002	8.2	2.63974e-008	2.10608e+006	-2.21599e-001	-2.49040e-001
3.3	3.78729e-003	2.32483e+001	-4.17181e-001	2.19680e-002	8.3	1.97486e-008	2.79810e+006	-2.82232e-001	-1.75506e-001
3.4	3.13234e-003	2.76796e+001	-4.03190e-001	9.71062e-002	8.4	1.47494e-008	3.72411e+006	-3.19592e-001	-8.75180e-002
3.5	2.58410e-003	3.30555e+001	-3.75534e-001	1.68940e-001	8.5	1.09970e-008	4.96532e+006	-3.30290e-001	7.75444e-003
3.6	2.12648e-003	3.95927e+001	-3.34777e-001	2.34866e-001	8.6	8.18551e-009	6.63182e+006	-3.13112e-001	1.02356e-001
3.7	1.74557e-003	4.75607e+001	-2.82013e-001	2.92353e-001	8.7	6.08261e-009	8.87308e+006	-2.69205e-001	1.88204e-001
3.8	1.42939e-003	5.72954e+001	-2.18856e-001	3.39046e-001	8.8	4.51244e-009	1.18923e+007	-2.02054e-001	2.57782e-001
3.9	1.16765e-003	6.92160e+001	-1.47420e-001	3.72891e-001	8.9	3.34206e-009	1.59664e+007	-1.17266e-001	3.04832e-001
4.0	9.51564e-004	8.38471e+001	-7.02655e-002	3.92235e-001	9.0	2.47117e-009	2.14729e+007	-2.21337e-002	3.24947e-001
4.1	7.73630e-004	1.01846e+002	9.67698e-003	3.95940e-001	9.1	1.82423e-009	2.89275e+007	7.49599e-002	3.16035e-001
4.2	6.27496e-004	1.24038e+002	8.92108e-002	3.83467e-001	9.2	1.34446e-009	3.90360e+007	1.65268e-001	2.78584e-001
4.3	5.07787e-004	1.51462e+002	1.64998e-001	3.54949e-001	9.3	9.89269e-010	5.27654e+007	2.40474e-001	2.15708e-001
4.4	4.09974e-004	1.85428e+002	2.33703e-001	3.11229e-001	9.4	7.26741e-010	7.14428e+007	2.93478e-001	1.32939e-001
4.5	3.30250e-004	2.27588e+002	2.92153e-001	2.53873e-001	9.5	5.33026e-010	9.68923e+007	3.19103e-001	3.77854e-002
4.6	2.65432e-004	2.80036e+002	3.37496e-001	1.85146e-001	9.6	3.90323e-010	1.31625e+008	3.14652e-001	-6.09129e-002
4.7	2.12861e-004	3.45426e+002	3.67367e-001	1.07947e-001	9.7	2.85372e-010	1.79101e+008	2.80238e-001	-1.53794e-001
4.8	1.70326e-004	4.27126e+002	3.80037e-001	2.57078e-002	9.8	2.08310e-010	2.44101e+008	2.18867e-001	-2.31863e-001
4.9	1.35992e-004	5.29425e+002	3.74536e-001	-5.77466e-002	9.9	1.51820e-010	3.33231e+008	1.36235e-001	-2.87384e-001
5.0	1.08344e-004	6.57792e+002	3.50761e-001	-1.38369e-001	10.0	1.10475e-010	4.55641e+008	4.02412e-002	-3.14680e-001

Matlab :

$$\begin{aligned}
 A_i(x) &= \text{airy}(0, x) = \text{airy}(x) \\
 A_i(-x) &= \text{airy}(0, -x) = \text{airy}(-x) \\
 B_i(x) &= \text{airy}(2, x) \\
 B_i(-x) &= \text{airy}(2, -x)
 \end{aligned}$$

TAB. 7.3: Derivadas A'_i e B'_i das Funções de Airy.

x	Ai'(x)	Bi'(x)	Ai'(-x)	Bi'(-x)	x	Ai'(x)	Bi'(x)	Ai'(-x)	Bi'(-x)
0.0	-2.58819e-001	4.48288e-001	-2.58819e-001	4.48288e-001	5.0	-2.47414e-004	1.43582e+003	3.27193e-001	7.78412e-001
0.1	-2.57130e-001	4.51513e-001	-2.56958e-001	4.51213e-001	5.1	-1.98533e-004	1.80733e+003	4.94586e-001	6.89485e-001
0.2	-2.52405e-001	4.61789e-001	-2.51033e-001	4.59385e-001	5.2	-1.58943e-004	2.27975e+003	6.39905e-001	5.63459e-001
0.3	-2.45146e-001	4.80049e-001	-2.40545e-001	4.71880e-001	5.3	-1.26960e-004	2.88163e+003	7.54575e-001	4.05557e-001
0.4	-2.35832e-001	5.07282e-001	-2.25031e-001	4.87735e-001	5.4	-1.01185e-004	3.64993e+003	8.31223e-001	2.23075e-001
0.5	-2.24911e-001	5.44573e-001	-2.04082e-001	5.05934e-001	5.5	-8.04634e-005	4.63255e+003	8.64197e-001	2.51116e-002
0.6	-2.12793e-001	5.93144e-001	-1.77363e-001	5.25401e-001	5.6	-6.38446e-005	5.89167e+003	8.50033e-001	-1.77838e-001
0.7	-1.99851e-001	6.54406e-001	-1.44641e-001	5.44999e-001	5.7	-5.05478e-005	7.50815e+003	7.87817e-001	-3.74409e-001
0.8	-1.86413e-001	7.30007e-001	-1.05810e-001	5.63531e-001	5.8	-3.99340e-005	9.58731e+003	6.79432e-001	-5.53002e-001
0.9	-1.72764e-001	8.21904e-001	-6.09110e-002	5.79749e-001	5.9	-3.14813e-005	1.22666e+004	5.29629e-001	-7.02480e-001
1.0	-1.59147e-001	9.32436e-001	-1.01606e-002	5.92376e-001	6.0	-2.47652e-005	1.57256e+004	3.45935e-001	-8.12899e-001
1.1	-1.45766e-001	1.06441e+000	4.60292e-002	6.00120e-001	6.1	-1.94410e-005	2.01996e+004	1.38364e-001	-8.76225e-001
1.2	-1.32785e-001	1.22123e+000	1.07032e-001	6.01710e-001	6.2	-1.52297e-005	2.59969e+004	-8.10686e-002	-8.86979e-001
1.3	-1.20334e-001	1.40699e+000	1.71992e-001	5.95930e-001	6.3	-1.19060e-005	3.35228e+004	-2.98992e-001	-8.42761e-001
1.4	-1.08510e-001	1.62664e+000	2.39819e-001	5.81656e-001	6.4	-9.28860e-006	4.33105e+004	-5.01480e-001	-7.44614e-001
1.5	-9.73820e-002	1.88621e+000	3.09187e-001	5.57908e-001	6.5	-7.23193e-006	5.60625e+004	-6.74952e-001	-5.97171e-001
1.6	-8.69959e-002	2.19300e+000	3.78542e-001	5.23894e-001	6.6	-5.61932e-006	7.27067e+004	-8.07119e-001	-4.08567e-001
1.7	-7.73749e-002	2.55385e+000	4.46125e-001	4.79061e-001	6.7	-4.35758e-006	9.44697e+004	-8.87908e-001	-1.90099e-001
1.8	-6.85248e-002	2.98554e+000	5.09998e-001	4.23151e-001	6.8	-3.37246e-006	1.22976e+005	-9.10304e-001	4.43768e-002
1.9	-6.04368e-002	3.49517e+000	5.68092e-001	3.56243e-001	6.9	-2.60493e-006	1.60383e+005	-8.71031e-001	2.79264e-001
2.0	-5.30904e-002	4.10068e+000	6.18259e-001	2.78795e-001	7.0	-2.00815e-006	2.09553e+005	-7.71008e-001	4.98245e-001
2.1	-4.64560e-002	4.82155e+000	6.58341e-001	1.91686e-001	7.1	-1.54510e-006	2.74299e+005	-6.15529e-001	6.85421e-001
2.2	-4.04973e-002	5.68154e+000	6.86245e-001	9.62292e-002	7.2	-1.18654e-006	3.59705e+005	-4.14124e-001	8.26506e-001
2.3	-3.51731e-002	6.70974e+000	7.00034e-001	-5.81106e-003	7.3	-9.09454e-007	4.72557e+005	-1.80096e-001	9.09984e-001
2.4	-3.04395e-002	7.94179e+000	6.98018e-001	-1.12232e-001	7.4	-6.95756e-007	6.21932e+005	7.02763e-002	9.28128e-001
2.5	-2.62509e-002	9.42142e+000	6.78853e-001	-2.20420e-001	7.5	-5.31271e-007	8.19988e+005	3.18810e-001	8.77802e-001
2.6	-2.25613e-002	1.12024e+001	6.41638e-001	-3.27397e-001	7.6	-4.04917e-007	1.08304e+006	5.46719e-001	7.60955e-001
2.7	-1.93256e-002	1.33511e+001	5.86007e-001	-4.29895e-001	7.7	-3.08042e-007	1.43300e+006	7.36052e-001	5.84740e-001
2.8	-1.64998e-002	1.59492e+001	5.12211e-001	-5.24450e-001	7.8	-2.33914e-007	1.89937e+006	8.71155e-001	3.61229e-001
2.9	-1.40421e-002	1.90978e+001	4.21183e-001	-6.07518e-001	7.9	-1.77300e-007	2.52192e+006	9.40043e-001	1.06702e-001
3.0	-1.19130e-002	2.29222e+001	3.14584e-001	-6.75611e-001	8.0	-1.34144e-007	3.35434e+006	9.35561e-001	-1.59450e-001
3.1	-1.00756e-002	2.75778e+001	1.94820e-001	-7.25450e-001	8.1	-1.01310e-007	4.46922e+006	8.56219e-001	-4.16157e-001
3.2	-8.49582e-003	3.32577e+001	6.50311e-002	-7.54125e-001	8.2	-7.63753e-008	5.96487e+006	7.06599e-001	-6.42323e-001
3.3	-7.14249e-003	4.02027e+001	-7.09636e-002	-7.59265e-001	8.3	-5.74754e-008	7.97462e+006	4.97277e-001	-8.18600e-001
3.4	-5.98722e-003	4.87131e+001	-2.08749e-001	-7.39202e-001	8.4	-4.31760e-008	1.06796e+007	2.44221e-001	-9.29110e-001
3.5	-5.00441e-003	5.91643e+001	-3.43443e-001	-6.93116e-001	8.5	-3.23773e-008	1.43263e+007	-3.23133e-002	-9.62969e-001
3.6	-4.17113e-003	7.20268e+001	-4.69864e-001	-6.21173e-001	8.6	-2.42370e-008	1.92504e+007	-3.09330e-001	-9.15479e-001
3.7	-3.46694e-003	8.78907e+001	-5.82728e-001	-5.24614e-001	8.7	-1.81119e-008	2.59102e+007	-5.62977e-001	-7.88826e-001
3.8	-2.87375e-003	1.07498e+002	-6.76883e-001	-4.05816e-001	8.8	-1.35113e-008	3.49319e+007	-7.70613e-001	-5.92214e-001
3.9	-2.37563e-003	1.31784e+002	-7.47558e-001	-2.68298e-001	8.9	-1.00621e-008	4.71727e+007	-9.12893e-001	-3.41365e-001
4.0	-1.95864e-003	1.61927e+002	-7.90629e-001	-1.16671e-001	9.0	-7.48064e-009	6.38075e+007	-9.75664e-001	-5.74005e-002
4.1	-1.61061e-003	1.99418e+002	-8.02873e-001	4.34787e-002	9.1	-5.55204e-009	8.64494e+007	-9.51497e-001	2.34844e-001
4.2	-1.32100e-003	2.46146e+002	-7.82216e-001	2.05757e-001	9.2	-4.11371e-009	1.17316e+008	-8.40671e-001	5.08944e-001
4.3	-1.08070e-003	3.04506e+002	-7.27941e-001	3.63205e-001	9.3	-3.04290e-009	1.59461e+008	-6.51492e-001	7.39280e-001
4.4	-8.81892e-004	3.77543e+002	-6.40850e-001	5.08589e-001	9.4	-2.24708e-009	2.17096e+008	-3.99862e-001	9.03485e-001
4.5	-7.17867e-004	4.69135e+002	-5.23363e-001	6.34745e-001	9.5	-1.65664e-009	2.96035e+008	-1.08095e-001	9.84714e-001
4.6	-5.82914e-004	5.84227e+002	-3.79534e-001	7.34944e-001	9.6	-1.21933e-009	4.04320e+008	1.96950e-001	9.73499e-001
4.7	-4.72184e-004	7.29141e+002	-2.14990e-001	8.03289e-001	9.7	-8.95995e-010	5.53090e+008	4.86286e-001	8.68984e-001
4.8	-3.81571e-004	9.11967e+002	-3.67651e-002	8.35090e-001	9.8	-6.57325e-010	7.57795e+008	7.31545e-001	6.79368e-001
4.9	-3.07616e-004	1.14308e+003	1.46957e-001	8.27219e-001	9.9	-4.81450e-010	1.03989e+009	9.07813e-001	4.21472e-001
5.0	-2.47414e-004	1.43582e+003	3.27193e-001	7.78412e-001	10.0	-3.52063e-010	1.42924e+009	9.96265e-001	1.19414e-001

Matlab :

$$\begin{aligned}
 A'_i(x) &= \text{airy}(1, x) = \text{airy}(x) \\
 A'_i(-x) &= \text{airy}(1, -x) = \text{airy}(-x) \\
 B'_i(x) &= \text{airy}(3, x) \\
 B'_i(-x) &= \text{airy}(3, -x)
 \end{aligned}$$

7.2 APÊNDICE 2: PROPRIEDADES ELÉTRICAS DO SOLO

Observando as formulações matemáticas apresentadas pela teoria da difração sobre a geometria esférica da terra, verifica-se que os cálculos das intensidades de campo e atenuação são afetados por inúmeros fatores, incluindo a frequência de operação, a distância do enlace, as alturas das antenas, a curvatura da terra, a presença de obstáculos, a polarização e as características elétricas do solo. Entretanto, para frequências superiores a 30 MHz BULLINGTON (1946) atestou em alguns de seus trabalhos publicados que é possível introduzir simplificações consideráveis, tal que o cálculo da atenuação pode ser feito independentemente da polarização e das características elétricas do solo. Neste apêndice, esta aproximação é discutida através do parâmetro q da solução de Fock⁶ e analisa-se o efeito da condutividade dos diferentes tipos de solo na variação deste fator q .

7.2.1 A CONDUTIVIDADE DO SOLO

A condutividade do solo influi diretamente no cálculo do fator q . Em função do tipo de polarização e características elétricas do solo, reproduz-se a seguir as expressões desse parâmetro q , onde r_0 representa o raio equivalente da terra (a_e)⁷ ou o raio de curvatura no topo do obstáculo (r).

$$q = -j \left(\frac{k_0 r_0}{2} \right)^{1/3} \frac{k_0^2}{k_1^2} \sqrt{\frac{k_1^2}{k_0^2} - 1} \quad (\text{PV}) \quad (7.70)$$

$$q = -j \left(\frac{k_0 r_0}{2} \right)^{1/3} \sqrt{\frac{k_1^2}{k_0^2} - 1} \quad (\text{PH}) \quad (7.71)$$

Onde:

$$k_0 = 2\pi/\lambda \quad (7.72)$$

$$\lambda = 300/f(\text{MHz}) \quad (\text{m}) \quad (7.73)$$

⁶ Um desenvolvimento similar pode ser feito com o parâmetro δ da solução de Van der Pol e Bremmer.

⁷ Nos enlaces em visibilidade, a antena transmissora deve ser ligada à antena receptora por uma linha de visada direta. Em outras palavras, a antena transmissora deve visar opticamente a antena receptora. No entanto, em condições normais, o índice de refração na troposfera decresce com a altura, provocando o encurvamento das ondas de rádio, de modo a projetar o ponto de recepção para além da linha óptica de visada direta. Para simplificar a geometria do problema da propagação em visibilidade, considera-se o raio da terra aumentado, de tal forma que o feixe possa ser representado por uma linha reta ligando as antenas transmissora e receptora. Surge, assim, o conceito de raio equivalente (a_e), obtido pela multiplicação do raio real terrestre (a) por um fator κ .

$$k_1 = k_0 \sqrt{\varepsilon_r - j 60 \sigma \lambda} \quad (7.74)$$

σ – Condutividade do solo (Siemens/m)

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \quad (\text{Permissividade elétrica relativa do solo}) \quad (7.75)$$

A TAB. 7.4 apresenta os valores medidos para as constantes elétricas⁸ dos vários tipos de solo do relevo terrestre, o que permite calcular o valor do parâmetro q para relativamente todas as situações que ocorrem na prática.

TAB. 7.4: Constantes elétricas do solo

TIPO DE SOLO	CONDUTIVIDADE ($\sigma \rightarrow S/m$)	PERMISSIVIDADE (ε_r)
Pobre	0.001	4 a 5
Moderado	0.003	4
Regular	0.01	15
Médio	0.005 a 0.03	10 a 15
Bom	0.01 a 0.02	4 a 30
Seco	0.00001 a 0.001	2 a 5
Terra	0.002	15
Deserto	0.01	3
Plano, Úmido, Região Costeira	0.01 a 0.02	4 a 30
Solo Arenoso e Seco	0.001	10
Terra Pastoral	0.005	15
Colinas Pastorais - Solo Rico	0.003 a 0.01	14 a 20
Colinas Médias Pastorais e Florestas	0.004 a 0.006	13
Solo Fértil	0.002	10
Terra Rica para Agricultura	0.01	15
Terras Rochosas	0.002	10 a 15
Solo Altamente Úmido	0.005 a 0.02	30
Solo Molhado	0.001 a 0.1	5 a 30
Solo Pantanoso	0.1	30
Solo Pantanoso, Plano, Floresta Densa	0.0075	12
Solo Pantanoso, Plano, Floresta	0.008	12
Colinas Baixas com Solo Rico S/ Floresta	0.01 a 0.02	4 a 30
Montanhoso com Colinas até 1000 metros	0.001	5
Industriais Urbanas - Média Atenuação	0.001	5
Industriais Urbanas - Máxima Atenuação	0.0004	3
Industriais Urbanas	0.0001	3
Água Fresca	0.001 a 0.01	80 a 81
Água Fresca (10° até 100 MHz)	0.001 a 0.01	84
Água Fresca (20° até 100 MHz)	0.001 a 0.01	80
Água do Mar	3.0 a 5.0	80 a 81
Água do Mar (10° até 1 GHz)	4.0 a 5.0	80
Água do Mar (20° até 1 GHz)	4.0 a 5.0	73
Gelo do Mar	0.001	4
Gelo Polar	0.000025	3
Calota Polar	0.0001	1
Terra Ártica	0.0005	3 a 5

Fonte: Maley, S. W., *A Survey Of Measurements Of The Electric Constants Of The Ground*, In **Geophysics Trans. IRE**, AP-8, Vol. 3, pp. 366-369, 1963.

⁸ Permissividade elétrica relativa e condutividade em Siemens/m.

Para condutores perfeitos ($\sigma = \infty$) tem-se $q = 0$ para polarização vertical e $q = \infty$ para polarização horizontal. Este comportamento é modificado quando a condutividade é finita, havendo situações em que as duas polarizações apresentam praticamente o mesmo resultado. Exemplificando numericamente, a TAB. 7.5 mostra a variação do fator q para $r_0 = 8500$ Km ($\kappa = a_e/a = 4/3$)⁹ e em função da frequência de operação, da polarização e das constantes elétricas do solo.

TAB. 7.5: Variação do parâmetro q

POLARIZAÇÃO	TIPO DE SOLO	FREQUÊNCIA (MHz)				
		30	100	300	1000	3000
Vertical	Água do Mar	1.97-j2.04	5.13-j5.74	10.95-j15.26	15.24-j40.09	10.05-j69.33
	Água Doce	0.06-j15.41	0.03-j23.03	0.01-j33.21	-j49.61	-j71.55
	Solo Bom	4.41-j23.65	2.13-j37.02	1.03-j53.62	0.46-j80.14	0.22-j115.6
	Solo Médio	9.54-j37.94	4.90-j61.59	2.38-j89.57	1.07-j113.9	0.52-j193.2
	Solo Seco	3.01-j59.92	1.35-j89.72	0.65-j129.4	0.29-j193.3	0.14-j278.8
Horizontal	Água do Mar	-4727-j4886	-3722-j4153	-2785-j3849	-1667-j4304	-859-j5787
	Água Doce	-4.68-j1233	2.10-j1824	-1.0-j2656	-0.45-j3968	-0.22-j5723
	Solo Bom	-151.5-j762.3	-69.14-j1118	-33.29-j1609	-14.92-j2404	-7.17-j3467
	Solo Médio	-132.2-j436.7	-61.87-j624.8	-29.87-j897.2	-13.39-j1339	-6.44-j1931
	Solo Seco	-23.91-j241.5	-10.76-j359.1	-5.18-j517.7	-2.32-j773.3	-1.12-j1115

Fonte: ASSIS, M. S., *Aplicações da Teoria Matemática da Difração*, Série CETUC, Caderno No. 32, 1979, RJ.

- ★ Água do Mar: $\sigma = 4$ S/m e $\varepsilon_r = 80$
- ★ Água Doce: $\sigma = 1$ S/m e $\varepsilon_r = 80$
- ★ Solo Bom: $\sigma = 2 \times 10^{-2}$ S/m e $\varepsilon_r = 30$
- ★ Solo Médio: $\sigma = 10^{-2}$ S/m e $\varepsilon_r = 10$
- ★ Solo Seco: $\sigma = 10^{-3}$ S/m e $\varepsilon_r = 4$

7.2.2 CONSIDERAÇÕES PRÁTICAS

Nesta seção, são discutidas algumas aproximações aplicáveis ao fator q e, conseqüentemente, à intensidade de campo dada pela série dos resíduos e função deste parâmetro. Observando a TAB. 7.5, verifica-se que com polarização horizontal e frequências acima de 30 MHz, independentemente do tipo de terreno, é possível supor $|q| \gg 1$. Para polarização vertical, a situação é análoga, com exceção da propagação sobre a água do mar, onde tal aproximação somente é válida para frequências superiores a 100 MHz.

⁹ Considerando o raio real da terra $a = 6375$ Km e um fator $\kappa = 4/3$, obtem-se o raio equivalente terrestre $a_e = 8500$ Km. Este valor de $\kappa = 4/3$ ocorre para a maioria dos casos encontrados na prática e apenas fenômenos atmosféricos pouco ocasionais poderão modificar o valor de κ .

Admitindo $|q| \gg 1$, as expressões da intensidade de campo descritas pela série dos resíduos podem ser simplificadas e se tornam independentes da polarização e das características elétricas do solo. Portanto, pela formulação de Fock

$$\frac{E}{E_0} = -e^{-j\pi/4} 2\sqrt{\pi x} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{-j x t_s}}{q^2(1 - t_s/q^2)} \frac{w(t_s - y_1)}{w(t_s)} \frac{w(t_s - y_2)}{w(t_s)} \quad (7.76)$$

Como $w(t_s) = w'(t_s)/q$, a EQ. 7.76 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{E}{E_0} = -e^{-j\pi/4} 2\sqrt{\pi x} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{e^{-j x t_s}}{(1 - t_s/q^2)} \frac{w(t_s - y_1)}{w'(t_s)} \frac{w(t_s - y_2)}{w'(t_s)} \quad (7.77)$$

Fazendo a aproximação $|q| \gg 1$ em (7.77), obtem-se:

$$\frac{t_s}{q^2} \simeq 0 \quad (7.78)$$

Logo,

$$\frac{E}{E_0} \simeq -e^{-j\pi/4} 2\sqrt{\pi x} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{w(t_s - y_1)}{w'(t_s)} \frac{w(t_s - y_2)}{w'(t_s)} e^{-j x t_s} \quad (7.79)$$

e, portanto, o cálculo da intensidade de campo poderá ser substancialmente simplificado, não levando em conta os efeitos da polarização e das características elétricas do terreno. Como este trabalho não considera a propagação sobre a água do mar, a maioria dos resultados numéricos aqui apresentados foram desenvolvidos dentro da suposição de que $|q| \gg 1$. Esta aproximação não compromete de forma significativa a estimativa dos cálculos de propagação, podendo ser aplicada para a maioria dos casos normalmente encontrados na prática.

7.3 APÊNDICE 3: GRWAVE

Neste apêndice é apresentado o guia de usuário do programa “Grwave” (CAVANAGH e THURSTON, 1988) definido pelo CCIR (Comitê Consultivo Internacional de Rádio)¹⁰ e atualmente disponível no “site” da UIT . Através deste guia são descritos os procedimentos utilizados para computar os valores da intensidade de campo e atenuação básica, considerando a formulação da série dos resíduos para uma terra esférica lisa e homogênea.

A versão “Grwave” para computadores pessoais opera com o sistema operacional da Microsoft (MS-DOS) e dispõe, no mínimo, de 256 Kilobytes de memória. O pacote do programa “Grwave” pode ser armazenado em um disco de 3.5" ou 5.25", contendo três arquivos: GRWAVE.EXE, GRWAVE.FOR e GRWUSR.MAN. O GRWAVE.EXE representa o arquivo executável, codificado em linguagem de máquina. O arquivo GRWAVE.FOR é o código fonte em linguagem estruturada FORTRAN. A compilação deste código fonte para gerar o arquivo executável requer um compilador FORTRAN (Versão 4.01), com suporte para aritmética complexa. O arquivo GRWUSR.MAN contém o manual do usuário. Para maiores detalhes, acesse o endereço eletrônico da UIT em <http://www.itu.org/itu-r/study-group5/software>.

7.3.1 PROCEDIMENTOS DE CÁLCULO

Para operar os cálculos da intensidade de campo e atenuação básica através do programa “Grwave” o usuário deve seguir os seguintes procedimentos:

- a) Editar os comandos apropriados do DOS para mudar o diretório “default” para o diretório contendo o arquivo executável do “Grwave”;
- b) Digitar **GRWAVE** e teclar < ENTER >. Em seguida, o programa solicitará a entrada de dados do usuário através do teclado. Os cálculos poderão ser feitos com os valores “default” das variáveis de entrada,¹¹ já embutidos no programa. O “Grwave” apresenta a opção para mudar as variáveis “default”. Na próxima seção,

¹⁰ Atualmente, o CCIR recebe a denominação de UIT-R (Organismo do setor de Radiocomunicações vinculado à União Internacional de Telecomunicações - UIT) e destina-se a padronizar os serviços de telecomunicações, assim como integrá-los a nível regional, nacional e internacional. Esta padronização é definida na forma de “Recomendações e Reports”, objetivando assegurar a qualidade dos serviços e padrões de desempenho para sistemas de radiocomunicação.

¹¹ Os parâmetros de entrada apresentam os seguintes valores “default”: frequência de operação de 1 MHz sobre a água do mar ($\epsilon_r = 70; \sigma = 5 \text{ Siemens/m}$), polarização vertical, distâncias do enlace de 10 Km a 200 Km (espaçadas de 10 Km) e alturas dos terminais de 50 m e 100 m.

será informado como alterar essas variáveis para os valores desejáveis;

- c) Para executar o programa digitar **GO** e teclar $\langle ENTER \rangle$;
- d) Os resultados do processamento computacional poderão ser visualizados na tela do monitor (a saída “default” do programa). Os cálculos computacionais poderão também ser enviados diretamente para uma impressora ou armazenados em um arquivo de disco (nomeado GRWAVE.OUT) através dos respectivos comandos:

$$\begin{aligned} GRWAVE > PRN & \quad (\text{Impressora}) \\ GRWAVE > GRWAVE.OUT & \quad (\text{Arquivo de Disco}) \end{aligned}$$

Variáveis de entrada poderão também ser obtidas através de um arquivo de dados (GRWAVE.DATA) criado previamente pelo usuário. Os resultados poderão ser enviados para uma impressora, desde que o “Grwave” seja instruído com o comando:

$$GRWAVE < GRWAVE.DATA > PRN$$

- e) Para finalizar a execução do programa, digitar **STOP** e teclar $\langle ENTER \rangle$. O PC então retornará ao prompt do DOS.

7.3.2 VARIÁVEIS

O “Grwave” utiliza um conjunto de parâmetros ou variáveis de entrada para controlar a operação do programa. Cada uma dessas variáveis podem ser alteradas do seu valor “default” inicial, atribuindo-se a elas um outro valor numérico desejado. A seguir é apresentada uma lista dessas variáveis e descritas as suas funcionalidades, com os possíveis valores numéricos que esses parâmetros poderão assumir.

★ **IDEBUG** – Esta variável controla a saída do programa.

$IDEBUG = 0$ (Apenas resultados principais são apresentados)

$IDEBUG = 1$ (Resultados adicionais intermediários)

$IDEBUG = 2$ (Saída completa, com propósitos de diagnóstico)

★ **ANS** – Refratividade da troposfera na superfície da terra.¹²

¹² Por definição, a refratividade da troposfera na superfície terrestre é expressa por

$N_s = \frac{1}{0.005577} \ln \left[\frac{(1-1/\kappa)}{0.04665} \right]$, onde $1/\kappa = a/a_e$ (a é o raio real terrestre e a_e o seu raio efetivo).

DEFAULT: $ANS = 315$ (Atmosfera padrão)¹³

- ★ **HSCALE** – A escala de altura da troposfera para o decréscimo exponencial do índice de refração¹⁴ (Km).

DEFAULT: $HSCALE = 7.35$

- ★ **IPOLRN** – Polarização das antenas terminais.

$IPOLRN = 1$ (Polarização Vertical)

$IPOLRN = 2$ (Polarização Horizontal)

- ★ **FREQ** – Frequência de operação (MHz).

DEFAULT: $FREQ = 1.0$

- ★ **EPSLON** – Permissividade dielétrica relativa da superfície da terra.

DEFAULT: $EPSLON = 70$ (Água do mar)

- ★ **SIGMA** – A condutividade da superfície da terra (Siemens/m).

DEFAULT: $SIGMA = 5$ (Água do mar)

- ★ **DMIN** – Distância mínima do enlace de propagação (Km).

DEFAULT: $DMIN = 10$

- ★ **DMAX** – Distância máxima do enlace de propagação (Km).

DEFAULT: $DMAX = 200$

- ★ **DSTEP** – Espaçamento da distância do enlace (Km).

DEFAULT: $DSTEP = 10$ (Totalizando $200/10=20$ pontos)¹⁵

- ★ **IG** – Seleciona a formulação no cálculo da intensidade de campo.

$IG = -1$ (Série dos Resíduos - R)

$IG = 1$ (Óptica geométrica - G ou formulação da terra plana - F)

DEFAULT: $IG = 0$ (Interpola as duas formulações possíveis)

¹³ Na atmosfera padrão, o decréscimo do índice de refração com a altura acima da superfície terrestre corresponde a um raio da terra efetivo igual a $\kappa = 4/3$ do seu raio verdadeiro ($a_e = 4a/3$).

¹⁴ Observações meteorológicas têm demonstrado experimentalmente que, para uma atmosfera não homogênea e em uma altura (H) suficientemente elevada acima da superfície da terra, o índice de refração (N_s) decresce linearmente com a altura. No entanto, nas proximidades da superfície terrestre, este índice de refração decresce muito mais rapidamente do que no caso de uma variação linear. Esse decréscimo (N) pode ser expresso através de uma relação exponencial da seguinte forma:

$$N = N_s e^{(-H/HSCALE)}$$

¹⁵ O "Grwave" admite no máximo 100 pontos.

- ★ **HRR** – o vetor que especifica as alturas das antenas receptoras (m). O número de posições (JR=1:20) desse vetor é atribuído pelo programa, de acordo com o número de entradas das alturas das antenas.
DEFAULT: $JR = 1$ e $HR(1) = 100$

- ★ **HTT** – o vetor que especifica as alturas das antenas transmissoras (m). De forma análoga às variáveis HRR e JR, JT (1:20) atribui o número de posições do vetor HTT.
DEFAULT: $JT = 1$ e $HT(1) = 50$

- ★ **JHT** – Uma variável que determina que combinação das alturas de antenas receptoras [$HR(LR); LR = 1 : JR$] e transmissoras [$HT(LT); LT = 1 : JT$] devem ser utilizadas nos cálculos da intensidade de campo e atenuação básica.
 $JHT = 1$ (Todas as possíveis combinações de pares de alturas das antenas)
 $JHT = 2$ ($JR = JT$ e o campo é calculado para pares específicos de alturas das antenas: [$HR(1), HT(1)$], [$HR(2), HT(2)$], ..., [$HR(JR), HT(JT)$])
DEFAULT: $JHT = 1$

- ★ **GO** – Inicia a execução do programa.

- ★ **STOP** – Finaliza o programa e retorna o controle para o sistema operante (MS-DOS).

- ★ / – Insere comentários no arquivo de entrada de dados.

TAB. 7.6: Arquivo de entrada de dados do usuário.

JHT	2
HRR	5 10 50
HTT	5 10 50
IPOLRN	2
FREQ	100
EPSLON	15
SIGMA	0.001
GO	
/Novo Cálculo:	
FREQ	150
IPOLRN	1
GO	
STOP	

Para exemplificar os procedimentos de cálculo na operação do programa “Grwave”, a TAB. 7.6 especifica as variáveis requeridas para calcular o campo e a atenuação básica, considerando o solo médio ($\epsilon_r = 15; \sigma = 10^{-3} S/m$), polarização horizontal, frequência de 100 MHz e alturas das antenas de 5, 10 e 50 metros ($JT = JR$), repetindo os cálculos para polarização vertical em 150 MHz. Finalizando este guia de usuário, na seção seguinte é apresentado o formato da saída de dados do programa “Grwave”.

7.3.3 SAÍDA DE DADOS DO PROGRAMA “GRWAVE”

```
[RESULTADOS DOS CÁLCULOS PROCESSADOS PARA AS VARIÁVEIS “Default”]
*****GRWAVE (RELEASE 2 AT 23/10/1985 )*****
****COPYRIGHT (C) GEC PLC 1985 *****
CCIR Personal Computer Version 1989 Study Group 5 IWP5/1
```

```
GRWAVE COMPUTES FIELD STRENGTH-DISTANCE VARIATIONS
FOR A HOMOGENEOUS CURVED EARTH WITH EXPONENTIALLY
DECREASING REFRACTIVE INDEX
```

```
ATMOSPHERIC CONSTANTS
REFRACTIVITY =315.00 (N-UNITS)
SCALE HEIGHT = 7.350 KM
```

```
GROUND CONSTANTS
RELATIVE PERMITTIVITY = 70.000
CONDUCTIVITY =5.0000D+00 SIEMENS/METRE
```

```
VERTICAL POLARISATION
```

```
MINIMUM DISTANCE = 10.000 KILOMETRES
MAXIMUM DISTANCE = 200.000 KILOMETRES
DSTEP = 10.000 KILOMETRES
```

```
FREQUENCY = 1.000 MHZ
```

```
TRANSMITTER HEIGHT = 50.0 METRES
RECIEVER HEIGHT = 100.0 METRES
```


DISTANCE	FIELD STRENGTH	BASIC TRANSMISSION LOSS
KM	DB(UV/M)	DB
10.00	89.39	48.89
20.00	83.30	54.98
30.00	79.70	58.58
33.37	78.75	59.54
		(R)
33.37	78.80	59.48
40.00	77.17	61.11
50.00	75.13	63.16
60.00	73.43	64.86
70.00	71.96	66.32
80.00	70.66	67.62
90.00	69.49	68.79
100.00	68.43	69.86
110.00	67.44	70.85
120.00	66.51	71.77
130.00	65.64	72.64
140.00	64.82	73.47
150.00	64.03	74.25
160.00	63.28	75.00
170.00	62.55	75.73
180.00	61.85	76.43
190.00	61.17	77.11
200.00	60.51	77.78

Stop - Program terminated.

7.4 APÊNDICE 4: INTEGRAIS DE FRESNEL

As Integrais de Fresnel são aplicáveis em vários ramos da física e engenharia e, em especial, na teoria da difração de Fresnel. Inúmeras integrais mais complexas podem ser simplificadas se expressas em termos das integrais de Fresnel. Neste apêndice são definidas as integrais seno e cosseno de Fresnel, suas propriedades e as fórmulas práticas usuais para o cálculo dessas integrais. Uma análise detalhada dessas integrais pode ser vista em ABRAMOWITZ e STEGUN (1964), PRESS et al. (1992) e THOMPSON (1997).

7.4.1 DEFINIÇÃO

As integrais cosseno, $C(z)$, e seno, $S(z)$, de Fresnel são definidas em termos do argumento complexo z ($z = x + jy$; x, y reais) pelas seguintes relações:

$$C(z) = \int_0^z \cos(\pi t^2 / 2) dt \quad (7.80)$$

$$S(z) = \int_0^z \text{sen}(\pi t^2 / 2) dt \quad (7.81)$$

7.4.2 PROPRIEDADES

★ Argumento $\sqrt{\frac{2}{\pi}} z$

$$C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} z\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z \cos(t^2) dt \quad (7.82)$$

$$S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} z\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^z \text{sen}(t^2) dt \quad (7.83)$$

★ Valor no Infinito ($z \rightarrow \infty$)¹⁶

$$C(\infty) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(t^2) dt = \frac{1}{2} \quad (7.84)$$

$$S(\infty) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \text{sen}(t^2) dt = \frac{1}{2} \quad (7.85)$$

¹⁶ $\int_0^\infty \cos(t^2) dt = \int_0^\infty \text{sen}(t^2) dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$

★ Relações Simétricas

$$C(-z) = -C(z) \quad (7.86)$$

$$S(-z) = -S(z) \quad (7.87)$$

$$C(jz) = jC(z) \quad (7.88)$$

$$S(jz) = -jS(z) \quad (7.89)$$

$$C(\bar{z}) = \overline{C(z)}^{17} \quad (7.90)$$

$$S(\bar{z}) = \overline{S(z)} \quad (7.91)$$

A maioria das aplicações das integrais de Fresnel envolvem argumentos z reais ($z = x$; x real). A seguir são apresentadas as expressões analíticas para computar $C(x)$ e $S(x)$.

7.4.3 CÁLCULO DE $C(x)$ E $S(x)$

★ Séries de Potências ($0 < x \leq 1.5$)

Substituindo as funções trigonométricas nos integrandos da EQ. 7.80 e EQ. 7.81 pelas suas expansões em séries de potências e integrando termo a termo, obtem-se as seguintes expansões em séries para as integrais de Fresnel

$$\begin{aligned} C(x) &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{\pi t^2}{2}\right)^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} \frac{x^{4n+1}}{(4n+1)} \end{aligned} \quad (7.92)$$

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi t^2}{2}\right)^{2n+1} dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1} \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)} \end{aligned} \quad (7.93)$$

¹⁷ O termo \bar{z} expressa o complexo conjugado de z ($\bar{z} = x - jy$).

★ Frações Continuadas ($x > 1.5$)

$$CS(x) = C(x) + jS(x) \quad (7.94)$$

$$= \frac{1+j}{2} \operatorname{erf}(w)^{18} \quad (7.95)$$

$$w = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-j)x \quad (7.96)$$

Em termos de frações continuadas¹⁹

$$\begin{aligned} e^{w^2} \operatorname{erfc}(w) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{w+} \quad \frac{1/2}{w+} \quad \frac{1}{w+} \quad \frac{3/2}{w+} \quad \frac{2}{w+} \dots \right) \\ &= \frac{2w}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2w^2+1-} \quad \frac{1*2}{2w^2+5-} \quad \frac{3*4}{2w^2+9-} \dots \right) \end{aligned} \quad (7.97)$$

Onde: $\operatorname{erfc}(w) = 1 - \operatorname{erf}(w)$.²⁰

Um método prático e suficientemente preciso para evoluir frações continuadas é baseado no algoritmo de Lentz modificado. A seguir, esse algoritmo é descrito na forma de pseudo-código. Para uma análise mais detalhada deste método considere a referência (LENTZ, 1976).

ALGORITMO DE LENTZ MODIFICADO

Variáveis e Funções

f Fração continuada

eps Precisão em ponto flutuante (10^{-7} ou 10^{-15})

¹⁸ Por definição, a função erro $\operatorname{erf}(w)$ é expressa por

$$\operatorname{erf}(w) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^w e^{-t^2} dt$$

¹⁹ Frações continuadas são relações úteis na evolução de funções que ocorrem comumente em aplicações científicas. Uma fração continuada é definida por

$$\begin{aligned} f(x) &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}} \\ &= b_0 + \frac{a_1}{b_1+} \quad \frac{a_2}{b_2+} \quad \frac{a_3}{b_3+} \dots \end{aligned}$$

²⁰ O termo $\operatorname{erfc}(w)$ expressa o complemento da função erro $\operatorname{erf}(w)$. Por definição, $\operatorname{erfc}(w) = \int_w^\infty e^{-t^2} dt$

FPMIN Número de menor representação em ponto flutuante

a, b Coeficientes da fração continuada

MAXIT Número máximo de iterações

Pseudo-Código

SE $b_0 = 0$

$$f_0 = FPMIN$$

SENÃO

$$f_0 = b_0$$

FIM-SE

$$c_0 = 1/f_0$$

$$d_0 = 0$$

PARA $j = 1 : MAXIT$

$$d_j = b_j + a_j d_{j-1}$$

SE $d_j = 0$

$$d_j = FPMIN$$

FIM-SE

$$c_j = b_j + a_j/c_{j-1}$$

SE $c_j = 0$

$$c_j = FPMIN$$

FIM-SE

$$d_j = 1/d_j$$

$$\Delta_j = c_j d_j$$

$$f_j = f_{j-1} \Delta_j$$

SE $|\Delta_j - 1| < eps$

EXIT

FIM-SE

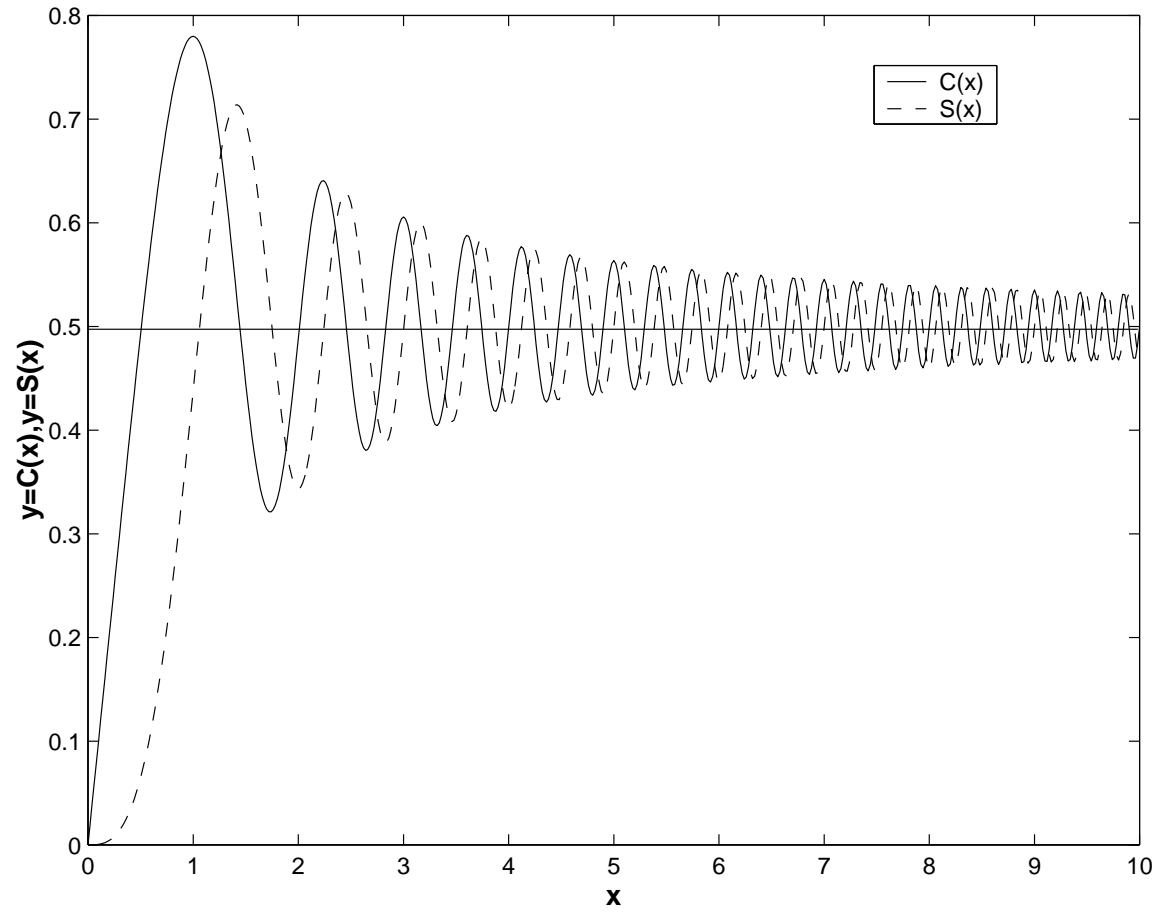
FIM-PARA

Portanto, implementada as séries de potências ($0 < x \leq 1.5$) ou as frações continuadas ($x > 1.5$), obtêm-se os valores para as integrais de Fresnel $C(x)$ e $S(x)$. Caso $x < 0$, a propriedade da simetria permite obter as integrais de Fresnel para argumentos negativos [$C(-x) = -C(x)$ e $S(-x) = -S(x)$].

TAB. 7.7: Intégrais de Fresnel

$$C(x) = \int_0^x \cos(\pi t^2/2) dt \qquad S(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(\pi t^2/2) dt$$

x	C(x)	S(x)	x	C(x)	S(x)
0.0	0.00000	0.00000	5.0	0.56363	0.49919
0.1	0.10000	0.00052	5.1	0.49978	0.56239
0.2	0.19992	0.00419	5.2	0.43889	0.49688
0.3	0.29940	0.01412	5.3	0.50779	0.44047
0.4	0.39748	0.03336	5.4	0.55723	0.51403
0.5	0.49234	0.06473	5.5	0.47842	0.55368
0.6	0.58110	0.11054	5.6	0.45171	0.47004
0.7	0.65965	0.17214	5.7	0.53846	0.45953
0.8	0.72284	0.24934	5.8	0.52984	0.54605
0.9	0.76482	0.33978	5.9	0.44859	0.51633
1.0	0.77989	0.43826	6.0	0.49953	0.44696
1.1	0.76381	0.53650	6.1	0.54950	0.51648
1.2	0.71544	0.62340	6.2	0.46761	0.53982
1.3	0.63855	0.68633	6.3	0.47600	0.45555
1.4	0.54310	0.71353	6.4	0.54960	0.49649
1.5	0.44526	0.69750	6.5	0.48160	0.54538
1.6	0.36546	0.63889	6.6	0.46899	0.46307
1.7	0.32383	0.54920	6.7	0.54674	0.49150
1.8	0.33363	0.45094	6.8	0.48307	0.54364
1.9	0.39447	0.37335	6.9	0.47323	0.46244
2.0	0.48825	0.34342	7.0	0.54547	0.49970
2.1	0.58156	0.37427	7.1	0.47331	0.53602
2.2	0.63629	0.45570	7.2	0.48874	0.45725
2.3	0.62656	0.55315	7.3	0.53927	0.51895
2.4	0.55496	0.61969	7.4	0.46010	0.51607
2.5	0.45741	0.61918	7.5	0.51602	0.46070
2.6	0.38894	0.54999	7.6	0.51563	0.53885
2.7	0.39249	0.45292	7.7	0.46278	0.48201
2.8	0.46749	0.39153	7.8	0.53947	0.48965
2.9	0.56238	0.41014	7.9	0.47597	0.53234
3.0	0.60572	0.49631	8.0	0.49980	0.46021
3.1	0.56159	0.58182	8.1	0.52275	0.53204
3.2	0.46632	0.59335	8.2	0.46384	0.48588
3.3	0.40569	0.51929	8.3	0.53775	0.49323
3.4	0.43849	0.42965	8.4	0.47091	0.52428
3.5	0.53257	0.41525	8.5	0.51418	0.46534
3.6	0.58795	0.49231	8.6	0.50248	0.53693
3.7	0.54195	0.57498	8.7	0.48274	0.46774
3.8	0.44809	0.56562	8.8	0.52796	0.52294
3.9	0.42233	0.47520	8.9	0.46612	0.48855
4.0	0.49843	0.42052	9.0	0.53537	0.49986
4.1	0.57370	0.47580	9.1	0.46661	0.51041
4.2	0.54172	0.56320	9.2	0.52914	0.48135
4.3	0.44944	0.55400	9.3	0.47627	0.52467
4.4	0.43833	0.46227	9.4	0.51804	0.47134
4.5	0.52603	0.43427	9.5	0.48729	0.53100
4.6	0.56724	0.51619	9.6	0.50813	0.46786
4.7	0.49143	0.56715	9.7	0.49549	0.53250
4.8	0.43380	0.49675	9.8	0.50193	0.46758
4.9	0.50016	0.43507	9.9	0.49960	0.53215
5.0	0.56363	0.49919	10.0	0.49990	0.46817

FIG. 7.3: Intégrais de Fresnel ($y=C(x), y=S(x)$)